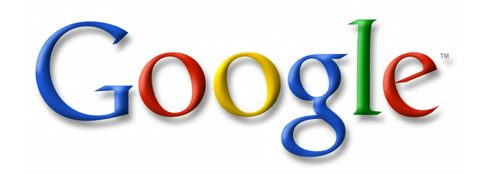


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

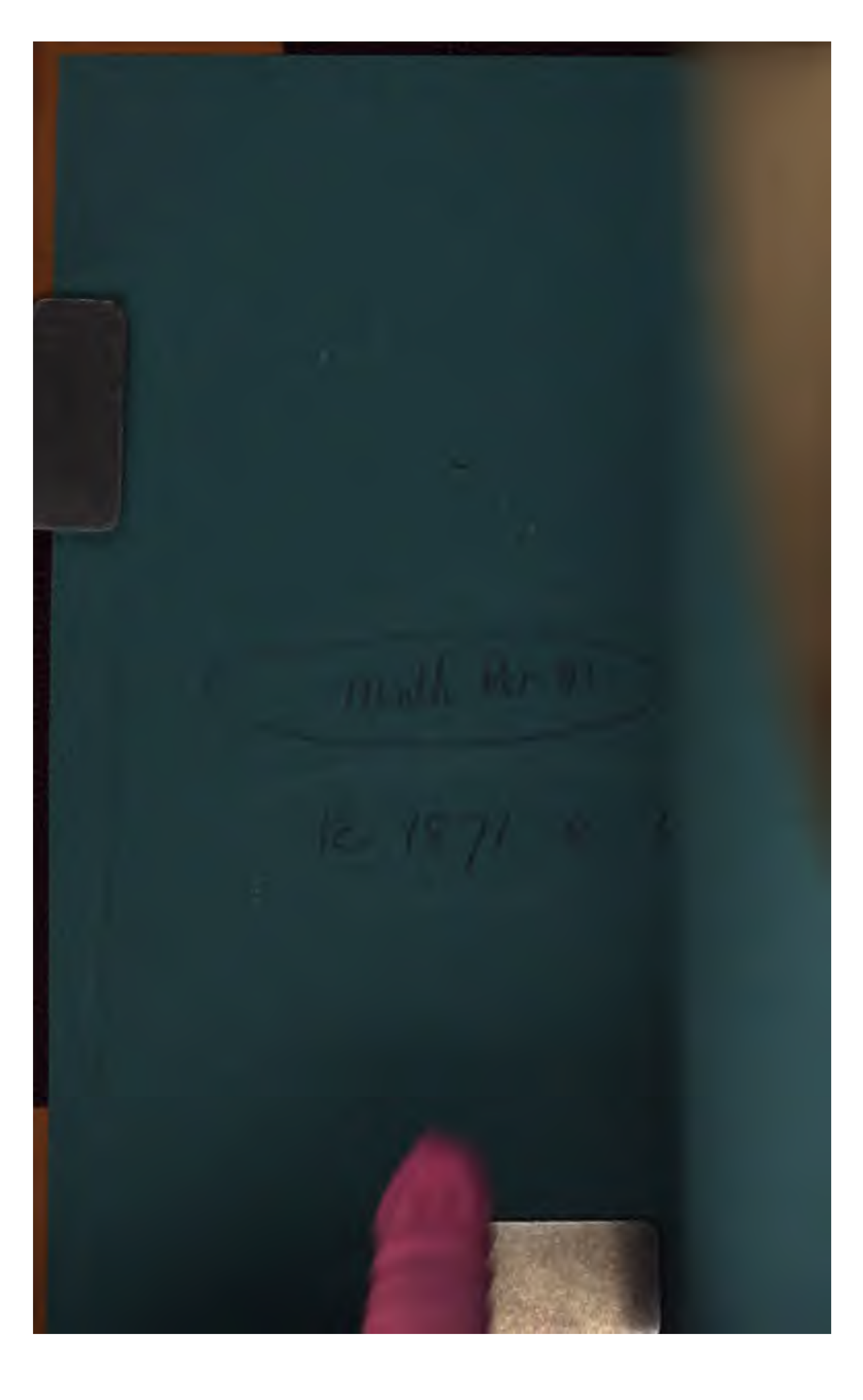
We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

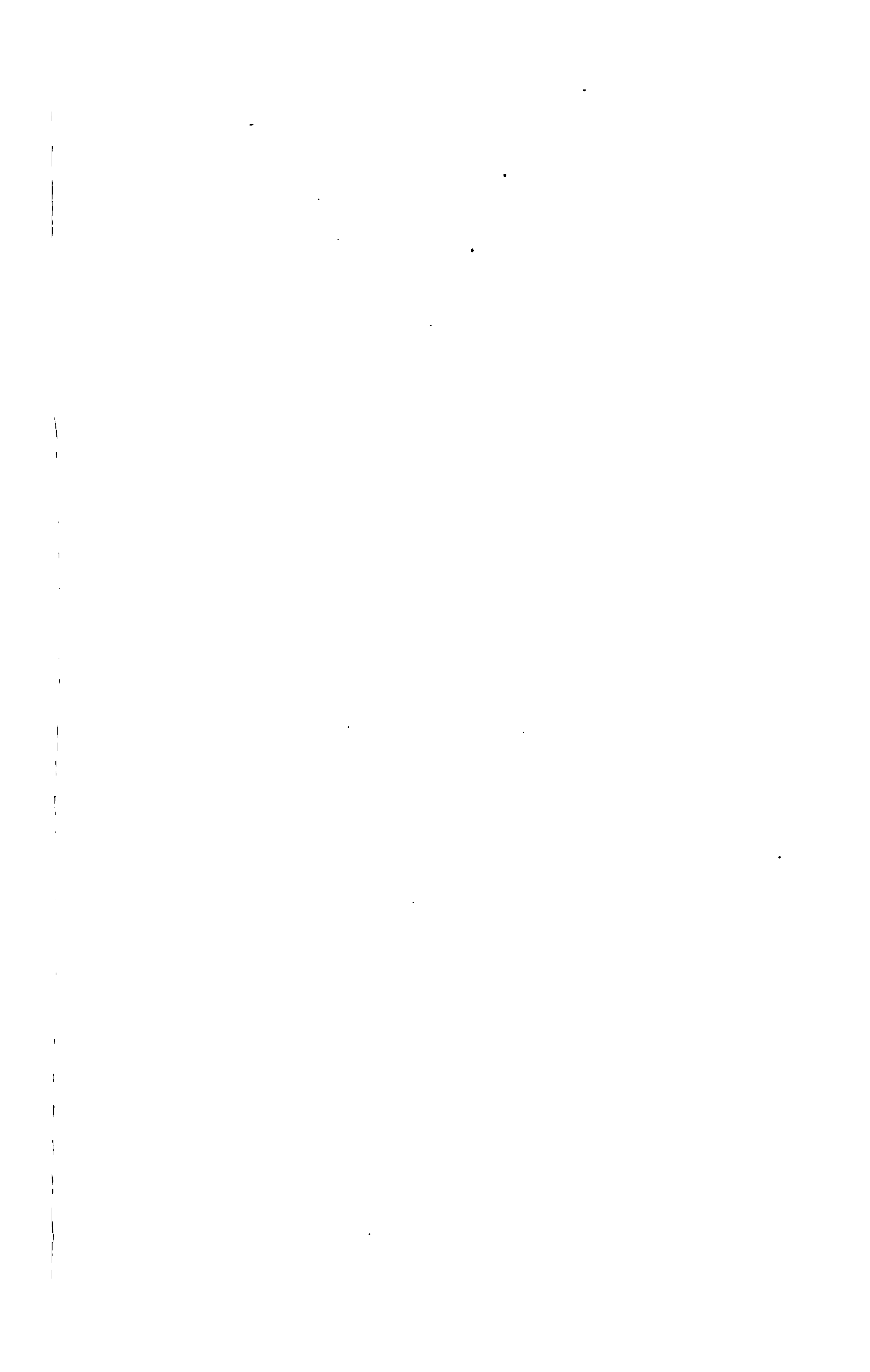
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/









Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

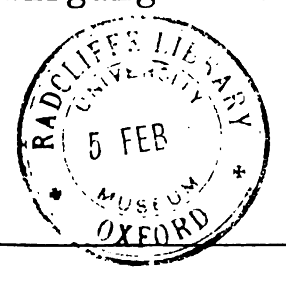
herausgegeben

von

Carl Ohrtmann, Felix Müller, Albert Wangerin.

Zehnter Band.

Jahrgang 1878.



Berlin.
Druck und Verlag von G. Reimer.
1880.



Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

Abh. St. Petersb.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. (Russisch). Petersburg.
Acc. P. N. L.: Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4°.
Acc. R. d. L.: Atti della Accademia Reale dei Lincei. Roma 4°.
Akad. Afhandl. Upsala: siehe N. Act. Ups.
Allg. J. f. Uhrmacherkunst: Allgemeines Journal für Uhrmacherkunst. Naumburg a. S. 4°.
Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée, publié par J. Ch. d'Almeida. Paris. 8°.
Am. J.: American Journal of Mathematics pure and applied. Editor in chief: J. J. Sylvester, Associate Editor in charge: W. E. Story. Published under the auspices of the Johns Hopkins University Baltimore. Murphy. 4°.
Amer. J.: American Journal of sciences and arts.
Analyst: The Analyst, a monthly journal of pure and applied mathematics. Edited and published by J. E. Hendricks. Des Moines, Jowa. gr. 8°.
Ann. de l'Éc. N.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du ministre de l'instruction publique par M. Le Pasteur. Paris. Gauthier-Villars. 4°.
Ann. de Belg.: Annuaire de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.
Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Dumas, Boussingault etc. Paris. Masson. 8°.
Ann. d. Mines: Annales des Mines ou Recueil de mémoires sur l'emploitation des mines et sur les sciences et les arts qui s'y rapportent, rédigées par les Ingénieurs des Mines et publiées sous l'autorisation du Ministre des travaux publics. Paris. 8°.
Ann. d. l'obs. de Brux.: Annuaire de l'observatoire royal de Bruxelles. Bruxelles. 8°.
Ann. de l'obs. r. de Brux.: Annales de l'observatoire royal de Bruxelles publiées aux frais de l'État. Astronomie. Bruxelles. F. Hayez. 4°.
Ann. d. P. et d. Ch.: Annales des ponts et des chaussées. Mémoires et documents relatifs à l'art de construction et en service de l'ingénieur. Paris. 8°.
Andresen Tidsskr.: Den tekniske Forenings Tidsskrift udgivet af A. Andresen. Kopenhagen.

Ann. Soc. scient. Brux.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Mit doppelter Paginirung, unterschieden durch die Buchstaben A und B.)

Ann. scient.: Annuario scientifico ed industriale, fondato da F. Grispigni, L. Trevellini ed E. Treves, compilato dal G. V. Schiaparelli, G. Celoria, F. Denza, R. Ferrini, F. Delpino, L. Gabba etc. Milano. Fratelli Treves.

Ann. de l'Ac. de Belg.: Annales de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.

Ann. di Torino: Annuario dell' Accademia Reale di scienze e di lettere di Torino. Torino.

Arch. f. Math. og Nat.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8°.

Arch. Néerl.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. La Haye. 8°.

Ass. Fr.: Association Française pour l'avancement des sciences naturelles.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4°.

Astr. Viert.: Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, A. Winnecke in Strassburg. 8°. Leipzig. W. Engelmann.

Atti Acc. Ven.: siehe *Atti d. Ist. Ven.* 8°.

Atti d. Aten. Ven.: Atti dell' Ateneo Veneto. Venezia. Cecchini. 8°.

Atti d. Ist. Ven.: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°.

Atti di Padova: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. Padova.

Atti di Torino: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°.

Augsb. Allgem. Z.: Augsburger Allgemeine Zeitung. Augsburg.

Battaglini G.: Giornale matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°.

Bair. Bl.: Blätter für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8°.

Ber. d. Techn. Inst. zu St. Petersb.: Nachrichten des St. Petersburger Technologischen Instituts. St. Petersburg.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Monatsber.: Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°.

Bibl. univ.: Bibliothèque universelle et revue suisse. Archives des sciences physiques et naturelles. Lausanne. Bridel.

Boncompagni Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°.

Borchardt J.: Journal für reine und angewandte Mathematik. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle gegründeten Journals, herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass von C. W. Borchardt. Berlin. G. Reimer. 4°.

Brioschi Ann.: Annali di matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma da Prof. Tortolini. Milano. 4°.

Bull. de Belg.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°.

Bull. de St. Pétersb.: Bulletin de l'Académie Impériale de St. Pétersbourg. Pétersbourg et Leipzig. Folio.

Bull. S. M. F.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°.

Carl Repert.: Repertorium für Experimental-Physik herausgegeben von Ph. Carl. München. gr. 8°.

Casopis: Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°.

Christ. Fork.: Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 8°.

Civiling.: Der Civilingenieur. Herausgegeben von K. R. Bornemann.

Clebsch Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. v. d. Mühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°.

Conn. d. temps: Connaissance des temps ou des mouvements célestes. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°.

Cron. cient.: Cronica cientifica revista international de ciencias fundador propietario y director D. Rafael Roig y Torres. Barcelona. 8°.

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Hoüel avec la collaboration des MM. André, Lespiault, Painvin et Radau, sous la direction de la commission des Hautes Études. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

Educ. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. C. F. Hodgson and Son.

Erl. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°.

Freib. Ber.: Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg. Freiburg i. Breisgau.

Gäa: Gäa. Natur und Leben, herausgegeben von H. J. Klein.

Gött. Anz.: Göttingische gelehrte Anzeigen. Unter der Aufsicht der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 12°.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 12°.

Grunert Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Unterrichtsanstalten gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8°.

Hamb. math. Ges.: Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Hamburg.

Herm.: Hermathena, a series of papers on literature, science and philosophy, by members of Trinity College. Dublin. Edw. Ponsonby. 8°.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. 8°.

Jaarb. v. Amst.: Jaarbook van de koninklijke akademie van Wetenschapen. Amsterdam.

J. d. Act. fr.: Journal des Actuaires français. Paris. Gauthiers-Villars. 8°.

J. of the Franklin Inst.: Journal of the Franklin Institution. Amerika.

Inst.: L'Institut, Journal universel des sciences et des sociétés savantes en France et à l'étranger. Première section. Sciences mathématiques physiques et naturelles. Paris. gr. 4°.

Jorn. d. sc. m. e astr.: Jornal de sciencias mathematicas physicas e naturales publicados sob os auspicios da academia real das sciencias de Lisboa. Lisboa typographia da academia. 8°.

Journ. Asiat.: Journal de la Société Asiatique. Paris.

Journ. of Act.: Journal of the Institute of Actuaries.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4°.
Königsberger Rep.: Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. Gesammelt und herausgegeben von L. Königsberger und G. Zeuner. Leipzig. Teubner. 8°.
Königsb. Schriften: Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Königsberg i. Pr. 4°.
Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krak. Akademie der Wissenschaften Krakau. (Polnisch.)
Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig. Hirzel.
Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse. Leipzig. Hirzel. 8°.
Liouville J.: Journal de mathématiques pures et appliquées fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié par H. Résal avec la collaboration de plusieurs savants. Paris. 4°.
Marb. Ber.: Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. Marburg. 8°.
Mél. math. de St. Pétersb.: Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie Impériale de St. Pétersbourg. Leipzig. Petersburg. 8°.
Mém. in 8° de Belg.: Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des Sciences de Belgique. Bruxelles. 8°.
Mem. di Bologna: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°.
Mém. de Bord.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.
Mém. cour. de Belg.: Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.
Mém. de l'Ac. Inscript.: Mémoires de l'Académie des Inscriptions. Paris.
Mem. Ist. Ven.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia.
Mém. de Liège: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. Liège.
Mem. di Modena: Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena.
Mém. prés. de Paris: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris.
Mem. of R. Astr. Soc.: Memoirs of the Royal Astronomical Society. London. 4°.
Mem. di Torino: Memorie dell' Accademia di scienze di Torino. Torino.
Mém. de Toul.: Mémoire de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Toulouse. Duladoure.
Messenger: The Messenger of mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8°.
Mondes: Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences et de leur application aux arts et à l'industrie par l'Abbé Moigno. Paris. 8°.
Monthl. Not.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 4°.
Mosk. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Moskauer mathematischen Gesellschaft. Moskau. Salvoréff.
Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München.
Münch. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°.
Nachr. v. Kiew: Nachrichten der Kaiserlichen Universität zu Kiew. Kiew.

Nachr. d. St. Petersb. Techn. Inst.: Nachrichten des St. Petersburger Technologischen Instituts. St. Petersburg.

N. Act. Ups.: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala. 4°.

N. C. M.: Nouvelle correspondance de mathématiques, publiée par E. Catalan et P. Mansion. Mons. Manceaux. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

N. Cim.: Il nuovo Cimento. Giornale fondato per la fisica e la chimica da C. Matteucci e R. Piria continuato per la fisica sperimentale e matematica da E. Betti e R. Félix. Pisa.

Neue Stettiner Z.: Neue Stettiner Zeitung. Stettin.

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam. 8°.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°.

Nouv. Mém. de Belg.: Nouveaux Mémoires de l'Académie de Belgique. Bruxelles. 4°.

Observatory: The Observatory, a monthly review of astronomy. Edited by W. N. M. Christie M. A. London.

Oesterreich. Vers. Ztg.: Oesterreichische Zeitung für Versicherungswesen.

Öfv. v. Stockh.: Öfversigt af Kongl. Svenks Wetenskabs Akademiens Forhandlingar. Stockholm.

Overs. v. Kopenh.: Oversigt over Videnskabs Selskabet Forhandlingar. Kopenhagen.

Par. Denkschr.: Denkschriften der Pariser Gesellschaft der exacten Wissenschaften. (Polnisch). Paris. 4°.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Brewster, Kane, Francis. London. 8°.

Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°.

Pogg. Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8".

Prag. techn. Blätter: Prager technische Blätter. Prag.

Proc. Am. Acad.: Proc. of the American Academy of arts and sciences. Cambridge. (Amerika.)

Proc. of Cambr.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

Proc. of Edinb.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°.

Proc. L. M. S.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°.

Proc. of London: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°.

Proc. of Manch.: Proceedings of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Proc. of R. S. Victoria: Proceedings of the Royal Society of sciences Victoria.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied mathematics. Edited by Sylvester and Ferrers. London. 8".

Quart. J. of Science: The Quarterly Journal of Science and Annales of Mining, Metallurgy, Engineering, Industrial Arts and Technology. Edited by William Crookes. London. 8°.

Rend. di Bol.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze del' Istituto di Bologna. Bologna.

Rend. Ist. Lomb.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°.

Rend. di Napoli: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli. 4°.

Rep. Brit. Ass.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15. de chaque mois. Paris.

Rev. de l'instr. publ.: Revue de l'instruction publique de Belgique. Gand. 8°.

Riv. Eur.: Rivista Europea. Rivista internazionale. Firenze. 8°.

Riv. Mar.: Rivista Maritima. Roma. Tipografia Barbera. 8°.

Riv. per.: Rivista periodica dei lavori della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. Redattore G. Orsolato. Padova. Randi. 8°.

Riv. scient. ind: Rivista scientifico-industriale delle principali scoperte ed invenzioni fatte nelle scienze e nelle industrie, compilata da G. Vimercati. Firenze. 8°.

R. Q. S.: Revue des questions scientifiques. Bruxelles.

Rundsch. d Vers.: Rundschau des Versicherungswesens. Leipzig.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°.

Hl. A.: Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).

Soc. dei XL.: Memorie di matematica e fisica della Società Italiana (dei XL.). Firenze. 4°.

Soc. Phil. Paris: Bulletin de la Société Philomatique de Paris. Paris. 8°.

Stockholm Handl.: siehe Öfv. v. Stockholm.

Svensk. Ak. Ofv.: Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm.

Tagebl. d. Naturforscherver.: Tageblatt der Versammlungen der deutschen Naturforscher und Aerzte.

Trans. of Cambr.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Trans. of Conn.: Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. New-Haven.

Trans. of Dublin: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin.

Trans. of Edinb.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°.

Ups. Arsskr: Upsala Universitets Årsskrift. Upsala. 8°.

Verh. v. Amst.: Verhandlingen der Koninklijke Akademie van Wetenschapen. Amsterdam.

Verh. d. naturf. Ver. zu Karlsruhe: Verhandlungen des naturforschenden Vereins zu Karlsruhe. Karlsruhe.

Verh. d. naturf. Ver. d. pr. Rheinl. u. Westph.: Verhandlungen des naturforschenden Vereins der preussischen Rheinlande und Westphalens.

Versl. en Mededeel.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschapen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam.

Vidensk. Selskab. i Kjbhn.: Videnskabs Selskabs Skrifter, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. Kopenhagen.

Wien. Anz.: Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 8°.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathem.-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abtheilung. Wien. 8°.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 4°.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Ziebarth. Berlin. 4°.

Zeitschr. f. d. Realsch.: Zeitschrift für das Realschulwesen in Oesterreich.

Z. f. Verm.: Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgegeben von W. Jordan.

Zeuthen Tidsskr.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. Kopenhagen. 8°.



Inhaltsverzeichniss.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Capitel 2. Philosophie.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

Capitel 2. Theorie der Formen.

Seite

Capitel 3. Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Theorie der Formen.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Seite

Capitel 3. Integralrechnung.

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Seite

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie. Trigonometrie. Stereometrie.)

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

B. Räumliche Gebilde.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere specielle Raumgebilde.

Capitel 4. Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme.)

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

B. Conforme Abbildung.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel. 1 Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Capitel 2. Akustik und Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

Capitel 2. Astronomie.

Anhang.

Verzeichniss

der Herren, welche für den zehnten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

Herr Prof. August in Berlin. A.
- Prof. Bäcklund in Lund. Bd.
- Prof. Baraniecki in Warschau. Bcki.
- Dr. Biermann in Berlin. Bn.
- Prof. Bobylew in St. Petersb. Bw.
- Prof. Brill in München. Bl.
- Prof. Bruns in Berlin. B.
- Prof. Casey in Dublin. Csy.
- Prof. Cayley in Cambridge. Cly.
- Dickstein in Warschau. Dn.
- Prof. van Geer in Leiden. G.
- Prof. Glaisher in Cambridge. Glr.
- Dr. Gram in Kopenhagen. Gm.
- Prof. Günther in Ansbach. Gr.
- Dr. Hamburger in Berlin. Hr.
- Prof. Hoppe in Berlin. H.
- Dr. Benno Klein in Berlin. B.K.
- Lazarus in Hamburg. Ls.
- Prof. Lie in Christiania. L.
- Prof. Lüroth in München. Lth.
- Prof. Mansion in Gent. Mn.
- Prof. Mayer in Leipzig. Mr.

Herr Dr. Maynz in Ludwigslust. Mz.
- Dr. Michaelis in Berlin. Mi.
- Prof. Mittag-Leffler in Helsingfors. M-L.
- Dr. F. Müller in Berlin. M.
- Prof. Netto in Strassburg. No.
- Prof. Neumann in Leipzig. Nn.
- Prof. Nöther in Erlangen. Nr.
- Dr. Ohrtmann in Berlin. O.
- Prof. Oberbeck in Halle a. S. Ok.
- Dr. von Posse in St. Petersb. P.
- Dr. Schemmel in Berlin. Schl.
- Dr. Schlegel in Waren. Schg.
- Dr. Schubert in Hamburg. Scht.
- Dr. Schumann in Berlin. Schn.
- Prof. Stolz in Innsbruck. St.
- Prof. Studnička in Prag. Std.
- Prof. Sturm in Münster. Sm.
- Dr. Toeplitz in Breslau. T.
- Prof. Voss in Dresden. V.
- Prof. Wangerin in Berlin. Wn.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:
Dr. C. Ohrtmann, Berlin SW, Markgrafenstr. 78. III.

Körper das $1\frac{1}{4}$fache des Productes aus Grundfläche und Höhe ist, hat Eisenlohr dahin gedeutet, dass die gebräuchliche Körperform die eines Kegelstumpfes gewesen sei, was aber Rodet nicht zugeben will. Beim Quadriren ist der Werth $\pi = \frac{256}{81}$ hervorzuheben. Die Pyramidenmessung führt auf eine Art goniometrischer Functionen. Hat die Diagonale der Basis den Werth 360, die Seitenlinie (piremus wahrscheinlich = πύϱαμις) den Werth 250, so ist der Neigungswinkel α durch die Relation $\sin\alpha = \frac{180}{250}$ gegeben. Sucht man dagegen den von der Seitenfläche mit der Basis gebildeten Winkel, so tritt für den Sinus die Tangente ein. Schliesslich wird auch noch die Summe einer geometrischen Reihe angegeben. Gr.

P. Tannery. Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules. Mém. de Bord. (2) II. 179-184.

Der Verfasser sucht auf Grund einer Stelle des Simplicius zu ermitteln, worin die Entdeckung des Hippocrates eigentlich bestanden habe, indem er zugleich zeigt, dass der betreffende Passus in Montucla's Histoire des Mathématiques I. 453 auf einer unrichtigen Auffassung beruhe. O.

B. Rothlauf. Die Mathematik zu Platon's Zeiten und seine Beziehungen zu ihr, nach Platon's eigenen Werken und den Zeugnissen älterer Schriftsteller. Diss. Jena.

Schoemann. Apollonius von Perga. Pr. Treptow a. R.

Nach kurzer Darlegung dessen, was wir über den Lebensgang des grossen Geometers wissen, zählt der Verfasser die Titel der von ihm verfassten Schriften nach Pappus auf und giebt sodann eine Uebersicht über die Bearbeitungen, welche diese Schriften bei den verschiedenen Culturvölkern erfahren haben.

Ausführlicher bespricht er das bekannte logistische Fragment, zu dessen Erläuterung er einige Excerpte aus Nesselmann betreffs altgriechischer Zahlenbezeichnung und Rechnungsweise einschiebt; hievon wird dann Gebrauch gemacht, um das Verfahren des Apollonius bei der Zurückführung der Multiplication grosser Zahlen auf eine analoge mit deren Einheiten (*πυθμένες*) vorzunehmende Operation an Beispielen klar zu legen. Ueber den sogenannten *ὠκυτόβοος*, dessen Charakter lange ein Streitobject der Historiker war, weiss man zur Zeit doch mehr, als der Verfasser anzunehmen scheint. Von den geometrischen Werken finden vorläufig blos diejenigen eingehendere Berücksichtigung, welche der „Analysis" dienen; von den „*κωνικά*" wird blos eine Inhaltsübersicht gegeben und die speciellere Behandlung derselben einer späteren Abhandlung vorbehalten. Gr.

J. L. Heiberg. Ueber eine Stelle des Pappus.

Schlömilch Z. XXIII. Hl. A. 117-128.

Im ersten Bande seiner trefflichen Pappus-Ausgabe beschäftigt sich Hultsch mit einer stark verdorbenen Stelle, aus welcher hervorzugehen scheint, der Commentator tadele den Archimedes um deswillen, dass er in seinem Buche über die Schneckenlinien für eine Aufgabe zweiten Grades eine Verzeichnung mit Hülfe der Kegelschnitte gegeben habe. Obwohl Hultsch auch diese Art der Interpretation für möglich hielt, glaubte er doch einer anderen Auffassung den Vorzug geben zu müssen. Heiberg aber beweist, dass die ursprüngliche Lesart beizubehalten ist, indem er zugleich darthut, dass das von Archimedes behandelte Problem, wenn man sich dem Wortlaut des Pappus anschliesst, eine verhältnissmässig sehr einfache Lösung mit Hülfe einer gleichseitigen Hyperbel ermöglicht. Eine Bestätigung der Heiberg'schen Ansicht mag darin gesucht werden, dass Hultsch selbst neuerdings (Königsberger Rep. II. p. 334) jene Wiederherstellung des eigentlichen Textes adoptirt hat. Gr.

B. ZUCKERMANN. Das Mathematische im Talmud. Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhaltes. Breslau. Hepner.

Verfasser legt sich den Plan seiner Untersuchung in der Weise zurecht, dass er zuerst einen allgemeinen Ueberblick über die wissenschaftlichen Kenntnisse der Hebräer im Mittelalter giebt und alsdann auf diejenigen Specialitäten, deren genaueres Studium die rituellen Vorschriften nothwendig machten, im Einzelnen eingeht. Alle bürgerlichen Rechnungsarten, sowie viele Sätze über Flächen- und Körperberechnung kommen im Talmud vor. Man verstand sich auf die Construction von Sonnenuhren, löste geodätische Aufgaben durch Messinstrumente, an welchen gläserlose Tuben angebracht waren, fertigte die vom Kalender geforderten Zeichnungen der Mondsichel nach ihren verschiedenen Phasen und beschäftigte sich sogar mit der Frage nach der Wiederkehr eines Kometen. Natürlich aber war die Mathematik stets nur Mittel, niemals Selbstzweck, und so ist denn der Kreis, innerhalb dessen die talmudische Grössenlehre sich bewegt, ein eng umgrenzter. Sehr wichtig war für sie die Quadratwurzel aus 2, für welche verschiedene Theile des Talmud auch verschiedene Annäherungen kennen. Am beliebtesten war der vermuthlich aus Griechenland datirende Werth $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ (vergl. die äusserst interessanten Bemerkungen Cantor's im 22. Bande der „Zeitschr. f. Math. u. Phys.“, s. F. d. M. IX. 19). Eine häufig sich wiederholende Frage ist ferner die nach dem Verhältnisse einer Kreisfläche zum um- und einbeschriebenen Quadrat. Im Traktat „Kilojim“ kommt eine Maximum-Aufgabe vor, deren algebraische Behandlung auf eine Gleichung vom zweiten Grade führt, und deren Lösung von dem berühmten Gelehrten des jüdischen Occidents, von Moses ben Maimon, ganz richtig gegeben worden ist. Im „Erubin“ spielt das Verhältniss des Kreisdurchmessers zur Peripherie eine Rolle. Obwohl man sich der Ungenauigkeit der Annahme $\pi = 3$ wohl bewusst war, bediente man sich doch vielfach dieses rohen Näherungswerthes, welcher vermuthlich aus der babylonischen Messkunde in die Mischna übergegangen war, ohne

dass die späteren Schriftgelehrten diese Tradition festgehalten hätten. Man brachte jenen Werth vielmehr mit der Gestalt des sogenannten ehernen Meeres in Verbindung, welches letztere nach des Verfassers Ansicht eine Combination aus Cylinder und Parallelepipedon vorstellte. Eine sehr interessante rechnerische Betrachtung wird über die Anlage der „Sabbathwege" angestellt; gelegentlich dieses Punktes wird auch der von vielen alten Schriftstellern erwähnten und durch die Rabbinen bekämpften Irrlehre gedacht, der zufolge das Quadrat a^2 und die Quadrate $\left(\frac{a}{m}\right)^2+\left(\frac{a}{m}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a}{m}\right)^2_m$ in Summe gleichen Flächeninhalt haben sollten. Das Buch „Pesachim" enthält ein arithmetisches Scherzräthsel, welches in seiner Fassung an einzelne jener Fragen erinnert, welche Alcuin in seinen „Problemata ad acuendos juvenes" vorlegt. Geometrische Kenntnisse werden auch vorausgesetzt, wenn es sich darum handelt, zu entscheiden, wie viele Personen um eine gehörig construirte Laubhütte sich herumsetzen dürfen, wie Baumpflanzungen einzurichten sind, damit deren Wurzeln nicht gegenseitig übergreifen, und wie man bei gewissen Begräbnissplätzen die Sargnischen anzuordnen habe. Letztere Aufgabe ist ohne den pythagoräischen Lehrsatz nicht wohl zu lösen gewesen. Den Schluss des interessanten und für die mathematische Geschichtsforschung zahlreiche neue Quellen eröffnenden Werkchens bildet Rabbi Huna's Kriterium der Theilbarkeit einer Zahl durch 7. Dasselbe ist, allgemein formulirt, folgendes. Die Zahl sei:

$$A\equiv a\cdot 10^m+b\cdot 10^{m-1}+\cdots+h\cdot 10^3+i\cdot 10^2+k\cdot 10+l;$$

man bilde den Ausdruck

$$R\left(\frac{k\cdot 10+l+2(a\cdot 10^{m-2}+\cdots+h)}{7}\right).$$

Der resultirende Werth ist identisch mit $R\left(\frac{A}{7}\right)$; erhält man also Null, so war A selbst eine durch 7 ohne Rest theilbare Zahl.

Gr.

A. Hochheim. Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî nach der auf der herzoglich gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift bearbeitet. I. Pr. Magdeburg. Halle. Nebert. Darboux Bull. (2) II. 236-237.

Diese erste Abtheilung des verdienstvollen Unternehmens enthält vorerst die Beschreibung des Manuscriptes. Autor desselben ist jener Alkarkhî, von dessen algebraischer Schrift „Fakhrî“ wir durch Woepcke bereits genauer unterrichtet sind. Ferner enthält sie die fünfundzwanzig ersten Capitel des arithmetischen Lehrbuchs, welches jener Algebra als Ergänzung diente und den Titel führte: „Buch des Genügenden über die Wissenschaft der Rechnung und ihrer Anhänge von dem sehr gelehrten Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî dem Rechner.“ Behandelt wird in dem vorliegenden Theile das Rechnen mit ganzen Zahlen und mit Brüchen, und zwar erhält man daraus, wie zu erwarten war, einen tiefen Einblick in die arabische Methode, mit sogenannten Stammbrüchen zu operiren. Auch der Abschnitt über den Sexagesimalcalcul ist von Interesse. Die nicht sparsam beigefügten Noten des Uebersetzers tragen wesentlich zur Erleichterung des Verständnisses bei. Gr.

L. Rodet. L'algèbre d'Al-Kharizmi et les méthodes indienne et grecque. Journ. Asiat. 1878.

M. Curtze. Inedita Coppernicana. Aus den Handschriften in Berlin, Frauenburg, Upsala und Wien herausgegeben. Grunert Arch. LXII. 113-148, 337-374.

Theils eigene, seit geraumer Zeit planmässig angestellte Studien, theils eine auf Veranlassung des Fürsten Boncompagni unternommene Reise nach Schweden haben den Verfasser in den Stand gesetzt, vorliegende Beiträge zur besseren Erkenntniss von des grossen Astronomen Person und Lehre zu liefern, welche

der Thorner Coppernicus-Verein übrigens auch als selbständige Schrift hat erscheinen lassen. Ein kurzes Vorwort erläutert den Plan der Sammlung; diese selbst zerfällt in sechs gesonderte Bestandtheile.

I. Der „Commentariolus'“ des Coppernicus über sein Buch „De revolutionibus“. Diese Abhandlung, welche Curtze nach einer stark corrumpirten, früher vermuthlich im Besitze Tycho Brahe's befindlichen Handschrift wiedergiebt, entstammt aller Wahrscheinlichkeit nach dem Zeitraum 1530-1540 und stellt für das Hauptwerk ungefähr das vor, was man heutzutage die Selbstanzeige eines Buches zu nennen pflegt. Aus dem sehr bemerkenswerthen und vom Herausgeber mit zahlreichen Noten ausgestatteten Texte geht z. B. hervor, dass Coppernic die griechische Vorgeschichte seines Systems besser kannte, als die „revolutiones“ vermuthen lassen, dass er von des Pierre de Maricourt (fälschlich Petrus Adsigerius) „Epistola de magnete“ Kenntniss hatte, u. s. f.

II. Der Brief des Coppernicus an den Domherrn Wapowski zu Krakau über das Buch des Johannes Werner „De motu octavae sphaerae“. Dieses Sendschreiben war bereits gedruckt, aber in so unvollkommener Weise, dass die von Curtze auf Grund sorgfältiger Collationirung eines Berliner und eines Wiener Manuscriptes besorgte Neu-Ausgabe uns dasselbe in völlig neuer Gestalt zeigt. Der Nürnberger Mathematiker Werner war ein verdienter Astronom, hing aber betreffs der Präcessionsfrage der von den Arabern überkommenen Trepidationstheorie an und hatte seinen Ansichten in einer selbständigen Monographie über die Eigenbewegung der Fixsternsphäre Ausdruck verliehen. Gegen diese nun wendet sich in schroffer Weise Coppernicus, indem er die Art und Weise Werner's, aus den überlieferten Beobachtungen Schlüsse zu ziehen, als unhaltbar nachweist.

III. Weitere astronomische Notizen. In einem zu Upsala befindlichen Sammelband trifft man phänologische Notizen über Planetenstellungen des Jahres 1537, welche des Coppernicus eigener Feder entstammen. Ein anderer enthält in gewissen Randnoten den directen Beweis dafür, dass demselben auch die astrologische Praxis keineswegs fremd war. In einem dritten

Buch hat er ein leeres Blatt benutzt, um Betrachtungen über einen Kometen von 1533 niederzuschreiben. Auch die Frauenburger Büchersammlung bewahrt handschriftliche Reliquien des einstigen Domherrn, so die Zeichnung einer Mondfinsterniss, welche sich 1525 ereignete.

IV. Mathematische Notizen. Hierher gehören zwei Gutachten Coppernic's über das Verhältniss der Getreidepreise zu den Brodpreisen, wobei insbesondere auch auf den Gebrauch exacter Wagen gedrungen wird. Ferner eine Anzahl von Randnoten, welche Coppernicus in sein Handexemplar des Proklus geschrieben hat. Zu einzelnen Propositionen hat er die Figuren selbst hinzugefügt.

V. Coppernicus als Arzt. Eine reichhaltige Sammlung von theilweise complicirten Dispensationen, deren genaues Studium Curtze sehr mit Recht den Geschichtschreibern der Medicin anempfiehlt.

VI. Einige neue Daten für das Leben des Coppernicus. Dieselben sind einigen neu aufgefundenen Aktenstücken des Culmer Archives entnommen und beziehen sich theilweise auf politische Akte in seinem Leben, theilweise auf den Termin einzelner von ihm angestellter Beobachtungen. So hat er z. B. im Jahre 1532 die Erdferne der Venus beobachtet.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass Herr Curtze für die von ihm gewählte Schreibart „Coppernicus“ demnächst mit neuen und gewichtigen Belegen hervortreten wird. Gr.

M. Curtze. Nuove Copernicana. Boncompagni Bull. XI. 167-171.

M. Curtze. Giunte ed annotazioni alle „Nuove Copernicana.“ Boncompagni Bull. XI. 172-176.

Vergl. den Bericht über die „Inedita Coppernicana“, welche die hier gegebenen vorläufigen Aufschlüsse mit in sich enthalten.

Gr.

A. Favaro. Intorno alla publicazione fatta dal Dr. Carlo Malagola di alcuni documenti relativi a Niccolò Copernico e ad altri astronomi e matematici dei secoli XV e XVI. Boncompagni Bull. XI. 319-334.

Das treffliche Werk Carlo Malagola's über den Bologneser Gräcisten Urceo Codro hat für die mathematische Geschichtsforschung deshalb eine hohe Wichtigkeit, weil der Verfasser auf die sehr plausible Vermuthung hin, auch Copernicus habe zu den Schülern jenes Philologen gehört, der italienischen Studienzeit des ersteren nachgespürt und eine Menge der interessantesten Documente für diese zu Tage gefördert hat. Herr Favaro schildert den Inhalt derselben in fortlaufender Reihenfolge. Als die beiden bemerkenswerthesten Thatsachen dürften wohl die anzusehen sein, dass der dreiundzwanzigjährige Student der Jurisprudenz als „Niccolò Kopperlingk di Thorn" in das Album der „Nazione Alemanna" sich einzeichnete — ein sprechendes Zeugniss für sein Deutschthum —, sowie, dass er später zu Ferrara promovirte. Letzteres hatte Malagola allerdings erst wahrscheinlich gemacht, während Fürst Boncompagni dafür den vollgültigen Beweis erbrachte. Vergl. auch den in der „Leopoldina" publicirten Aufsatz des Unterzeichneten: „Malagola's und Curtze's neueste Forschungen über Coppernicus, sein Leben und seine Lehre." Gr.

R. Billweller. Kepler als Reformator der Astronomie. Zürich. Zische und Furrer. 1877.

Die Arbeit betrachtet Kepler als Begründer der modernen Astronomie und beschäftigt sich daher speciell mit der „Hypothesis physica". Siehe auch Darboux Bull. (2) II. 452.

O.

S. Günther. Der neueste Stand der Galilei-Frage. Gäa. 1878. 474-480. 538-543.

Der Verfasser giebt in diesem Aufsatze den Lesern ein Bild von dem Stande der Galilei-Frage am Ende des Jahres 1877.

Der Hauptsache nach dem Gebler'schen Werke folgend, weiss der Verfasser geschickt die Punkte hervorzuheben, um die es sich handelt. Es sind das die Torturfrage und die Fälschungsfrage, welche er, in keiner Weise dem Urtheile vorgreifend, nach den Arbeiten von Gebler, l'Épinois, Wohlwill, Berti etc. skizzirt.

O.

P. GILBERT. Publications récentes sur Galilée. R. Q. S. III. 274-285, 585-612.

Kritischer Bericht über folgende Schriften: 1) H. de l'Épinois, Les pièces du procès de Galilée. Rome et Paris. Palmé 1877. 2) K. v. Gebler, Die Acten des Galilei'schen Processes. Stuttgart. Cotta 1877. 3) E. Wohlwill, Ist Galilei gefoltert worden? Eine kritische Studie. Leipzig. Duncker 1877. 4) H. de l'Épinois, La question de Galilée. Paris. Palmé 1878. Ferner finden sich weniger wichtige Arbeiten, wie die von Desjardins, Bertrand, Terrier, Fuchs, Combes über diesen Gegenstand besprochen. Der Standpunkt, von dem aus die Kritik geübt wird, ist so ziemlich derselbe, wie in dem, F. d. M. IX. p. 3-4 besprochenen Werke desselben Verfassers. Mn. (O.)

S. TAYLOR. Galilei's trial before the inquisition in the light of recent researches. Monthl. Not. XXXVIII. 256-257.

Bericht über Galilei's Verhör und die Resultate der Forschungen von H. de l'Épinois, Berti, v. Gebler und Wohlwill.

Glr. (O.)

F. MOIGNO. Procès de Galilée. Mondes (2) XLV. 29-44.

Abdruck einer Reihe von Aktenstücken aus dem Processe vom Jahre 1633 nach Berti, nebst einer Reihe von Bemerkungen des Herausgebers der Mondes. In welchem Sinne diese gehalten sind, dies wird hinlänglich durch die bekannten persönlichen Anschauungen des Verfassers gekennzeichnet. O.

Weitere Schriften zur Galilei-Frage sind:

H. DE L'ÉPINOIS. La question de Galilée. Paris. Palmé.

A. WOLINSKI. Documenti inediti del processo di Galilei. Firenze. Gazetta d'Italia.

SCARTAZZINI. Il processo di Galileo Galilei. Riv. Europ. V. 1-15.

G. RUBINI. Galileo Galilei e la variabilità dei volumi reali dei corpi. Bologna.

O.

A. DESBOVES. Étude sur Pascal et les géomètres contemporains suivie de diverses notes scientifiques et litéraires. Paris. Delagrave.

B. BONCOMPAGNI. Intorno a due lettere del P. Abate D. Benedetto Castelli Monaco Cassinese a Monsignore D. Ferdinando Cesarini. Boncompagni Bull. XI. 587-644.

Due lettere del P. Abate D. Benedetto Castelli a Monsignore D. Ferdinando Cesarini. Boncompagni Bull. XI. 645-657.

CASTELLI (Benedetto). Boncompagni Bull. XI. 658-665.

Man weiss, dass Castelli (24. Juni 1577 bis 8. März 1644?) einer der anhänglichsten Freunde Galilei's und zugleich selbst ein scharfsinniger Mathematiker war. Die beiden von Don Balthasar Boncompagni edirten und paraphrasirten Briefe liefern somit jedenfalls interessante Beiträge zur wissenschaftlichen Geschichte des siebzehnten Jahrhunderts, und kannte man auch bereits theilweise deren Inhalt, so war eine gründliche Analyse doch immer noch ein Bedürfniss. Im ersten Schreiben (1638) erläutert Castelli das Wesen eines von Galilei angegebenen Wärmemessers; eine Röhre mit angeblasener Kugel wird so in ein Gefäss mit Flüssigkeit gestellt, dass die Kugel nach oben zu stehen kommt. Das Instrument soll insbesondere zu physiologischen Experimenten gebraucht werden. Der zweite Brief (1639)

verbreitet sich über hydraulische Fragen, für welche ja bekanntlich Castelli die erste Autorität damaliger Zeit war. Fürst Boncompagni nun commentirt mit gewohnter Akribie beide Episteln, und zwar kann die Gesammtheit der für die ersten beigebrachten Nachweise recht wohl als eine quellenmässige Darstellung der Erfindungsgeschichte des Thermometers gelten.

Der dritte Artikel ist eine Biographie Castelli's, welche dem ungedruckten Werke des Grafen Giovanni Maria Mazzuchelli „Gli scrittori d'Italia" entnommen ist. Castelli's grossentheils nicht zum Drucke gelangte Arbeiten betreffen hauptsächlich Gegenstände der theoretischen und praktischen Hydrodynamik, doch findet sich auch je eine Abhandlung über Kometen und über solche algebraische Probleme vor, welche für unlösbar galten, vom Verfasser aber aufgelöst worden sind. Gr.

D. Bierens de Haan. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige Wetenschappen. (XII. bis XVII.) Versl. en Mededeel. XII. 1-160.

Fortsetzung und Schluss der geschichtlichen Notizen des Verfassers, über welche schon früher (siehe F. d. M. VIII. p. 25) referirt worden ist.

XII. In dieser Notiz handelt es sich um Adriaan Anthonisz (geb. zu Metz 1527, gest. zu Alkmaar 1607). Er war der Vater zweier Söhne: Adrian Adriaansz und Jacob Adriaansz, welche später den Beinamen van Metius erhielten, weil ihr Vater aus Metz stammte. Daher sind sie später viel mehr bekannt geworden unter den Namen Adriaan Metius und Jacob Metius. Nachdem einige Einzelheiten aus dem Leben dieser Söhne erwähnt sind, wird ausführlich erzählt, welchen Antheil der oben genannte Vater an der Annäherung der Zahl π genommen hat, woraus erhellt, dass eben dieser, hauptsächlich vielleicht durch Zufall, das bekannte und schöne Verhältniss $\frac{355}{113}$ gefunden hat, welches später dem Sohne zugeschrieben wurde. Auch hier wird gezeigt, wie oberflächlich Montucla in seiner „Histoire des

recherches sur la quadrature du cercle“ diese Erfindung behandelt hat. Er hat nämlich aus den Buchstaben P. M. (piae memoriae) den Namen des Vaters als Petrus Metius herausgelesen, was dann später ohne weitere Untersuchung von verschiedenen Schriftstellern angenommen wurde. Aus seltenen Büchern, welche unser Verfasser besitzt, wird hier die Geschichte des Vaters und die seiner Söhne auf's Neue gegeben. Besonders werden die Verdienste des so wenig bekannten Vaters in der reinen und angewandten Mathematik untersucht. So stellte er ein Navigationsbuch zusammen, welches das erste dieser Art war, zwanzig Jahre Arbeit forderte, und damit ein allgemein erkanntes Bedürfniss erfüllte.

XIII. Hier behandelt der Verfasser die beiden van Schooten's, Professoren an der Universität zu Leiden. Der älteste, Franciscus van Schooten wurde 1551 zu Leiden geboren und nahm 1610 die Stellung Ludolph's van Ceulen ein; nach seinem Tode folgte sein gleichnamiger Sohn in dieser Stellung. Der Vater schrieb mehrere mathematische Werke. Eingehend wird gesprochen über ein von ihm hinterlassenes Manuscript, welches die Leidner Universität bei ihrem letzten Jubiläum als Festgabe erhielt. Es ist eine Sammlung Adversaria zum Gebrauch bei den Vorlesungen, und enthält die Lösungen vieler arithmetischer und geometrischer Aufgaben, von denen einzelne als Beispiele mitgetheilt werden.

Das grösste Verdienst des Sohnes besteht in der Einführung der Methode von Descartes in den Niederlanden, weshalb er auch dessen mathematische Werke auf's Neue herausgab. Ihm folgte der Bruder Petrus van Schooten; der Vater nebst den beiden Söhnen lehrten so siebzig Jahre hinter einander Mathematik an der Ingenieurschule, deren erster Lehrer Ludolph van Ceulen war.

Dann folgt noch eine Beschreibung der Weise, in welcher in der früher genannten Handschrift die Quadratwurzeln viergliedriger Zahlenausdrücke bestimmt werden. Diese Beschreibung ist schon früher publicirt worden (siehe F. d. M. IX. p. 19).

XIV. Der berühmte Josephus Scaliger ist die Hauptperson dieser Notiz. Der grosse Gelehrte hat sich auch mit mathema-

tischen Uebungen beschäftigt, doch war er hierin nicht so glücklich, wie in seinen übrigen tiefsinnigen Unterscuhungen. Er war nämlich auch von der Sucht ergriffen, die Quadratur des Kreises zu suchen, doch er that es in noch unwissenschaftlicherer Weise als Simon van der Eycke, so dass die Werke seiner Gegner in dieser Hinsicht von mehr Bedeutung sind, als seine eigenen. Zuerst werden einige Ergebnisse aus dem Leben Scaliger's mitgetheilt, woraus erhellt, dass er 1593 schon mit einem Europäischen Ruhm seiner Gelehrsamkeit als Professor an die Universität nach Leiden kam. Seine Quadratur des Kreises veröffentlichte er in einer Schrift: „Cyclometrica elementa duo", welche 1593 erschien. Doch seine Lösung war ganz unrichtig, denn für den Werth von π fand er 3,1622777. Daher wurde er von Ludolph van Ceulen, Adrianus Romanus, Christophorus Clavius, Petrus Antonius Cataldi und Franciscus Vieta angegriffen, doch liess er sich nicht von seinem Irrthum überzeugen. Hat er in dieser Weise mit seiner Cyclometria nur wenig Ehre eingelegt, so beweisen doch die „Prolegomena in Cyclometria" seine grossen Kenntnisse auch in der Mathematik.

XV. Ausführlicher als zuvor wird jetzt über Adriaan van Roomen gesprochen, dessen Name schon mehrmals in früheren Notizen vorkam. Er wurde 1561 zu Löwen geboren, war dort einige Jahre Professor und ging von hier zur Universität von Würzburg über. Später machte er grosse Reisen, auch durch Russland, und starb auf dem Rückwege nach seinem Vaterlande 1615 in Metz. Er war sehr befreundet mit Ludolph van Ceulen und arbeitete mit diesem an der Quadratur des Kreises; er bestimmte das Verhältniss der Peripherie und des Durchmessers in 17 Decimalen und veröffentlichte diese Berechnung in seiner Schrift: „Ideae mathematicae pars prima" (1593). Wie oben schon erwähnt wurde, gehörte er auch zu den Gegnern Scaliger's, dessen Argumente er gründlich widerlegte.

XVI. Die Kreisquadraturen dreier anderer Schriftsteller von weniger bekannten Namen werden hier besprochen. Diese drei sind: Jacobus Marcelis (1698), ein Seifensieder von Amsterdam, der wie Scaliger eine unrichtige Lösung gab; Daniel Waeytrel

(1712) und Gilles Bovy (1712), Stadtzimmermann in Zutphen, der das Verhältniss von Archimedes als etwas Neues beweist.

XVII. Noch einmal kehren wir hier zu Ludolph van Ceulen zurück. Zwei Briefe von ihm werden mitgetheilt, welche sich in einem seltsamen Werkchen: „Toets steen van d'Algebra spetiosa door Derck d'Hollander, Amsterdam 1669" finden.

In diesen Briefen finden sich eine Reihe von arithmetischen Aufgaben mit ihren Lösungen, nach der Methode dieser Zeit zusammengestellt. Weiter wird auch gesprochen über den Sammler Derck d'Hollander, der sich durch eine verbesserte Ausgabe der Arithmetik von David Coek von Enkhuysen, einem kleinen Lehrbuche, verdient machte, das in mehreren Formen bis 1799 benutzt worden ist.

Mit einigen Zusätzen und Verbesserungen endigen hier diese historischen Notizen, welche vom Verfasser zu einem Bande vereinigt sind, unter demselben Titel wie die besonderen Theile, welches Buch leider nicht in den Handel gekommen ist.

G.

D. Bierens de Haan. Notice sur un pamphlet mathématique hollandais intitulé: „Bril voor de Amsterdamsche Belachelycke Geometristen. Amsterdam 1663."
Boncompagni Bull. XI. 383-452.

Es handelt sich um eine Schmähschrift, die ein gewisser Cornelis Sackersz von Leeuwen gegen andere in Amsterdam lebende Mathematiker, Abraham de Graaf, Jacob Bos, Claas Hendricksz, Gietermaker und Christiaan Martini Anhaltin richtete, und in der er denselben Unwissenheit, Plagiate etc. vorwarf. Antworten blieben natürlich nicht aus. Die vorliegende Arbeit geht in die Schmähschrift, wie deren Beantwortungen ausführlich ein, betrachtet die Lebensverhältnisse der auftretenden Persönlichkeiten und giebt so ein höchst interessantes Bild von dem damaligen Leben und Treiben, das, wenn auch keine der auftretenden Personen eine Rolle für die wirkliche Entwickelung der Wissenschaft spielt, nicht nur für den Culturhistoriker, son-

dern auch für den Mathematiker kennen zu lernen sich verlohnt. O.

M. Cantor. Der Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler. Schlömilch Z. XXIII. Hl. A. 1-21.

M. Cantor. Il carteggio fra Lagrange ed Euler. Traduzione del Prof. A. Favaro. Boncompagni Bull. XI. 197-216.

Eingehender Bericht über die Correspondenz zwischen Lagrange und Euler, soweit sich dieselbe aus den vom Fürsten Boncompagni veröffentlichten 11 Briefen Lagrange's (s. F. d. M. IX. 8) und den 10 ersten Briefen Euler's (Opera posthuma I. 555-588) ergiebt. M.

H. Carnot. Lettre sur Sadi Carnot. C. R. LXXXVII. 967-970.

Schreiben an die Akademie bei Gelegenheit der Ueberreichung einer neuen Ausgabe von S. Carnot's Réflexions sur la puissance motrice du feu, welche zugleich unedirte Fragmente von S. Carnot und biographische Notizen über denselben, verfasst vom Bruder, H. Carnot, enthält. Der Schreiber selbst hebt zugleich die wichtigsten Punkte der Leistungen S. Carnot's hervor. O.

L. Hanselmann. Karl Friedrich Gauss. Zwölf Capitel aus seinem Leben. Leipzig. Duncker und Humblot.

G. Gorresio. Notizia storica sull' Accademia Reale delle scienze di Torino. Ann. di Torino I. 15-22.

Die Arbeit enthält eine Uebersicht der Gründung der Turiner Akademie durch den Grafen Guiseppe Angelo Saluzzo di Menusiglio im Jahre 1757 und ihre folgende Entwickelung. Für das Jahrbuch von Interesse ist die darin enthaltene Aufzählung der verschiedenen Publicationen der Akademie mit Hervorhebung

der darin enthaltenen wichtigen Arbeiten mathematischen Inhalts, wie solcher von Lagrange etc. O.

A. Stiattesi. Notizia storica di Gian Domenico Romagnosi considerato precipuamente come matematico. Firenze. Campolini.

P. Smyth. Notice nécrologique sur Le Verrier. Mondes (2) XLV. 163-170, 200-208.

Guillot. Le Verrier et son oeuvre. Darboux Bull. (2) II. 29-41.

Sousa Pinto. Sobre Le Verrier. Jorn. sc. math. e astr. I. 86-89.

Le Verrier ist geboren im Jahre 1811 zu Saint Ló (Départ. de la Manche), besuchte bis 1831 die École Polytechnique, war dann einige Jahre bei der Tabaksverwaltung beschäftigt. Dann Repetitor an der École Polytechnique, wurde er in Folge seiner Arbeiten über den Neptun im Jahre 1846 Director des Observatoriums. Die erste Arbeit schildert namentlich den persönlichen Charakter des grossen Astronomen und bespricht eingehend seine Direction, wobei auch der Conflicte, die unter seiner Direction stattfanden und die schliesslich zur Aufgabe dieser Stellung führten, ausführlich gedacht wird. Auch die Zeit der zweiten Direction findet eine eingehende Charakteristik. Die zweite Arbeit giebt ein Bild der grossen Entdeckungen Le Verrier's.

O.

C. Pečhüle. Urbain Le Verrier. Zeuthen Tidskr. (4) II. 93-96.

Nekrolog von Le Verrier. Gm.

E. Mailli. E. Quetelet. Discours prononcé à ses funérailles. Mondes (2) XLVII. 225-227.

E. Mailli. Essai sur la vie et les ouvrages de Quetelet. Bruxelles. 1875. Darboux Bull. (2) II. 240-246.

Mailly's Rede an Quetelet's Grab und Bericht über die Biographie desselben. O.

Tournaire. Notice nécrologique sur Abel Transon. Ann. d. Mines (7) XIV. 433-499.

Abel Etienne Transon, im Jahre 1805 zu Versailles geboren, besuchte von 1823 an die École Polytechnique und war seit 1858 Examinateur d'admission der École Polytechnique, welche Stellung er 1872 wegen Krankheit aufgeben musste; starb am 23ten August 1876. Die Notiz enthält zugleich ein Resumé seiner Arbeiten in Liouville's J. und den Nouv. Ann. O.

F. Moigno. Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault. Mondes (2) XLVII. 181-182.

Anzeige der gesammelten Werke Foucault's durch Herrn Moigno. O.

J. Bertrand. Éloge de Gabriel Lamé. Ann. d. Mines (7) XIII. 236-259. Inst. 1878.

Rede zum Gedächtniss Lamé's gehalten in der öffentlichen Sitzung der Akademie am 28. Januar 1878. O.

De la Gournerie. Sur les travaux de M. Bienaymé. C. R. LXXXVII. 617-619.

Kurze Notizen über das Leben und die Arbeiten des bekannten Gelehrten. Bienaymé wurde geboren am 28. August 1796 zu Paris. 1816 in die École Polytechnique aufgenommen, trat er 1820 in die Administration des finances, der er bis 1848 angehörte. Von da an lebte er als Privatmann, nur kurze Zeit provisorisch als Lehrer über Wahrscheinlichkeitsrechnung an der Sorbonne thätig und wurde 1852 Mitglied der Akademie. Seine

Arbeiten beziehen sich fast durchweg auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung in der Statistik etc.

O.

D. Turazza. Commemorazione del Professore Giovanni Santini. Atti d. Ist. Ven. (5) IV. 5-21.

Gedächtnissrede auf Giovanni Santini, geb. den 30. Januar 1787 zu Lama (G. Santini bezog 1803 die Universität Pisa, widmete sich dann dem Studium der Astronomie zu Florenz, und war seit 1806 Astronom an der Sternwarte zu Padua) gest. am 27. Juni 1877. Die Rede giebt einen Ueberblick über das Leben und die Arbeiten Santini's. O.

E. Millosevich. Intorno alla vita ed ai lavori di Giovanni Santini. Boncompagni Bull. XI. 1-110.

Die Abhandlung ist in zwei Theile getheilt und giebt eine sehr eingehende Schilderung der Arbeiten Santini's. Der erste Theil ist den Untersuchungen desselben über Planeten und über Cometen gewidmet. Der zweite Theil giebt im Capitel 1 eine Analyse seiner Arbeiten über Optik und optische Instrumente, im Capitel 2 derjenigen mathematischen Inhalts, unter denen namentlich seine Arbeit über die Gauss'schen Formeln aus der sphärischen Trigonometrie hervorzuheben ist, in Capitel 3 des Sternkatalogs u. s. w.

O.

Van Tricht. Le Père Secchi. R. Q. S. IV. 353-402.

Van Tricht. Principales publications du P. Secchi. R. Q. S. IV. 643-665.

Angelo Secchi, geb. zu Reggio 1818, gest. zu Rom am 24. Februar 1878, war seit 1849 Director der Sternwarte des Collegiums der Jesuiten. Der Verfasser analysirt seine Hauptarbeiten, speciell die, welche sich auf die physische Beschaffenheit der Sonne beziehen. Secchi hat ungefähr 700 Arbeiten und

Noten veröffentlicht, welche in verschiedenen Zeitschriften verstreut sind. Dazu kommen 5 grössere Werke: 1) Misura della base trigonometrica eseguita sulla via Appia per ordine del Governo Pontificio nel 1854-1855. Roma 1858. 2) Quadro fisico del sistema solare. Roma 1859. 3) L'unité des forces physiques (2 ital., 2 franz., und 1 deutsche Ausgabe). 4) Le soleil (3 Ausgaben. Die erste und dritte französisch, die zweite deutsch). 5) Les étoiles (italienisch, französisch, englisch, deutsch und russisch.) Mn. (O.)

A. Cossa. Breve commemorazione di Giovanni Codazza. Atti di Torino XIII. 25-33.

Kurzer Bericht über Codazza's Leben und Werke. G. Codazza ist geboren am 15. Mai 1816 zu Mailand, wurde 1837 Assistent und 1842 Professor zu Pavia, 1863 am Potytechnicum zu Mailand und 1867 zu Turin. Am Schluss findet sich ein Verzeichniss der Schriften Codazza's. O.

L. Cremona, E. Beltrami. Domenico Chelini. Battaglini G. XVI. 345.

Kurzer Nachruf. O.

Hermann Grassmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten. Clebsch Ann. XIV. 1-46.

F. Junghans. Hermann Grassmann. Ein Nekrolog. Neue Stett. Z. 1877. 17. XI., Hoffmann Z. IX. 167-169, 250-253, Schlömilch Z. XXXIII. Hl. A. 69-75.

V. Schlegel. Hermann Grassmann. Sein Leben und seine Werke. Leipzig. Brockhaus.

Verfasser der erst citirten Arbeit sind die Herren R. Sturm, E. Schröder und L. Sohncke. Hermann Günther Grassmann, geb. am 15. April 1809 zu Stettin als Sohn des Professors der Mathematik J. G. Grassmann, studirte, nachdem er das Gymna-

sium seiner Vaterstadt absolvirt, in Berlin Theologie, war dann theils in Berlin, theils in Stettin als Lehrer thätig, bis er als Nachfolger seines Vaters Professor der Mathematik am Marienstift-Gymnasium in Stettin wurde. Als solcher starb er am 26. September 1877. Alle drei Arbeiten enthalten eine Lebensbeschreibung des Verstorbenen, die von Junghans in kürzerer Form. Die erste und dritte dagegen geben in eingehender Weise ein Lebensbild Grassmann's und gehen näher auf seine mathematischen Werke ein. Die Arbeit von Schlegel thut dies in allgemeineren und allgemein verständlichen Umrissen und berücksichtigt auch die philologischen Leistungen Grassmann's eingehender, wie sie überhaupt ein Lebensbild des Mannes geben will, der sich auf philologischem, wie auf mathematischem Gebiete den Ruhm eines hervorragenden Gelehrten erworben hat. Die erste Arbeit geht speciell in seine mathematischen und physikalischen Arbeiten ein und ist für ein Publikum von Fachgenossen bestimmt. Sie schildert dabei speciell die Grundlagen der Grassmann eigenthümlichen Ausdehnungslehre und ihren Zusammenhang mit den früheren und späteren Leistungen anderer Gelehrter. Auch auf die andern Grassmann'schen mathematischen und physikalischen Arbeiten geht sie näher ein. Dieser Arbeit sowohl, wie der von Schlegel ist ein Verzeichniss der Grassmann'schen Arbeiten angefügt. O.

A. Favaro. Della vita e degli scritti fisico-matematici di Ermanno Grassmann. Boncompagni Bull. XI. 699-756.

Schilderung des Lebens und der Werke Grassmann's, zum Theil auf Grund der obigen Arbeiten. Besonders eingehend wird die Ausdehnungslehre behandelt. O.

B. Delbrück. Hermann Grassmann. Augsb. Allgem. Z. 18. X. 1877.

Schilderung, namentlich der philologischen Verdienste Grassmann's. O.

A. Somoff. Nécrologie de Joseph Ivanowitsch Somoff. Traduit du Russe par M. J. Hoüel. Boncompagni Bull. XI. 453-459.

B. Boncompagni. Catalogo dei lavori del Prof. G. J. Somoff. Boncompagni Bull. XI. 460-481.

B. Boncompagni. Intorno ad una lettera del Prof. G. J. Somoff. Boncompagni Bull. XI. 482-483.

Lettera del Prof. G. J. Somoff a D. B. Boncompagni. Boncompagni Bull. XI. 484-486.

Joseph Ivanowitsch Somoff ist geboren am 1/13ten Juni 1815 im Dorfe Oktrada im Gouvernement Moskau. Seine Eltern hatten ihn eigentlich für die Marine bestimmt, er aber zog es vor, sich der Mathematik zu widmen. Er studirte in Moskau, war dann einige Jahre hindurch Lehrer an verschiedenen Anstalten, bis er 1841 an die Universität in Petersburg berufen wurde, der er bis zum Anfang des letzten Jahres seines Lebens angehörte. Er starb am 25. April (7. Mai) 1876. Der erst citirte Aufsatz schildert seine Wirksamkeit als Lehrer wie als Gelehrter, ohne indess in grössere Details derselben einzutreten. Der Brief an den Fürsten Boncompagni bezieht sich auf die Auffindung der Correspondenz Lagrange's an Euler, die in Boncompagni's Bull. 1877 veröffentlicht ist. Die vorhergehenden Bemerkungen geben nähere Daten über diesen Brief. O.

F. Folie. Notice sur M. Gloesener. Ann. de Belg. XLIV. 277-364.

Michel Gloesener, geb. 3ten März 1794 zu Haut Charage im Grossherzogthum Luxemburg, gest. am 11. Juli 1876 zu Lüttich, war nach einander Lector (1824) und Professor (1825) an der Universität zu Löwen, Professor an der Universität zu Lüttich (1830-1861), wurde 1856 correspondirendes und 1864 ordentliches Mitglied der Brüsseler Akademie. Er hat zahlreiche Abhandlungen theils mathematische, theils und zwar dem grösseren Theile nach, elektrische Fragen betreffend, in verschiedenen Zeitschriften ver-

öffentlicht. Gloesener ist es, dem man das Princip der Apparate für die abwechselnde Umkehrung des Stromes in telegraphischen Linien verdankt, wie er überhaupt eine ganze Anzahl von elektrischen Apparaten erfunden hat. Auch hat er einen: Traité général des applications de l'électricité (Paris et Liége 1861), geschrieben, von dem indess nur ein Band erschienen ist.

Mn. (O.)

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

G. Bellavitis. Seconda e terza parte della quattordicesima rivista dei giornali. Atti d. Ist. Ven. (5) IV. 247-278, 357-388, 1069-1081, 1099-1121.

Fortsetzung der Uebersichten, über welche in früheren Jahrgängen berichtet worden ist. Die vorliegenden Abtheilungen enthalten im obigen Theil sehr eingehende Berichte aus dem Gebiete der Algebra, Functionentheorie und Geometrie von Lucas, Garbieri, Réalis, Bellavitis, Cassani, Azzarelli, Veronese, Laguerre, Sondat, Gambey, Glaisher, Laisant aus den Jahren 1876 u. 1877, über die seiner Zeit im Jahrbuch berichtet worden ist.

O.

A. Favaro. La storia delle matematiche nella università di Padova. Lettera a D. B. Boncompagni. Boncompagni Bull. XI. 799-801.

Der Verfasser theilt dem Fürsten Boncompagni mit, dass er in Padua versuchen werde, eine Vorlesung über die Geschichte der Mathematik zu halten. Er entwickelt die leitenden Gesichtspunkte, denen er dabei folgen werde, und bespricht die Vortheile, die er für das Studium der Mathematik von einer solchen Vorlesung erhofft.

O.

A. Favaro. Statistica degli scienzati vissuti nei due ultimi secoli. Padova. G. B. Randi.

C. J. GERHARDT. Geschichte der Mathematik in Deutschland. München. Oldenbourg 1877.

Die vorliegende Geschichte der Mathematik in Deutschland bildet den siebzehnten Band der, von der historischen Commission der Königlichen Akademie der Wissenschaften in München herausgegebenen Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Der Verfasser spricht in der Vorrede aus, dass er die Absicht gehabt habe, die Geschichte der Mathematik auf dem Hintergrunde der allgemeinen deutschen Culturgeschichte zu zeichnen, dass er aber aus inneren und äusseren Gründen auf die Durchführung dieses Planes habe verzichten müssen. Es ist im hohen Grade zu bedauern, dass der Verfasser nicht wenigstens versucht hat, diesen Plan durchzuführen; er giebt damit zugleich den Gesichtspunkt an, von dem aus sein Buch zu beurtheilen ist. Es kann kein wirkliches Bild der Entwickelung einer einzelnen Wissenschaft entstehen, wenn es nicht im Zusammenhang mit der allgemeinen Culturentwickelung geschieht. Denn eine Wissenschaft und sei sie noch so abgeschlossen, entwickelt sich nicht völlig in sich und aus sich heraus, sondern nur in Wechselwirkung mit den Bestrebungen und Forschungen in angrenzenden Gebieten und den Strömungen des allgemeinen Lebens. Demgemäss findet man denn auch in dem vorliegenden Werke mehr eine Schilderung der Leistungen einzelner hervorragender Männer und eine Uebersicht über die Behandlung besonders hervortretender Probleme, als eine wirkliche Darstellung der geschichtlichen Entwickelung der Mathematik.

Nach einer kurzen Einleitung, in der der Einwirkung Gerbert's gedacht wird, bespricht der Verfasser zunächst die ersten Anfänge mathematischer Studien auf der Wiener Hochschule unter Johann von Gmunden, Georg von Peuerbach, um sich sodann zu Regiomontan und seinen Nachfolgern Johann Werner (siehe p. 32) und Albrecht Dürer zu wenden. Dann folgt eine Besprechung der hervorragendsten Rechenbücher zu Anfang des 16ten Jahrhunderts. Das erste Lehrbuch der Algebra stammt von Christoff Rudolff von Jena, dem dann eine Schilderung des In-

halts der Arithmetica integra von Stifel folgt. Im Weiteren werden dann Jost Bürgi, Nicolaus Reymers besprochen. Der zweite Theil dieses Buches bringt dann eine Uebersicht der Leistungen in der Trigonometrie und der Herstellung trigonometrischer Tafeln, wobei denn Kepler in hervorragender Weise Berücksichtigung findet; namentlich wird sein Einfluss auf die Entwickelung der Logarithmentafeln eingehend besprochen. Daran schliesst sich eine Besprechung der Leistungen von Benjamin Ursinus, Crüger auf diesem Gebiete und endlich Guldin. Das zweite Buch (p. 139-206) behandelt die Zeit von der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Hier ist zunächst Leibniz, der mit seiner Erfindung der Differentialrechnung in den Vordergrund tritt. Sein Leben, der Einfluss seiner Arbeiten und der Streit mit Newton nehmen über die Hälfte dieses Buches in Anspruch. Darnach folgt Ehrenfried Walther von Tschirnhaus mit seinen Arbeiten (p. 186-191). Zum Schluss werden noch Christian Wolf, Abraham Gotthelf Kästner, Johann Heinrich Lambert, Johann Friedrich Pfaff, Carl Friedrich Hindenburg, Eschenbach und Rothe, sowie der verderbliche Einfluss der combinatorischen Schule auf die Entwickelung der Mathematik in Deutschland besprochen. Das dritte Buch (p. 207-307) umfasst die Zeit vom Anfang bis zur Mitte des neunzehnten Jahrhunderts. Hier werden die bedeutendsten Männer nach ihrem Einfluss und ihren Leistungen nach einander geschildert. Es sind Gauss, Jacobi, Abel, Dirichlet, Monge, Carnot, Poncelet, Möbius, Plücker und Steiner. Damit schliesst das Buch, auf dessen Einzelheiten näher einzugehen, der hier gestattete Raum verbietet.

Eine Recension desselben findet sich Darboux Bull. (2) II. 201-206. O.

P. Tannery. Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe. Mém. de Bord. (2) II. 277-283.

Der Verfasser giebt zunächst die Lösung des Problems durch Archytas in analytisch-geometrischer Form als Schnitt der

3 Flächen

$$x^2+y^2 = ax, \quad x^2+y^2+z^2 = a\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+z^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2.$$

Aus dieser leitet er dann eine andere analytisch-geometrische Lösung ab, von welcher er glaubt, dass sie, nach den historischen Notizen, die des Eudoxus gewesen sein könne.

O.

M. Cantor. I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Lodovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia comprendenti le soluzioni de' quesiti dall' una e dall' altra parte proposti raccolti, autografati e pubblicati da Enrico Giordani, Bolognese. Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui cartelli medesimi estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. Silvestro Gherardi. Milano 1876. Boncompagni Bull. XI. 177-196.

Uebersetzung des Artikels von M. Cantor in Schlömilch Z. XXV. Hl. A. 133-150, der im vorigen Bande des Jahrbuchs p. 20 besprochen worden ist. O.

A. Desboves. Sur un point de l'histoire des mathématiques. C. R. LXXXVII. 925.

In früheren Arbeiten hatte der Verfasser Formeln zur Lösung einer biquadratischen Gleichung Lebesgue zugeschrieben. Er hat jetzt dieselben in Lagrange, „Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante“, Oeuvres T. IV. p. 395 gefunden.

O.

F. J. Studnička. A. Cauchy als formaler Begründer der Determinantentheorie. Prag. Abh. (6) VIII.

Siehe F. d. M. IX. p. 21. O.

O. Z. BIANCO. Sopra due passi della storia della teoria matematica delle probabilità del Signor Todhunter. Battaglini G. XVI. 26-30.

Der Verfasser knüpft an zwei Stellen des citirten Werkes von Todhunter an und sucht aus Stellen der Werke von Pacioli, Tartaglia und Peverone nachzuweisen, dass diese sich schon mit Fragen der Wahrscheinlichkeit beschäftigt haben. Der Erfolg war freilich gering, aber es gelingt dem Verfasser doch wenigstens, die Priorität für die Behandlung derartiger Fragen italienischen Mathematikern zuschreiben zu können. O.

GUSTAF ENESTRÖM. Differenskalkylens Historia. I. Upsala. Univ. Årsskr. I.

Im ersten Capitel giebt der Verfasser eine Schilderung der Vorarbeiten zu der Entdeckung des Differenz-Calculs. Im zweiten Capitel werden die Arbeiten und Entdeckungen Taylor's ausführlich auseinander gesetzt. Der Verfasser ist der Meinung, dass die Verdienste, welche Taylor sich um den Differenz-Calcul erworben hat, viel grösser sind, als man im allgemeinen zu glauben scheint. M. L.

E. CATALAN. Quelques quadrateurs. N. C. M. IV. 53-58.

Bericht über einige Quadraturen des Kreises, der Mehrzahl nach ziemlich neuen Datums. Referent führt zwei der gefundenen Werthe an:

$$\pi = 3{,}15, \quad \pi = 2(1+\cos 54^{\circ}) = 3{,}17557\ldots.$$

Mn. (O.)

A. WITTSTEIN. Zur Geschichte des Malfatti'schen Problems. Nördlingen. Beck.

Ergänzung der Arbeit, die in diesem Jahrbuch Bd. III. p. 12 besprochen ist. Im Verlaufe derselben schildert der Verfasser den Inhalt der Arbeiten von Lechmütz, Adams, Cayley und be-

spricht im zweiten Theile die seit 1871 erschienenen Arbeiten über dies Problem. O.

W. LAVIČKA. Geschichte der descriptiven Geometrie. Casopis VII. (Böhmisch.)

Eine kurzgefasste Entwickelungsgeschichte dieser Disciplin mit besonderer Berücksichtigung ihrer Pflege am Prager Polytechnikum. Std.

R. BALTZER. Zur Geschichte des Potentials. Borchardt J. LXXXVI. 213-216.

Die einfachen mechanischen Begriffe, Kraft eines Agens, lebendige Kraft einer bewegten Masse, Arbeit eines Agens, elementare Arbeit oder virtuelles Moment, werden kurz erläutert, mit Angabe des Autors, der diese Begriffe eingeführt, zum Theil auch mit Angabe von Belegstellen. Daran schliesst sich, abgesehen von dem weniger gebräuchlichen Begriff der Action eines Agens (Product aus Geschwindigkeit, Masse und Tangentialbeschleunigung), der Begriff des Potentials und der Niveauflächen. Aus der Potentialtheorie werden, nachdem hervorgehoben ist, dass der Begriff Potential von Lagrange herrührt, die Arbeiten von Laplace, Legendre, Poisson, Green, Gauss, sowie die Vorlesungen von Dirichlet citirt.

Neue historische Thatsachen oder neue Gesichtspunkte bringt die Arbeit nicht bei. Wn.

A. MAYER. Storia del principio della minima azione. Traduzione dal tedesco di G. B. Biadego. Boncompagni Bull. XI. 155-166.

Uebersetzung der Arbeit, über die im vorigen Bande p. 23-24 berichtet worden ist. O.

E. GERLAND. Zur Geschichte der Erfindung der Pendeluhr. Pogg. Ann (2) IV. 585-613.

Ueber die Priorität der Erfindung der Pendeluhr sind in den letzten Jahren verschiedene Arbeiten erschienen, über die auch seiner Zeit in diesem Jahrbuch berichtet ist. Während früher, namentlich gestützt auf E. Albérie (den Herausgeber der gesammelten Werke Galilei's) und C. v. Gebler Galilei für den ersten Erfinder derselben galt, haben neuerdings J. H. van Swinden und S. Günther die Priorität der Erfindung Huygens zugeschrieben, und in letzter Zeit wurde von R. Wolf Bürgi als dritter Bewerber um diesen Ruhm aufgestellt. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit unterzieht die Frage nochmals einer gründlichen Prüfung. Er weist durch Prüfung der Aktenstücke der Casseler Sammlung zunächst nach, dass Bürgi diese Erfindung nicht zuzurechnen sei, da das Pendel an Bürgi's Planetenuhr in Cassel erst später an demselben angebracht sei. Sodann unterzieht er die Ansprüche Galilei's und Huygens' einer Prüfung. Er kommt dabei zu dem Resultate, dass Galilei die Pendeluhr schon im Jahre 1641 erfunden hat, Huygens dagegen erst 1656, aber ohne von Galilei's Erfindung etwas zu wissen. Galilei's Apparat blieb aber in Folge der gegen seine Ansichten eingeleiteten Verfolgung lange unbekannt, und fand niemals Verwendung, während der von Huygens construirte Apparat sich schnell Beifall und Verbreitung erwarb. Die erste Erfindung wäre sonach Galilei zuzuschreiben. O.

Ph. Gilbert. Étude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Ann. Soc. S. Brux. II. B. 255-350.

Diese wichtige Arbeit enthält eine kritische Analyse der hauptsächlichsten Arbeiten über die Frage, indem sie dabei die ersten Grundzüge der Theorie bei ihrem Beginn, die Schriften über die Präcession der Nachtgleichen und diejenigen bei Seite lässt, welche sich auf cylindrisch-conische Geschosse beziehen. § 1. D'Alembert, Euler, Lagrange, Legendre, Poisson, Poinsot, Gascheau, Saint-Guilheam, Folie. Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass die berühmten Arbeiten Poinsot's über die Rotation

der Körper, vom Gesichtspunkte mechanischer Principien aus betrachtet, keineswegs streng sind. § 2. 1) Arbeiten, die unabhängig von der Poinsot'schen Theorie ihren Ausgangspunkt in der Arbeit von Rueb haben. Rueb, Jacobi, Somoff, Güdermann, Weierstrass, Richelot. 2) Abhandlungen, in denen die Poinsot'sche Theorie auf die von Rueb und Jacobi zurückgeführt ist: Sylvester, Radau, Dieu, Chelini, Siacci. § 3. Kreisel: Apparat von Bohnenberger, Gyroscop von Foucault, Apparate von Fessel und Plücker, Magnus, Robert, Sire. Elementare Erläuterungen der beobachteten Bewegungen durch kinematische Betrachtungen: Sire, Hirn, Heynen, Jouffret. Mangel dieser Erläuterungen. § 4. Analytische Theorien desselben Gegenstandes: Poisson, Puiseux, Résal, Heynen, Somoff, Lottner. § 5. Analyse der Untersuchungen, in denen die beim Gyroscop beobachteten Erscheinungen unter Einfluss der Erdrotation betrachtet werden: Lamarle, Quet, Résal, Bertrand (nicht streng), Yvon Villarceau, Lottner (falsch), Bour. § 6. Bibliographie; eine Liste zahlreiche Abhandlungen, wie die von Brill und Hermite, enthaltend, die vom Verfasser nicht näher besprochen sind. Mn. (O.)

F. Siacci. Étude historique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe par Ph. Gilbert. Boncompagni Bull. XI. 217.

Kurze Besprechung der Arbeit, über die oben referirt worden ist. O.

H. Gyldén. Die Grundlehren der Astronomie nach ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. Deutsche, vom Verfasser besorgte und erweiterte Ausgabe. Leipzig. Engelmann. 1877.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

M. Th. H. Martin. Mémoire sur les hypothèses astronomiques des plus anciens philosophes de la Grèce. Mém. de l'Acc. Inscript. XXIV.

W. Roudolf. Das aristotelisch-ptolemäische Weltsystem als Abschluss der älteren kosmischen Systeme. Pr. Neuss.

Eine kurze Darstellung der kosmischen Ideen des Aristoteles und Ptolemäus, in der bei letzterem betont wird, dass er selbst sein Weltsystem nur als Hypothese zur Grundlage seiner Rechnungen aufgestellt habe, sich aber wohl bewusst gewesen sei, dass es eben nur eine Hypothese sei.

O.

C. Isenkrahe. Isaac Newton und die Gegner der Gravitationstheorie unter den modernen Naturphilosophen. Pr. Crefeld.

Das Vorliegende ist der erste Theil einer Abhandlung, dessen zweiter Theil, der namentlich mathematischen Inhalts sein wird, einen Versuch enthalten soll, die Gravitationstheorie auf rein kinetischer Grundlage, ohne Benutzung irgend welcher centraler Kräfte zu lösen. Der erste Theil ist kritischen Inhalts. Er stellt zunächst Newton's Ansicht über das Wesen der Gravitation aus dessen Schriften fest und wendet sich sodann zu einer Beleuchtung der neueren Theorien. Zunächst wird die Weber-Zöllner'sche Theorie einer eingehenden Beleuchtung unterworfen und die Mängel derselben besprochen. Dann folgen der Reihe nach die von Spiller, Dellingshausen, W. Thomson, Lesage, H. Schramm, welche sämmtlich ihrer formalen Grundlage nach geprüft werden.

O.

S. Günther. Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. Heft III.: Aeltere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung des Erdschwerpunkts durch Wassermassen. Heft IV.: Analyse einiger kosmographischer Codices der Münchener Hof- und Staatsbibliothek. Heft V.:

Johann Werner aus Nürnberg und seine Beziehungen zur mathematischen und physischen Erdkunde.
Halle a. S. Nebert.

Im ersten der oben citirten drei Hefte stellt sich der Verfasser die Aufgabe, den theoretischen Beweggründen der Lehre nachzugehen, nach welcher die grossen über die ganze Oberfläche der Erde vertheilten Quantitäten tropfbarer Flüssigkeit die Kraft haben sollten, den wahren Erdschwerpunkt für immer oder doch für länger anhaltende Zeiträume von dem rein mathematisch definirten Mittelpunkte entfernen zu können. Der Verfasser beginnt seine Untersuchung mit Aristoteles, verweilt dann längere Zeit beim Mittelalter, wo er besonders den Ansichten Dante Alighieri's seine Aufmerksamkeit zuwendet, und bespricht dann die neue Zeit. Hier sind es namentlich Lamarck, Adhémar, Croll, Pillar, Schmock u. s. f., deren Ansichten er in eingehender Weise bespricht. Von mathematischem Interesse ist die p. 195 bis 197 angestellte Berechnung der Grösse der Schwerpunktsversetzung durch zwei nach den Polen angebrachte Eisparaboloide. Das zweite Heft giebt Auskunft über den Inhalt zweier Codices, deren einer den Titel: „De IV ventis cardinalibus, de planetis, de terra, de signis coelestibus, de zonis cum figura mundi etc.“ trägt. Der zweite rührt von Theodoricus Ruffi aus den Jahren 1445 bis 1450 her und enthält eine ganze Reihe von einzelnen Abhandlungen, von denen einige auch specifisch-mathematisches Interesse darbieten. Das dritte Heft enthält eine Monographie über Johann Werner aus Nürnberg, welcher am 14. Februar 1468 zu Nürnberg geboren wurde, dort als Prediger lebte und wirkte. Werner hat sich durch mancherlei Untersuchungen mathematischen Inhalts bekannt gemacht, so durch seine Abhandlung über die Curven zweiter Ordnung, eine Arbeit über das Delische Problem u. s. f. Diese werden nur kurz berührt. Näher eingegangen wird auf seine Arbeiten geographischen Inhalts, und da ist vornehmlich der Abschnitt über Werner's: „Libellus Joannis Verneri Nurenbergensis de quatuor aliis planis terrarum orbis descriptionibus“ zu nennen, welcher eine eingehende Enthüllung der Leistungen Werner's auf dem Gebiete der Kartenprojection giebt. Der

Verfasser giebt am Schluss dieses Abschnitts eine Zusammenstellung der Leistungen Werner's, welche in Folgendem noch kurz wiedergegeben werden mag. Er hat 1) auf die Methode der Polhöhenbestimmung aus der oberen und unteren Culmination eines Circumpolarsternes aufmerksam gemacht. 2) Das Problem der Meereslänge hat er durch sein Drängen auf die Bestimmung der Entfernung des Mondes von gewissen Fundamentalsternen gefördert. 3) In die Kartographie hat seine Behandlung der herzförmigen Projection insofern einen Fortschritt gebracht, als er das Princip der äquivalenten Abbildung zur Geltung brachte. 4) Für die stereographische Projection verlegte er das Centrum in einen beliebigen Punkt der abzubildenden Kugelfläche. 5) Er hat die Lösung der Probleme: Aus den sphärischen Coordinaten zweier Punkte der Kugel deren Bogenleitung zu ermitteln, wesentlich verbessert. 6) Ebenso hat das umgekehrte Problem durch ihn eine wesentliche Förderung erfahren. Den Schluss dieser Abhandlung bildet ein Bericht über Werner's meteorologische Beobachtungen. O.

Capitel 2.

Philosophie.

A. J. Ellis. Contraposition. Educ. Times XXIX. 34-35.

Folgt eine Thesis aus einer Hypothesis, so folgt die Negation der Hypothesis aus der Negation der Thesis. Diese Transformation des Schlusses heisst Contraposition. Sie lässt sich ebenso rückgängig vollziehen. Das letztere hat jemand für unbeweisbar erklärt. Der Verfasser räumt ein, dass es Kindern Schwierigkeit machte. Er stellt zu äusserster Deutlichkeit die Tabelle der Combinationen der Assertionen und Negationen von Hypothesis und Thesis auf, und zeigt daran die Richtigkeit der Contraposition sowie ihren Unterschied von der Umkehrung, welche sich nicht folgern lässt. H.

J. Gilles. Die Grundlagen der Mathematik. Bayr. Bl. XVIII. 423-433.

„Die absolute oder nichteuklidische Geometrie, die Geometrie des endlichen Raumes und die Lehre von n Raumdimensionen sind entweder Karrikaturen oder Krankheitserscheinungen der Mathematik“. — „Wie Gauss die Anregung zur absoluten Geometrie gegeben hat, so hat Kant die Lehre von den n Raumdimensionen veranlasst. ... Leider flüchten wir Epigonen, vom hellen Glanze der unsterblichen Werke der Meister geblendet, uns so gerne in jene Schatten“. Diese Sätze dürften genügen, um den die Abhandlung durchwehenden Geist zu kennzeichnen, welche übrigens wesentlich eine Polemik gegen die bekannten Schriften von Frischauf und Rudel repräsentirt. Gr.

H. McColl. Calculus of equivalent statements. Proc. L. M. S. IX. 9-20.

Die höchst interessanten und vom Verfasser in der Educational Times zuerst unter dem Namen „symbolical language“ angefangenen Untersuchungen stehen in Verbindung mit den Bestrebungen, logische Operationen in mathematischer Bezeichnung und durch mathematische Berechnung wiederzugeben. Die Untersuchungen sind zwar von dem Verfasser ganz selbständig geführt, — er sagt selbst, dass er Boole's mathematical analysis of logic und desselben Verfassers laws of thought nicht gekannt hat, — verbinden sich aber mit Boole's mathematischer Logik auf's Leichteste. In Deutschland sind die Versuche noch viel zu wenig bekannt. Wundt's neues logisches Werk, in dem sie gebührend Erwähnung finden, wird hoffentlich dazu beitragen, sie bei uns einem weiteren Kreise von Gelehrten zuzuführen. Der Verfasser versucht in diesem grundlegenden Aufsatze zunächst die Feststellung einer geeigneten Bezeichnung für Bejahung, Verneinung, Einschliessung, Position, Negation etc.; sodann wendet er die gefundenen Formeln, Definitionen und Sätze auf zwei mathematische Probleme an, nämlich erstens auf die Bestimmung der neuen Grenzen der Integration, wenn man die Ordnung der In-

tegration in einem vielfachen Integral ändert, und zweitens auf Fragen, die Wahrscheinlichkeit betreffend. Er löst 1) die Aufgabe, die Grenzen der Integration zu finden, wenn die Ordnung des Integrals

$$\int_{-a}^{2a} du \int_{-u}^{2u} dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{-2x}^{\frac{y^2}{2x}} dz\, \varphi(u, x, y, z)$$

umgekehrt wird. Das umgeformte Integral wird:

$$\int_{0}^{z_3} dz \int_{y_4}^{y_3} dy \int_{x_1}^{x_4} dx \int_{u_4}^{u_3} du\, \varphi(u, x, y, z).$$

2) Hierauf berechnet der Verfasser die Wahrscheinlichkeit, dass die Wurzeln der Gleichung

$$x\theta^2 - y\theta + z = 0$$

reell sind, wenn die Werthe von x, y, z zwischen den Grenzen a und 0 *liegen* und alle Werthe für x, y, z zwischen diesen Grenzen *gleich* wahrscheinlich sind. Das Resultat ergiebt:

$$\tfrac{5}{36} + \tfrac{1}{6} \log_e 2.$$

Mi.

H. McColl. The calculus of equivalent statements. (Second paper). Proc. L. M. S. IX. 177.

Der Verfasser setzt in diesem Artikel seine Untersuchungen im Gebiete der mathematischen Logik fort. Um die logische Einschliessung zu bezeichnen, verwendet er hier das Divisionszeichen; $A:B$ heisst: A schliesst B ein, und ist gleichbedeutend mit $A = AB$. Er löst mit Hilfe der sich daraus ergebenden Formeln und Sätze einige logische Fragen, die schon Boole berührt hatte. Durch eine Bemerkung seines Recensenten in der Mathematical Society veranlasst, führt er im Laufe der Untersuchung noch die neue Bezeichnung: $A \div B$ für A schliesst nicht B ein, welches gleichbedeutend ist mit $(A:B)'$. Es lassen sich so die Syllogismen auf's Einfachste wiedergeben und berechnen. Alle X sind Y, wird mit $x:y$, kein X ist Y mit $x:y'$. Einige X sind Y, mit $x \div y'$ und Einige X sind nicht Y, mit $x \div y$ bezeichnet. Zum Schluss löst der Verfasser noch die von Boole ge-

stellte (und durch die Formel $f(1)\,f(0) = 0$ erledigte) Eliminationsaufgabe durch die Formeln: $f(0)\varphi'(0):x$, $f(x)\varphi'(1):x'$.

Mi.

L. CLARIANA Y RICART. Nociones de filosofia matematica. Cron. cient. I. 481-487, 505-511.

L. CLARIANA Y RICART. Leves apuntes acerca del infinito matematico. Cron. cient. I. 313-317.

L. CLARIANA Y RICART. Importancia del metodo Leibniziano. Cron. cient. I. 169-171.

K. H. LIERSEMANN. $0\varepsilon 1 \infty \Theta$. Pr. Reichenbach in Schl.

Der Verfasser veröffentlicht unter diesem wunderlichen Titel seine Untersuchungen über den Begriff des Unendlich-Kleinen und Unendlich-Grossen in der Mathematik. Von Beispielen ausgehend (§ 2 und 3), die die Schwierigkeit in der Anwendung dieser Begriffe zeigen sollen, findet er selbst die Lösung in der Aufstellung und Begründung folgender Definitionen und Behauptungen (§ 4 und 5): Null ist eine Differenz, deren Glieder gleich sind. Eine Zahl, welche sich der Grenze Null unausgesetzt nähert, ohne sie je zu erreichen, nennt man eine unendlich kleine Zahl. Eine Zahl, welche man sich unausgesetzt wachsend vorstellt, nennt man unendlich gross. Für die unendlich kleine Zahl ist das Zeichen ε, für die unendlich grosse Zahl ∞. Es ist wesentlich, dass man an der unendlich kleinen und unendlich grossen Zahl das Werden festhält; ε und ∞ sind fluent, variabel. Der Grenzwerth von ε ist 0; 0 ist constant; $0 = \lim \varepsilon$. Wie es aber einen Grenzwerth von ε giebt, so nähert sich auch ∞ einem constanten Werth. Der constante Werth, dem sich eine unausgesetzt und über alles Mass hinaus wachsende Grösse nähert, ist Θ; Θ ist, wie 0 weder positiv noch negativ oder, wenn man

lieber will, sowohl positiv als negativ. Somit ist das ganze Zahlengebiet, das unserm Nachforschen sich darbietet, bezeichnet durch die Symbole $0\,\varepsilon\,1\,\infty\,\Theta$; „$\Theta$, das unveränderliche, producirt aus dem 0 das 1. Dieses kann entweder constant bleiben, oder sich in unendlicher Perfectibilität dem Θ unbeschränkt nähern, oder in einer dem Θ abgewendeten Richtung ebenso ohne Ende dem 0 zustreben. Aber wie es im ersteren Falle von seinem Ziele immer noch durch einen unermesslichen Zwischenraum getrennt bleibt, ist es im entgegengesetzten ebenfalls durch eine nicht zu überwindende Kluft davor behütet, in das 0 zu versinken. D.O.M.G." — Dies in Kürze der Gedankengang des Verfassers. Es wird hier schwerlich der Ort zu einer umfangreichen Widerlegung sein. Aber das möchte der Referent wenigstens constatiren, dass er weder das Resultat des Verfassers in Bezug auf Θ acceptiren kann, noch die überall in der Schrift gepriesene Schärfe der Logik wirklich vorgefunden hat. Im Gegentheil! Und hierfür zwei herausgegriffene Beispiele: 1) Den Begriff eines constanten Θ erhält der Verfasser an der geraden Linie. Er betrachtet einen rechten Winkel A und auf dem einen Schenkel desselben einen Punkt C; von C ist eine Gerade nach einem Punkte V des anderen Schenkels gezogen. Wird nun VC mit constanter Winkelgeschwindigkeit um C geschwenkt, so wachsen die Entfernungen AV beständig; da aber CV einmal in die Lage CR kommen muss, in der R so bestimmt ist, dass er auf der Rückverlängerung von AV liegt, muss der Strahl CV auch einmal den Strahl AV verlassen. Hieraus ergiebt sich dem Verfasser, dass CV den Strahl AV „bei *einer*, bei einer *bestimmten* Lage" verlässt und somit ist Θ gefunden. Mir will nur einleuchten, dass mit AV auch CV in's Unendliche wächst, und somit auf diesem Wege für die Vorstellung eben keine Lage fassbar ist, wo CV AV verlässt. Es folgt hieraus nur, dass die vorgeschlagene Vorstellungsweise um die parallele Lage von CV und AV hervorzurufen ungeeignet ist. In der That „läuft (für mich, um des Verfassers eigne Worte zu gebrauchen) derjenige, der eine Grenze für das über alles endliche Mass hinaus Wachsende zu denken wagt, Gefahr, des gesunden Menschenverstandes baar gescholten

zu werden“. Nur meine ich, dass kein Wagniss, sondern nur Irrthum dabei ist. 2) Der Verfasser greift die Definition: Null ist dasselbe wie Nichts, an. Er führt zwei Widerlegungen als besonders wissenschaftlich werthvoll an: *a)* Was die Null auf der obersten Stufe (Addition und Subtraction), dasselbe ist die Eins auf der zweiten Stufe (Multiplication und Division). *b)* Die Null kann geometrisch als eine Strecke oder auch eine Figur gezeichnet werden, indem ein Rechteck gleich Null ist, dessen eine Winkelseite Null ist und ein Polyeder mit seiner Höhe gleichzeitig Null ist. Dem Anfänger (fügt der Verfasser hinzu) kann man am leichtesten den Unterschied demonstriren, indem man daran erinnert, dass 70 Mark und 7 Mark nicht dasselbe sind. Die logische Schärfe dieses Beweises ist staunenswerth; weil $a - a = 0$, aber $\frac{a}{a} = 1$ ist, darum ist 0 nicht gleich Nichts. Weil der Flächeninhalt eines Rechtecks mit einem Paar Seiten, weil der cubische Inhalt eines Polyeders mit der Höhe gleich 0 wird, darum ist Null nicht gleich Nichts. Wer behauptet denn, dass das Rechteck, das Polyeder 0 wird? Nur sein Inhalt wird 0. Und endlich weil 70 Mark nicht gleich 7 Mark ist, also eine Ziffer an zweiter Stelle etwas anderes bedeutet als an erster, darum ist 0 nicht gleich Nichts. Oder glaubt etwa der Verfasser, dass der Begriff 0 zum Begriff 70 gehöre, und aus 7 die 70 machen könne? Mi.

J. Carbonnelle. Lois générales de l'univers; la réversion; la providence. R. Q. S. IV. 578-624.

Klare Erörterung der allgemeinen Gesetze der Welt: Constanz der Masse, Erhaltung der Energie, Streben der sichtbaren Energie, sich in vibrirende Energie zu transformiren. Aus dem letzten Gesetze folgt, dass die Welt einen Anfang gehabt hat und einem Endzustand entgegengeht. Kritische Beleuchtung der Theorie der Reversion von Ph. Breton (Mondes (2) XXXVIII. 566, 606, 643, 697, 742; s. F. d. M. VII. 31—32). Die Gesetze der Welt lassen die anfänglichen Lagen und Geschwindigkeiten der materiellen

Punkte unbestimmt. Daher kann Gott, ohne diese Gesetze zu stören und ohne Wunder den Lauf der Ereignisse ändern, denn er kann, wie Euler seinerzeit in den „Lettres à une Princesse d'Allemagne sur quelques subjects de physique et philosophie" (Petersburg 1768—72) bemerkt hat, von Anfang an Alles so geordnet haben, dass er zur rechten Zeit die Gebete seiner Geschöpfe erhören kann. Mn (O.)

W. Gosiewski. Ueber die Principien einer absoluten Theorie der materiellen Erscheinungen im Allgemeinen. Par. Denkschr. 1878. (Polnisch.).

Diese Schrift des geistreichen Verfassers ist ein Versuch, das ganze Gebiet der materiellen Erscheinungen in einer allgemeinen metageometrischen Theorie zusammenzufassen. Die Grundlage einer solchen Theorie bilden nach des Verfassers Meinung die Erklärungen des allgemeinen Seins, des Bewusstseins und der materiellen Erscheinung. Diese letzte wird als eine in stetiger Aenderung begriffene Materie erklärt, wenn man unter Materie das versteht, was aus der sinnlichen Anschauung der Ausdehnung folgt. Das allgemeine Sein wird als eine continuirliche, endliche, unbegrenzte, in sich selbst ohne Ursache bewegende Mannigfaltigkeit aufgefasst. Die mathematische Untersuchung einer solchen Mannigfaltigkeit ist aber der heutigen Wissenschaft gar nicht zugänglich. Der Verfasser beschränkt sich auf die von Riemann in seiner Schrift: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" erwähnte Mannigfaltigkeit, in welcher die Länge eines Linearelementes durch eine Wurzel $2m^{\text{ten}}$ Grades aus einem homogenen Differentialausdruck derselben Ordnung von n veränderlichen Grössen sich ausdrücken lässt. Die Anzahl der Dimensionen wird gleich 3 angenommen.

Der specielle Fall $m = 1$ unter Anwendung des Princips von Lagrange oder Gauss führt zu allgemeinen Gleichungen, die auf den (ebenen) Raum und die Zeit bezogen, die Gesetze der Bewegung und der Deformation materieller Körper ausdrücken. Dn.

DE SAINT-VENANT. De la constitution des atômes. Ann. Soc. Sc. Brux. II. B. 417-456, et supplément p. 1-39.

Entwickelung des Boscowich'schen Gedankens, dass die letzten Elemente der Körper mathematische Punkte sind, die auf einander mit einer Intensität wirken, die eine Function ihrer Entfernung von einander ist, oder besser, die mit Bewegungen begabt sind, deren Gesetz von den zweiten Derivirten dieser Entfernungen als Functionen der Zeit nach der Zeit abhängen. Nach dem Verfasser gestattet die Theorie der Elasticität von Navier, Poisson und Cauchy die Annahme einer continuirlichen Materie nicht. In dem Supplement beruft sich der Verfasser auf die Autorität einiger Philosophen zu Gunsten seines Systems und beantwortet die Einwendungen metaphysischer Art, die man demselben machen kann. Das Entstehen des Gedankens der Continuität setzt er dagegen nicht auseinander. Mn (O.)

FAVÉ. Les vibrations de la matière et les ondes de l'éther. C. R. LXXXVI. 92-97, 289-295.

Der Verfasser verfolgt die Consequenzen, die sich, unabhängig von mathematischen Berechnungen, aus dem Satz ergeben, dass die Wärme Bewegung, und die Temperatur eines Körpers Mass einer lebendigen Kraft ist. Diese Betrachtungen sind Fortsetzung früherer Untersuchungen (C. R. 1876—77). Der Verfasser beginnt mit der Untersuchung der Wellenbewegungen im Aether, die von den Schwingungen weissglühender Luftarten hervorgerufen werden, erörtert die Folgen, die eintreten müssen, falls solche Wellen sich mit den von der Sonne kommenden verwandten Wellen des Aethers treffen (Hindurchgehen, Absorption, Verstärkung der Schwingungsamplitude) und kommt so zu dem Satz, dass Emission und Absorption correlative Eigenschaften sind. Bei der Emission erzeugen die Schwingungen der Moleküle Aetherwellen, bei der Absorption vermehren die Aetherwellen die Amplitude der Schwingungen in den Molekülen der Materie. Er erklärt im Zusammenhang hiermit die Unterschiede in der

Absorptionsfähigkeit der Körper für die Wärme, die Entstehung und den Wechsel der Farbe fester Körper, die Durchsichtigkeit und Undurchsichtigkeit derselben und endlich die Phosphorescenz und Fluorescenz gewisser Körper. Mi.

J. Bertrand. Sur l'homogénéité dans les formules de physique. C. R. LXXXVI. 916-920.

Die Homogeneität der mathematischen und physikalischen Formeln besteht darin, dass man die Einheiten verändern kann, ohne dass die Formeln ihre Richtigkeit verlieren. Ist eine Formel ermittelt, so ist ihre Homogeneität selbstverständlich. Wo dagegen eine Formel noch nicht festgestellt und nur im Allgemeinen als Function bestimmter Grössen ermittelt ist, wird die Untersuchung der Bedingungen, die durch die Homogeneität a priori geboten werden, nützlich sein und unter Umständen zum einfachen und strengen Beweis eines physikalischen Gesetzes führen. Der Verfasser untersucht zwei Formeln in Bezug auf ihre Homogeneität:

1) In der Theorie der Elektricität wird

$$T = F(V_0, V, l, R, C, E).$$

Variirt man die Einheiten, so wird

$$\beta T = F\left(V\sqrt{\gamma}, V_0\sqrt{\gamma}, l\alpha, \frac{R}{\alpha}C, E\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Nach dem Gesetze der Homogeneität wird also:

$$T = \frac{l}{E}\varpi\left(\frac{V_0}{V}, lR, C\right).$$

Hieraus folgt, dass T mit R wächst und nicht proportional l sein kann, dass folglich ein Gesetz der Geschwindigkeit der Verbreitung, wie für das Licht und den Ton für die Elektricität nicht existiren kann. Vernachlässigt man die Induction des Stromes auf sich selbst, so ist T proportional R. Da ferner die Function ϖ R proportional ist, ist sie es auch Rl. Die erste Formel nimmt dann die Gestalt

$$T = \frac{l^2 R}{E} F\left(\frac{V_0}{V_1} C\right)$$

an. Hieraus ergiebt sich ein Gesetz, das W. Thomson schon aufgestellt, aber nicht streng bewiesen hatte.

2) Die zweite Formel betrifft das Problem der Abkühlung einer homogenen Kugel. Der Verfasser knüpft an die Theorie Fourier's an. Es ist

$$T = F(V,\ V_0,\ k,\ C,\ D,\ h,\ R).$$

Variirt man die Einheiten, so wird

$$T = F\left(\delta V,\ \delta V_0,\ \frac{k\gamma}{\delta\beta},\ \frac{h\gamma}{\alpha\beta\delta},\ \frac{C\alpha^3}{\beta^3\delta},\ \frac{D\beta^2\gamma}{\alpha^4},\ R\alpha\right).$$

Lässt man in der ersten Gleichung die Coefficienten k, C, D, h nur in der Beziehung $\frac{k}{CD}$ und $\frac{h}{k}$ zu, so wird dieselbe

$$T = F\left(V,\ V_0,\ \frac{k}{CD}\ \frac{h}{k},\ R\right).$$

Daraus erhält man:

$$\beta T = F\left(\delta V,\ \delta V_0,\ \frac{k}{CD}\ \frac{\alpha^2}{\beta},\ \frac{h}{k\alpha},\ R\alpha\right).$$

Hieraus ergiebt sich:

$$T = \frac{CDR^2}{k} F\left(\frac{V_0}{V},\ \frac{Rh}{k}\right).$$

Folglich kann man, falls das Gesetz ermittelt ist, welches T mit h verknüpft, die Form der Gleichung ermitteln, welche T mit R verbindet. Mi.

L. Houtain. Quelques réflexions sur l'enseignement supérieur. Mém. de Liège (2) VI.

Versuch einer Ordnung des gesammten Inhalts der Mathematik, der manche bemerkenswerthe Gedanken enthält. Kritisches über verschiedene Einzelnheiten in der Organisation des höheren Unterrichts in Belgien. Mn. (O.)

Erler. Ungleichungen. Hoffmann Z. IX. 261-266, 341-346.

Veranlassung, die Lehre von den Ungleichungen im Unterrichte zu behandeln, bieten namentlich die Determination von Aufgaben und die diophantischen Gleichungen. Es werden hier

anschliessend an die Addition, Multiplication und Potenzirung die Schlüsse aus der Grössenfolge der Data auf die der Resultate tabellarisch aufgestellt und bewiesen. H.

HEILERMANN. Bemerkungen über den algebraischen Unterricht. Hoffmann Z. IX. 185-186.

Es wird die Reihenfolge der Themata nach dem Gesichtspunkt der Einfachheit und Gründlichkeit kurz dargelegt.

H.

J. DIEKMANN. Ueber die Benutzung von Invarianten im Unterricht. Hoffmann Z. IX. 347-355, 417-425.

Der Verfasser befürwortet die Zuziehung der Invarianten in der Lehre von den Gleichungen zweiten Grades und den Kegelschnitten. Er erklärt zuerst ausführlich und leicht fasslich die Bedeutung der Discriminante, der Resultante und der Functionaldeterminante für den vorliegenden einfachen Fall, und entwickelt einige elementare Sätze über dieselben. Dann behandelt er die Auflösung der Systeme zweier Gleichungen, erst zweiten und ersten, dann beide zweiten Grades zwischen 2 Unbekannten, letztere aber nur unter der nicht ausgesprochenen Voraussetzung, dass die linearen Theile durch dieselbe lineare Substitution gleichzeitig weggehen. Dann folgt noch eine Anwendung auf Kegelschnitte. H.

ZIEGEL. Methode und Lehrplan des mathematischen Unterrichts an Progymnasien. Pr. Schwerin a. d. W.

Die Schrift kann nur ein pädagogisches Interesse beanspruchen. Der mathematische Unterricht ist dem Verfasser ein Mittel zur Zucht des Verstandes und zur Gewöhnung an klares, streng logisches Denken. Der Unterricht soll naturgemäss, d. h. er soll anschaulich, methodisch und concentrisch sein. Namentlich in den Anfangsgründen sollen concrete Gegenstände als Hilfsmittel angewandt werden. Dem wissenschaftlichen Unterricht soll in

der Quarta ein propädeutischer Unterricht zur Einführung in die gesammte Geometrie vorangeben. Die einzelnen Disciplinen der Mathematik sollen möglichst in Zusammenhang gebracht, und auch die Beziehungen derselben zu andern Wissenschaften nicht vernachlässigt werden. An diese allgemeinen Grundsätse schliesst der Verfasser eine grosse Anzahl von Detailvorschriften für den mathematischen Unterricht und seine einzelnen Disciplinen an, theilweise fussend auf Börner, Kallius, Kambly, Gandtner und Junghahn, Ruhsam, Bardey etc. Sehr viele seiner methodischen Regeln können auf allgemeinen Beifall Anspruch erheben, doch behält allen solchen Vorschriften gegenüber der Satz Recht, dass der geschulte Lehrer sie von selbst anwendet, der Neuling mehr durch die Praxis als von ihnen lernt; auch giebt der Verfasser selbst zu, dass es keine allein richtige Methode giebt, sondern dass überall die Individualität des Lehrers entscheidend sein muss. Der Lehrplan, den der Verfasser aufstellt, umfasst den mathematischen Unterricht von der Quarta bis zur Secunda.

Mi.

G. Beck. Zur Methodik des mathematischen Unterrichts.
Pr. Coburg.

Der Verfasser will eine Reihe von Bemerkungen über den mathematischen Unterricht, das Pensum der Quarta und Tertia betreffend, geben. Er giebt thatsächlich nach einigen einleitenden Worten, in denen er Selbstthätigkeit des Schülers und vollständige Beweise schon auf der untersten Stufe des Unterrichts fordert, nur drei geometrische Rechen-, und 10 elementare geometrische Constructionsaufgaben mit Angabe der Analyse und der rein geometrischen resp. algebraisch-geometrischen Auflösung. Weder die Aufgaben, noch die Lösungen enthalten etwas Neues; die Auflösung der dritten geometrischen Rechenaufgabe ist nicht einmal geschickt. Zum Schluss verlangt der Verfasser zur Anregung der Selbstthätigkeit des Schülers, besonders da, wo die Lage der Anstalt es erleichtert, praktische Feldmessübungen.

Mi.

W. PÖZL. Zum mathematischen Unterricht. Bayr. Bl. XVIII. 390-392.

Winke, Schüler auf begangene Fehler aufmerksam zu machen, wie wenn z. B. beim Logarithmenrechnen ein $\log\cos > 0$ herauskommt, u. s. w. Wir vermuthen, dass jeder denkende Lehrer solche hodegetische Fingerzeige, ganz ebenso wie den Hinweis auf die „dekadische Ergänzung" als etwas, sich von selbst Verstehendes betrachtet. Gr.

H. BROCARD, E. CATALAN, P. MANSION. (Sur) une (prétendue) incorrection de langage. N. C. M. IV. 242-247, 360-362.

Herr Brocard findet den Ausdruck: la parabole $y^2 = 2px$, incorrect, glaubt aber, dass man ihn anwenden dürfe, brevitatis causa; Herr Catalan hält den Ausdruck ebenfalls für incorrect und meint, man dürfe ihn auch nicht anwenden. Herr Mansion hält ihn für correct und meint, man müsse ihn anwenden, weil man in der analytischen Geometrie gezwungen ist, gleichzeitig reelle und imaginäre Werthe der Variabeln zu betrachten.

Mn. (O.)

A. P. DE LA MATA. Demostracion filosofica de la rectificacion de la circumferencia y quadratura del circulo. Cron. cient. I. 16-18, 61-64, 85-86, 134-137, 159-161, 180-183, 205-209.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen).

A. FAVARO. Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni. Modena. Società Tipografica.

Der Herr Verfasser giebt uns in diesem Buche eine zusammenhängende historisch-kritische Uebersicht über die Methoden der graphischen Auflösung der Gleichungen von Euklid bis zum Beginn des XVI. Jahrhunderts. Bekanntlich war viele Jahrhunderte hindurch die Geometrie viel weiter ausgebildet als die Algebra; daher war die geometrische Einkleidung arithmetischer Probleme und die graphische Auflösung der Gleichungen in früheren Zeiten von weit grösserer Bedeutung als jetzt. Erst im XVI. Jahrhundert erlaubten die grossartigen Fortschritte auf dem Felde der reinen Algebra, das geometrische Hülfsmittel bei Seite zu lassen; doch hörten selbstredend die Versuche, auf graphischem Wege Gleichungen zu lösen, damit nicht auf. Man muss über die Fülle der späteren, hierher gehörigen Arbeiten staunen, über welche uns Herr Favaro als „Anhang“ zu seinem Buche, auf 45 Seiten, eine höchst werthvolle, chronologisch geordnete und bis in die neueste Zeit fortgesetzte Uebersicht giebt. Die historische Darstellung beginnt der Herr Verfasser mit der Behand-

lung der quadratischen Gleichungen durch Euklid, schliesst daran die durch das Delische Problem hervorgerufenen Versuche, daran die Behandlung rationaler Dreiecke durch Pythagoras und Plato und erwähnt die 13. Aufgabe des V. Buches von Diophant's Arithmetik. Dann folgen die graphischen Lösungen bei den Indern und bei den Arabern. Im letzten Abschnitt geht der Herr Verfasser über zu den Italienern, bespricht besonders Leonardo Pisano und Luca Pacioli, und schliesst mit Cardano und Benedetti.

M.

L. Matthiessen. Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig. Teubner.

Das vorliegende, circa 1000 Seiten umfassende Werk ist nach demselben Principe bearbeitet, wie die im Jahre 1866 erschienene kleinere Schrift des Herrn Verfassers: „Die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen“. Es kam darauf an, die Resultate der neueren Arbeiten von Hesse, Sylvester, Cayley, Salmon, Hermite, Aronhold, Clebsch, Gordan u. A., welche der Theorie der algebraischen Gleichungen eine ganz neue Gestaltung verliehen haben, einem grösseren Leserkreise zugänglich zu machen. Das Werk enthält eine übersichtliche und leichtfassliche Darstellung der Theorie und der historischen Entwickelung der Grundlinien der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Ueberall tritt das Hauptproblem der antiken Algebra in den Vordergrund, selbst da, wo es sich um die Resultate der modernen Algebra handelt, die ja insbesondere nach den Eigenschaften einer binären Form, welche bei linearer Transformation unverändert bleibt, forscht. Alle Näherungsmethoden sind in diesem Buche ausgeschlossen. Der Gang, den der Herr Verfasser befolgt, wird im Uebrigen am besten aus den hier folgenden Ueberschriften der einzelnen Abschnitte ersichtlich. I. Allgemeine Eigenschaften der allgemeinen Gleichungen mit einer Unbekannten; II. Von den Transformationen der Gleichungen und den symmetrischen Functionen der Wurzeln; III. Directe

Auflösung particulärer Gleichungen; IV. Directe Auflösung der Gleichungen von den ersten 4 Graden durch Substitution; V. Directe Auflösung der Gleichungen von den ersten 4 Graden durch Combination; VI. Von der Auflösung der Gleichungen von den ersten 4 Graden mit Hülfe goniometrischer Functionen; VII. Von der geometrischen Construction der Wurzeln der algebraischen Gleichungen. Im letzten Abschnitte (p. 964-1001) giebt der Herr Verfasser ein vollständiges, chronologisch-geordnetes Verzeichniss der Gesammtliteratur der Algebra der Gleichungen, welches für jeden, der sich in der Literatur der Gleichungen orientiren will, besonders aber für den Historiker von unschätzbarem Werthe ist. M.

J. Petersen. Theorie der algebraischen Gleichungen. Kopenhagen. Höst und Son.

Uebersetzung des F. d. M. IX. 52 besprochenen Buches. No.

J. C. Malet. On a proof that every algebraic equation has a root. Trans. of Dublin. 1878.

Der Beweis benutzt nur die gewöhnliche Methode der Algebra, d. h. macht von den Sätzen über complexe Variable keinen Gebrauch. Es wird für bewiesen angenommen, dass jede Gleichung von ungradem Grade eine Wurzel hat und dann gezeigt, dass eine Gleichung von gradem Grade, selbst wenn die Coefficienten imaginär sind, eine Wurzel hat. Csy. (O.)

J. Macmie. Proof of the theorem that every equation has a root. Analyst V. 80-82.

Beweis, dass $f(x)$, eine rationale ganze Function n^{ten} Grades, für mehrere Werthe von x verschwindet.

Glr. (O.)

R. Rawson.* On a new method of determining the differential resolvents of algebraical equations.
Prov. L. M. S. IX. 202-221.

Unter Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung $\varphi(xy)=0$ versteht man die lineare Differentialgleichung, der irgend eine Wurzel y der algebraischen Gleichung, als Function von x betrachtet, genügt. Die Theorie dieser Resolventen ist von Sir James Cockle begründet und u. A. durch die Untersuchungen des Herrn Harley (Proc. of Manchester vol. II. p. 181—184, 199—203, 237—241) bedeutend erweitert worden. Der Verfasser giebt nun mit Hilfe des Murphy'schen Theorems eine neue Methode, die Differentialresolvente aufzustellen. Sind $\beta_1 \dots \beta_m$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi=0$, welche vom m^{ten} Grade in y ist, so giebt die Entwickelung von $\log\frac{\varphi}{y^s}$ nach fallenden Potenzen von y:

$$\log\frac{\varphi}{y^s}=\Sigma\frac{u^n}{y^n},$$

wo

$$u_n=-\frac{1}{n}\{\beta_1^n+\beta_2^n+\cdots+\beta_s^n\}\quad\text{(Murphy's Theorem).}$$

Diese Formel wird auf die von Herrn Harley behandelte Gleichung

$$(1)\quad \varphi=y^m+ay^r+bx=0$$

angewandt, und durch Differentirung und Gleichsetzung der Coefficienten von $\frac{1}{y^n}$ auf beiden Seiten ergeben sich die beiden Formeln

$$(2)\quad\begin{cases} u'_{n+r} = -\dfrac{bm}{a(m-r)}\left\{xu'_n-\dfrac{n}{m}u_n\right\} \\ u'_{n+m} = \dfrac{br}{m-r}\left\{xu'_n-\dfrac{n}{r}u_n\right\}, \end{cases}$$

aus denen sich leicht für u_n eine lineare Differentialgleichung ergiebt, die von s unabhängig ist, der also die n^{te} Potenz irgend einer Wurzel von $\varphi=0$ genügt; setzt man $n=1$, so hat man die gesuchte Resolvente. Der Grad der Differentialgleichung ist,

wenn $\frac{q}{p}$ der reducirte Bruch von $\frac{m}{r}$ ist, von der Ordnung q oder p, je nachdem m oder r der grössere Exponent ist. Der Grad erniedrigt sich auf $q-1$, wenn $n = 1, 2 \dots q-1$ oder wenn $n = -1, -2 \dots q$ ($q > p$ angenommen). Für die speciellen Fälle $m = 3$, $r = 2$; $m = 4$, $r = 3$; $m = 5$, $r = 4$ werden die Rechnungen ausgeführt und die sich ergebenden Resolventen stimmen mit den von Herrn Harley gefundenen überein. Durch eine einfache Transformation gelangt man von der Gleichung (1) zu der folgenden

$$y^m + axy^r + b = 0,$$

deren Resolvente daher leicht aus der von (1) erhalten wird.

Dem Aufsatze ist eine Note von Herrn Harley angefügt, in der er die Formeln (2) auf einem anderen sehr einfachen Wege, den er Herrn Cayley verdankt, herleitet und die Differentialgleichung für u_n, für welche Herr Rawson nur ein Verfahren, sie in jedem besonderen Falle aufzustellen, angegeben hatte, in allgemeinen Ausdrücken darstellt, was ihm vermittelst der Einführung von symbolischen Bezeichnungen gelingt.

Hr.

J. König. Ueber rationale Functionen von n Elementen und die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen. Clebsch Ann. XIV. 212-231.

Der Herr Verfasser bildet aus den Permutationen, welche die Werthe $V_1, V_2, \dots V_r$ einer Function V bei Anwendung der Gruppe G erfahren, eine Gruppe Γ, welche G isomorf ist; findet, dass die Untergruppe H in G, welche der Substitution 1 in Γ entspricht, zu G vertauschbar ist; wendet den Satz an, dass eine Gruppe H, welche zu allen möglichen Substitutionen vertauschbar ist, die Ordnung $\frac{n!}{2}$ oder $n!$ hat und folgert daraus unmittelbar, eine Function V von weniger als n Werthen könne nur ein- oder zweiwerthig sein (Vgl. auch: Kronecker, Berl. B. 1879; 211 und die Anmerkung in Borchardt J. LXXVIII. 87).

Die Anwendung isomorfer Gruppen führt ebenso zu dem Satze über n-werthige Functionen von n Elementen. Im zweiten Theile der Arbeit zeigt der Herr Verfasser den Zusammenhang der Gleichung $f(x)=0$ mit ihrer Galois'schen Resolvente $F(V)=0$; die Reduction der letzteren durch Adjunction einer Function oder aller Wurzeln einer Hülfsgleichung und leitet einfach und kurz das Galois'sche Kriterium für die algebraische Auflösbarkeit von f und die Specialsätze über Gleichungen vom Primzahl-Grade ab.

No.

L. Kronecker. Ueber Sturm'sche Functionen. Berl. Monatsber. 1878. 95-121.

Die Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der Darlegung des Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Methoden der Untersuchung, die auf das Sturm'sche Theorem führen. Im ersten und fünften Paragraphen wird die Beziehung zwischen dem vom Herrn Verfasser (1869 siehe F. d. M. II. p. 203) aufgestellten Begriffe der Charakteristik eines Functionensystems und dem Sturm'schen Satze gezeigt; im zweiten und dritten führt die Verwendung der Jacobi'schen Behandlung des Cauchy'schen Interpolationsproblems zu demselben Ziele; im vierten bilden die Hermite'schen quadratischen Formen den Ausgangspunkt.

§ 1. Sind $\mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{F}_1(x)$ ganze Functionen der Grade n, $n-n_1$, und liefert die Kettenbruchentwicklung

$$\mathfrak{F}_{\alpha-1}-g_\alpha\mathfrak{F}_\alpha+\mathfrak{F}_{\alpha+1}=0,\ (\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F};\ \mathfrak{F}_{\nu+1}=0),$$

wo $\mathfrak{F}_\alpha$ vom Grade $n-n_\alpha$ ist, so folgt

$$\mathfrak{F}_k=\mathfrak{F}_1\psi_{k-1}-\mathfrak{F}\varphi_{k-1}.$$

Bezeichnet man mit $[a]$ die Werthe 0, $+1$, -1, je nachdem a Null, positiv oder negativ ist, so folgt für eine zwischen z_1 und $z_2>z_1$ endliche, stetige Function $\mathfrak{F}(z)$, deren Wurzeln ζ_h sein mögen,

$$\tfrac{1}{2}[\mathfrak{F}(z_2)]-\tfrac{1}{2}[\mathfrak{F}(z_1)]=\sum_h[\mathfrak{F}'\zeta_h]\quad \text{für}\quad z_1<\zeta_h<z_2.$$

Diese Formel auf die $\mathfrak{F}_{\alpha-1}\cdot\mathfrak{F}_\alpha$ angewendet, liefert sofort den Sturm'schen Satz

$$\sum_\lambda [\mathfrak{F}'(\xi_\lambda)\mathfrak{F}_1(\xi_\lambda)] = \tfrac{1}{2}\sum_h \{[\mathfrak{F}_{h-1}(x_2)\mathfrak{F}_h(x_2)] - [\mathfrak{F}_{h-1}(x_1)\mathfrak{F}_h(x_1)]\}$$
$$(h = 1, 2, \ldots \nu;\ \mathfrak{F}(\xi_\lambda) = 0;\ x_1 < \xi_\lambda < x_2)$$

und für $x_1 = -\infty$, $x_2 = \infty$ und reguläre Entwicklung, (bei der also $n_k = k$ und $g_k = g'_k . x - g^0_k$ wird), den Specialsatz

$$\sum_{\lambda=1}^{n} [\mathfrak{F}'(\xi_\lambda)\mathfrak{F}_1(\xi_\lambda)] = \sum_h [g'_h].$$

§ 2. Die obige Gleichung für $\mathfrak{F}_k$ zeigt, dass $\mathfrak{F}_1$ für $x = \xi_1, \ldots \xi_n$ mit $\mathfrak{F}_k(\xi) : \psi_{k-1}(\xi)$ übereinstimmt. Bestimmt man also der Cauchy'schen Interpolationsaufgabe gemäss, zwei Functionen $F(x)$, $\psi(x)$ durch die Bedingungen, dass ψ vom Grade r und $F(\xi) : \psi(\xi) = \mathfrak{F}_1(\xi)$ sein soll, so finden sich, abgesehen von gemeinsamen Factoren, für $n_{k-1} \leq r < n_k$ als einzige Lösungen $\mathfrak{F}_k$ und ψ_{k-1}, ja für $r = n_k - 1$ und $r = n_{k-1}$ werden die Factoren zu Constanten, was im sogenannten regulären Falle stets geschieht. Das Jacobi'sche, auf die Euler'schen Formeln gegründete Verfahren, dessen Resultate sich übrigens, wie Herr Kronecker in § 3 zeigt, leicht aus den Cauchy'schen ableiten lassen, muss also in diesen beiden Fällen $\mathfrak{F}_k$ und ψ_k bis auf constante Factoren in Form von Determinanten

$$D(x) = |x s_{p+q} - s_{p+q+1}|, \left(s_\alpha = \sum_h \frac{\xi_h^\alpha}{\mathfrak{F}_1(\xi_h)\mathfrak{F}'(\xi_h)}\right)$$

liefern, und daraus wird weiter geschlossen, dass die Reihe der $D(x)$, wie Herr Hattendorf zuerst gezeigt hat, auch im nichtregulären Falle als Reihe der Sturm'schen Functionen eintreten kann, wobei, wie sich aus den vorliegenden Untersuchungen noch ergiebt, die Producte von zwei aufeinanderfolgenden Functionen $D(x)$ verschwinden, wenn der Werth des grösseren Index nicht mit dem einer Restfunction $\mathfrak{F}_k$ zusammenfällt.

§ 4. Unter der Voraussetzung regulärer Kettenbruchentwicklung kann die Hermite'sche quadratische Form

$$\sum_h \frac{x - \xi_h}{\mathfrak{F}_1(\xi_h)\mathfrak{F}'(\xi_h)} (\sum_k g'_k v_k \mathfrak{F}_k(\xi_h))^2 \quad (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

in eine nur $2n - 1$ Glieder umfassende Jacobi'sche Form (Crelle J. XXIX.)

$$\sum_{k=1}^{n} g_k v_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} v_k v_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{F}_{k-1}\mathfrak{F}_k \left(\frac{v_{k-1}}{\mathfrak{F}_{k-1}} - \frac{v_k}{\mathfrak{F}_k}\right)^2.$$

umgewandelt werden, welche in ihrer letzten Form wegen der Constanz der Anzahl der Vorzeichen gleichfalls zum Sturm'schen Satz in der obigen Ausdrucksweise führt, andrerseits unter Zuhülfenahme der vom Herrn Verfasser (Berl. Ber. 1873 VII.; F. d. M. V, 74—76) entwickelten Resultate die Transformation einer beliebigen Hermite'schen und die orthogonale Transformation einer beliebigen quadratischen Form in eine Jacobi'sche Form liefert. Dieselbe Transformation, auf die Gleichung

$$|xS_k\delta_{ik} - C_{ik}| = 0 \quad (\delta_{i,i} = 1;\ \delta_{i,k} = 0, i \gtrless k)$$

angewendet, liefert den unmittelbar auf den Sturm'schen Satz gestützten Beweis für die Realität der Wurzeln jener Gleichung, falls die S_k sämmtlich positiv sind, da sie ergiebt

$$\sum_k S_k V_k^2 = \sum_k g'_k v_k^2.$$

§ 5. Sind $\varphi(z)$, $\psi(z)$ zwei ganze Functionen, ξ die sämmtlichen reellen Wurzeln von $\varphi(z) = 0$, so ist

$$\chi(\varphi(z), \psi(z)) = +\tfrac{1}{2}\sum_h [\varphi'(\xi_h)\psi(\xi_h)]$$

die Charakteristik der Functionen φ, ψ (vgl. Berl. Ber. 1869; 4. März; F. d. M. II, 203). Es folgt aus den Formeln von § 1, dass durch die Differenz der Charakteristiken von $f(z), (x_1 - z)f_1(z)$ und $f(z), (x_2 - z)f_1(z)$ das Sturm'sche Theorem gegeben ist, und dies führt den Herrn Verfasser darauf, die Coefficienten von φ, ψ als von ν Grössen $x_1, \dots x_\nu$ abhängig anzusehen und die Aenderung der Charakteristik bei Aenderung der Coefficienten zu untersuchen. Es ergiebt sich, dass nur dann eine Aenderung der Charakteristik eintritt, wenn solche Werthe passirt werden, für welche die Resultante R der beiden Functionen verschwindet. Haben dieselben dabei nur einen linearen Factor gemeinsam, so beträgt die Aenderung nur eine Einheit und erfolgt in demselben Sinne, wie die Aenderung des Ausdrucks $\varphi'(z)\psi(z) - \varphi(z)\psi'(z)$ an demjenigen Werthe von z, für den jener gemeinsame lineare Factor gleich Null ist, oder auch, wenn man

$$R = |s_{i+k}|,\ R_1 = |s_{g+h}| \quad (g, h = 0, 1, \dots n-2;\ i, k = 0, 1, \dots n-1)$$

setzt, wie $[R_1 . \delta R]$, für die Werthe, welche $R = 0$ machen. Nach

den Werthen der Charakteristik theilt sich dann die ν-fache Mannigfaltigkeit der $x_1, \dots x_\nu$ in verschiedene, durch die $(\nu-1)$-fache Mannigfaltigkeit $R=0$ getrennte Gebiete der Art, dass (wie Herr Kronecker in seiner Wintervorlesung 1878/79 bewies) zu jedem Werthe der Charakteristik ein einziges in sich zusammenhängendes Gebiet gehört. Das Passiren der Grenze $R=0$ kann als Eintritt oder Austritt, je nach der Aenderung von χ angesehen werden, und dadurch erhält der Satz über die Charakteristik eine geometrisch anschauliche Form. Die Scheidung in Gebiete zeigt sich dabei als das Wesentliche bei der Aufstellung Sturm'scher Functionen und als das Bleibende in den mannigfach verschiedenen Formen derselben. Für $f_1 = f'$ tritt die Discriminante an die Stelle der Resultante.

No.

L. Lalanne. Sur la méthode géométrique pour la solution des équations numériques de tous les degrés. C. R. LXXXVII. 157-159.

Herr Lalanne macht darauf aufmerksam, dass die Aehnlichkeit zwischen seinen Arbeiten (vgl. F. d. M. VII. 42; VIII. 50) und der vorstehenden des Herrn Kronecker nur eine scheinbare sei, da er selbst lediglich die numerische Lösung der Gleichungen im Auge gehabt habe. No.

L. Kronecker. Ueber die Charakteristik von Functionen-Systemen. Berl. Monatsber. 1878. 145-152.

Die Frage nach der Aenderung der Charakteristik (vgl. Berl. Ber. 1869, 4. März. F. d. M. II. 203), welche Herr Kronecker im Falle von 2 Functionen im fünften Paragraphen seiner Abhandlung über Sturm'sche Reihen (vergl. das vorhergehende Referat p. 53) behandelt hatte, wird hier für $n+1$ Functionen $F_{00}, F_{10}, \dots F_{n0}$ von n Veränderlichen $z_1, z_2, \dots z_n$ untersucht. Es zeigt sich, dass nur dann eine Aenderung eintreten kann, wenn bei der Variation der Coefficienten ein System von Functionen passirt wird, welche

sämmtlich für ein und dasselbe Werthsystem $z_1, z_2, \ldots z_n$ verschwinden, und zwar nimmt die Charakteristik χ um eine Einheit zu oder ab, je nachdem die Determinante

$$|F_{g,h}| \quad \left(g, h = 0, 1, \ldots n; \; F_{gh} = \frac{\partial}{\partial z_h} F_{g0}\right)$$

aus dem Positiven in's Negative übergeht oder umgekehrt. Sind die Coefficienten der F von ν Grössen $x_1, \ldots x_\nu$ abhängig, so zerfällt das Gebiet der x, je nach dem Werthe von χ, in Stücke, welche durch $R(x_1, \ldots x_\nu) = 0$ getrennt sind, und beim Durchgang durch $R = 0$ tritt zur Charakteristik der Werth von

$$[|F_{i,k}| \cdot \delta F_{00}] \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

hinzu, wenn mit δ die Veränderung am Punkte $x_1, \ldots x_\nu$ bezeichnet und in F_{00}, F_{ik} das den Gleichungen $F_{g0} = 0$ $(g = 0, 1, \ldots n)$ genügende Werthsystem $z_1, \ldots z_n$ eingesetzt wird. Auch hier kann man, wie bei zwei Functionen, falls die F ganze rationale Functionen der z sind, die Resultante R und eine andere ähnlich wie in jenem Specialfall gebildete Function R_1 aufstellen, für welche $[R_1 \delta R]$ die Aenderung der Charakteristik angiebt. Nimmt man $n = 2m$ und wählt m rationale ganze Functionen $f_1, \ldots f_m$ und die ihnen conjugirten Functionen $f'_1 \ldots f'_m$ von m complexen Grössen für $F_{k,0}$ $(k = 1, \ldots n)$, so kann man ein F_{00} derart wählen, dass im Bereiche $F_{00} > 0$ weder die ursprünglichen, noch die variirten Functionen gleichzeitig Null werden. $|F_{ik}|$ $(i, k = 1, \ldots n)$ ist in diesem Falle stets positiv; die Charakteristik wird gleich der Gesammtzahl der gemeinsamen Wurzeln von $f_1 = 0, \ldots f_m = 0$, und variirt man der Art, dass $m-1$ der Functionen auf ihre Glieder höchster Dimension beschränkt werden, so folgt, dass die Anzahl der Werthsysteme gleich dem Producte der Dimensionen der m Functionen f ist, falls man die bezügliche Eigenschaft für den Fall von $m-1$ complexen Variabeln voraussetzt. Dieser inductive Beweis benutzt also bei völliger Allgemeinheit des Gleichungssystems keinerlei Resultate aus der Theorie der Elimination. No.

H. Wendlandt. Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung. Grunert Arch. LXII. 1-77.

Ordnet man die Functionen

$$F(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m,$$
$$F'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + m a_m x^{m-1}$$

nach steigenden Potenzen von x, führt dann die Division $F:F'$ durch, bis der Quotient eine lineare Function von x wird, und benennt den Rest $-x^2 F_2(x)$, macht dann mit F' und F_2 dieselben Operationen u. s. w., so kommt man zu einem Systeme von Functionen

$$F,\ F',\ F_2,\ F_3,\ \ldots\ F_r,$$

deren letzte constant wird, falls $F(x) = 0$ keine vielfachen Wurzeln hat. Die Functionen werden Sturm'sche Functionen zweiter Gattung genannt. Ihre Theorie wird unter der Voraussetzung, dass $r = m$, die Entwicklung also regulär ist, in der vorliegenden Arbeit durchgeführt, welche sich als eine „Uebertragung" der Untersuchungen über die gewöhnlichen Sturm'schen Functionen ankündigt. Referent geht auf den Inhalt der Arbeit nicht ein, da derselbe sich von dem der Hattendorff'schen Monographie „Die Sturm'schen Functionen", Hannover 1874, nur in wenigen Punkten unterscheidet, die Folge der Ableitungen, wie der Formeln fast überall beibehält, den Text entweder nahezu wortgetreu oder doch in genauem Auszuge wiedergiebt und zwar selbst da, wo die Originalabhandlungen citirt werden. Die nicht aus dem Hattendorff'schen Buche übertragenen Stellen lassen sich, wie der Herr Verfasser auch angiebt, auf Arbeiten des Herrn Stern und auf Abhandlungen von Jacobi und Joachimsthal zurückführen. No.

P. Mennesson. Sur les fonctions de Sturm. N. C. M. IV. 152-153, 212.

Es sei $X = 0$ eine Gleichung, die nur einfache Wurzeln hat,

$$X_1 = \frac{dX}{dx}, \; X_2, \; X_3 \; \dots \; X_n$$

die Sturm'schen Functionen. Man findet

$$\varphi_{q-1} X_p + X_{p+q+1} = F_q X_{p+1},$$

wo φ_{q-1}, F_q Functionen vom Grade $q-1$, q sind. Es folgt daraus, dass X_p, X_{p+q+1} im Allgemeinen nicht mehr als q gemeinsame Wurzeln haben können. Denn, wenn sie deren mehr hätten, würden X_{p+1} und X_p gleichzeitig Null werden, was unmöglich ist. Der Satz wird falsch, wenn sich X_p und X_{p+1} im Grade um mehr als eine Einheit unterscheiden.

Mn. (O.)

ABONNÉ. Remarque sur quelques points de la théorie des équations numériques. Nouv. Ann. (2) XVII. 104-106.

Gebrauch der Function

$$\varphi(x) = (\lambda - x) f'(x) + n f(x)$$

statt $f'(x)$ zur Bildung der Sturm'schen Reihe für die ganze Function $n$ten Grades $f(x)$. Anwendung derselben auf die Trennung der Wurzeln von Gleichungen fünften Grades.

No.

LEMONNIER. Sur des fonctions analogues à celles de Sturm. Bull. S. M. F. VI. 149-156.

Wenn $F(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ zwei ganze Functionen sind, welche den Gleichungen

$$F(a) = \mathfrak{F}(a)(\lambda a + \mu), \quad F(b) = \mathfrak{F}(b)(\lambda b + \mu)$$

genügen, so wird in

$$F(x) = \mathfrak{F}(x)(\lambda x + \mu) - (x-a)(x-b)\mathfrak{F}_1(x)$$

die Function $\mathfrak{F}_1(x)$ ganz sein, und wenn ausserdem $\mathfrak{F}(x)$ weder für a noch für b verschwindet, so werden $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}_1(x)$ denselben grössten gemeinsamen Theiler haben, wie $F(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$. Gleichzeitig wird der Grad von $\mathfrak{F}_1(x)$ mindestens um zwei Einheiten geringer sein, als der von $F(x)$. Man kann $\mathfrak{F}_1(x)$ mit

Hülfe der Lagrange'schen Interpolationsformel finden und eine Reihe ähnlicher Gleichungen statt der gewöhnlichen bei der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers oder auch bei der Bestimmung der Wurzelrealität nach der Sturm'schen Methode benutzen. No.

M. Falk. Method to find the greatest common measure of two rational integral functions of x. N. Act. Ups. 1878.

Bezout bildet die Resultante der beiden ganzen Functionen

$$\varphi(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n, \quad \psi(x) = b_0 x^n + \cdots + b_n,$$

indem er die Functionen $n-1$ten Grades

$$f_r = \begin{vmatrix} \varphi(x) & a_0 x^r + \cdots + a_r \\ \psi(x) & b_0 x^r + \cdots + b_r \end{vmatrix} \quad (r = 0, 1, \ldots n-1),$$

die alle denselben grössten gemeinsamen Theiler wie φ und ψ haben, aufstellt und dann die Determinante aus den Coefficienten derselben gleich Null setzt. Herr Falk zeigt, dass, wenn

$$a_0 : a_1 : a_2 : \cdots : a_r = b_0 : b_1 : b_2 : \cdots : b_r \text{ und } a_0 b_{r+1} - a_{r+1} b_0 \gtrless 0$$

ist, dann f und f_{r+1} zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers von φ und ψ benutzt werden können. Er wendet auf f, f_{r+1} dieselbe Methode an, bis er zu zwei Functionen gelangt, deren Coefficienten sämmtlich in Proportion stehen, so dass jede dieser Functionen als der gesuchte Theiler betrachtet werden kann. Die Methode erfordert nur Multiplication und Subtraction, keine Division. No.

Y. Villarceau. Détermination des racines imaginaires des équations algébriques. C. R. LXXXVI. 1427-1431.

J. Farkas. Note sur la détermination des racines imaginaires des équations algébriques. C. R. LXXXVII. 791-793, 1027-1029.

Durch Einführung von $x = \varrho e^{\theta i}$ stellt Herr Villarceau die algebraische Gleichung in der Form

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \varrho^k e^{\theta k i} = 0$$

dar, multiplicirt dann mit $e^{-p\theta i}$ und erhält

$$\sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda \varrho^\lambda \cos(p-\lambda)\theta = 0, \quad \sum a_\lambda \varrho^\lambda \sin(p-\lambda)\theta = 0.$$

Giebt man dem p die $m+1$ Werthe $0, 1, 2, \dots m$, dann erhält man $(m+1)$ in $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, ... $\cos m\theta$ lineare Gleichungen; eliminirt man die Cosinus, so erhält man die Schlussgleichung für ϱ, welche freilich in Folge der Eliminationen auch fremde Wurzeln liefern wird.

Herr Farkas zeigt, dass diese fremden Wurzeln, sofern die ursprüngliche Gleichung keine reellen Wurzeln besitzt, stets negative oder imaginäre Werthe haben, und dass auch umgekehrt jede positive Wurzel der Schlussgleichung wirklich einen zur Gleichung $\sum a_k \varrho^k e^{i\theta k} = 0$ gehörigen Werth darstellt. No.

J. Worpitzky. On the roots of equations. Analyst V. 51-52.

Bezieht sich auf eine frühere Arbeit im Analyst für 1878 und setzt allgemein das Verfahren zur Einhegung einer einzelnen Wurzel $z=0$ der Gleichung $f(z)=0$ auseinander, wenn ein Theil der Fläche z, der diese Wurzel enthält, bestimmt worden ist. Glr. (O.)

Laguerre. Sur la résolution des équations numériques. Nouv. Ann. (2) XVII. 20-26, 97-101.

Ist $f(z)=0$ eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades, z_1 ein Näherungswerth für eine Wurzel ζ dieser Gleichung und $z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}$ ein nach der Newton'schen Formel abgeleiteter neuer Werth, dann liegt die Wurzel ζ so, dass der Modul von $\zeta - z_2$ kleiner ist, als der von $(n-1)\frac{f(z_1)}{f'(z_1)}$. Dieser Satz kann geometrisch folgendermassen ausgesprochen werden: Jeder Kreis in der Ebene von $z = x+iy$, der durch z_1 und $z_1' = z_1 - n\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}$ geht, umschliesst wenigstens eine Wurzel der Gleichung, wenn

er nicht durch alle Wurzeln hindurchgeht. Für die Realität aller Wurzeln von $f(z)=0$ ist es nothwendig und hinreichend, dass jeder Punkt z auf der entgegengesetzten Seite der Abscissenaxe liege, wie der aus ihm abgeleitete Punkt $z'=z-n\frac{f(z)}{f'(z)}$.

No.

A. Giesen. Ueber zwei einfache Methoden zur Auflösung numerischer Gleichungen. Schlömilch Z. XXIII. 35-46.

Die Wurzel, für welche die Kenntniss eines Näherungswerthes α vorausgesetzt ist, wird einmal unter der Form

$$\alpha\left(1+\frac{\beta}{10}\right)\left(1+\frac{\gamma}{100}\right)\left(1+\frac{\delta}{1000}\right)\cdots$$

entwickelt, wobei $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ die Werthe $0, 1, \ldots 8, 9$ annehmen können und zweitens unter der Form

$$a+\frac{b}{B}+\frac{c}{B^2}+\frac{d}{B^3}+\cdots,$$

wo $b, c, d, \ldots, B$ ganze positive Zahlen sind. No.

V. Janni. Sulla risoluzione delle equazioni numeriche. Rend. di Napoli XVII. 138-141.

Bestimmung der vielfachen Factoren, unabhängig von der Bestimmung des grössten gemeinsamen Theilers. O.

M. de Ferrata. Nuovo estudio riferente a la resolucione de las ecuaciones numericas. Cron. cient. I. 25-26, 49-51, 97-101, 121-125.

J. Borden. Discussion of an equation. Analyst V. 41-44.

Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln der Gleichung

$$x^n+px+q=0,$$

ihrer Grenzen und Vorzeichen für reelle Werthe von p und q.

Glr. (O.)

J. Tetmajer. Die Theorie der Entwickelung der unentwickelten Functionen. Krak. Denkschr. 1877-1878. (Polnisch.)

Die Schrift enthält folgende Capitel: Ueber Reihen im Allgemeinen, Entwickelung der Functionen in Reihen, Entwickelung unentwickelter Function, allgemeine Auflösung trinomer Gleichungen von der Form $x^\alpha + px^\beta + q = 0$, wo p und q reelle, α und β ganze und positive Zahlen sind, allgemeine Auflösung der Gleichungen von der Form $x^\alpha + px^\beta + qx^\delta + r = 0$. Die Methode wird an speciellen Beispielen ausführlich erläutert. Dn.

J. Odstrčil. Neue Methode der Wurzelberechnung von quadratischen Gleichungen. Casopis VII. 102-113. (Böhmisch).

Enthält die Darstellung einer der Quadratwurzelausziehung analogen Methode, die in gewissen Fällen praktische Vortheile bieten kann. Std.

M. Azzarelli. Risoluzione delle equazioni di 3° grado. Acc. P. d. L. XXXI. 355-366.

J. Borden. Discussion of the general equation of the third degree. Analyst V. 110-112.

Discussion der Wurzeln der allgemeinen cubischen Gleichung mit Hülfe der Curve $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y$. Glr. (O.)

H. Heaton. Cubic equations. Analyst V. 117-118.

Die Gleichung wird auf die Form $x^3 - 3ax = 2b$ gebracht und die Wurzeln in trigonometrischer, von der gewöhnlichen etwas abweichenden Form gegeben. Glr. (O.)

S. Realis. Particularités relatives à l'équation du 3me degré. Nouv. Ann. (2) XVII. 178-181.

Ist $x^3+px+q=0$ die betrachtete Gleichung dritten Grades, so wird $\varphi(x)=p^2-4qx$ gebildet, und von dieser Function werden einige Eigenschaften abgeleitet, die zur Realität u. s. w. der Wurzeln in Beziehung stehen. No.

L. G. Barbour. Equations of the third degree.

Analyst V. 72-79.

Classification der Wurzeln cubischer Gleichungen. Dies geschieht geometrisch, mit Hülfe der Differentialrechnung, durch Betrachtung der Curve $x^3+px=y$. Der Verfasser giebt folgende Methode zur Lösung für den Fall, wo alle Wurzeln reell sind. Es seien r, s, $-t$ die Wurzeln der Gleichung $x^3-px+q=0$, so dass $r+s=t$, und es sei $s=ar$; dann ist

$$p=r^2(1+a+a^2),\ q=r^3(a+a^2),$$

so dass

$$\text{(I.)}\qquad \frac{p^3}{q^2}=\frac{(1+a+a^2)^3}{(a+a^2)^2}$$

und

$$\text{(II.)}\qquad r=\sqrt{\frac{p}{1+a+a^2}}=\sqrt[3]{\frac{q}{a+a^2}}.$$

Das Verfahren ist nun: Man bestimme a aus Gleichung (I), dann ist r durch eine der Gleichungen (II) bestimmt. Um a leicht bestimmen zu können, wird eine Tafel der Werthe von $\log\frac{(1+a+a^2)^3}{(a+a^2)^2}$ von $a=0$ bis $a=1{,}00$ in Intervallen von 0,01 auf 7 Stellen gegeben. Ein Vortheil der Methode ist die Leichtigkeit, mit der man die zweite Wurzel erhält. Die Gleichungen

$$x^3-7x+7=0 \quad\text{und}\quad x^3-3x-1=0$$

werden als Beispiele durchgeführt. Glr. (O.)

J. Odstrčil. Neue Methode der Wurzelberechnung von cubischen Gleichungen. Casopis VII. 218-236. (Böhmisch).

Analog der früher für quadratische Gleichungen dargestellten Methode (siehe p. 61). Std.

J. ODSTRČIL. Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln quadratischer und cubischer Gleichungen. Wien. Hölder.

Zusammenfassung der beiden Arbeiten p. 61 und p. 62.
O.

V. MOLLAME. Una risoluzione dell' equazione completa di 3° grado, e le radici di questa in funzione del discriminante della cubica. Battaglini G. XVI. 341-345.

Mittheilung der Lösung des Herrn J. Cockle (Quart. J. XV. p. 65). Vgl. F. d. M. IX. p. 57. No.

G. WEICHOLD. Solution of the irreducible case. Am. J. I. 32-50.

Breitere Ausführung des vom Referenten bereits (F. d. M. IX. p. 62) als unrichtig bezeichneten Versuches, die Wurzeln der Gleichungen dritten Grades im irreduciblen Falle durch geschlossene reelle Ausdrücke darzustellen. No.

H. KENDAL. On a short process for solving the irreducible case of Cardan's method. Am. J. I. 285-287.

Die in der Cardanischen Formel vorkommenden Wurzelgrössen werden durch die ihnen gleichen Functionen der Wurzeln selbst dargestellt. No.

Lösungen einiger elementarer Aufgaben über quadratische und cubische Gleichungen, von J. O'REGAN, COCHEZ u. a. finden sich Educ. Times XXIX. 87 und XXX. 93-94.
M.

V. VIDAL. Résolution des équations numériques du quatrième degré. Nouv. Ann. (2) XVII. 367-370.

Für die allgemeine Gleichung vierten Grades $f(x)=0$ wird die auf $f'(x)$ folgende Sturm'sche Function $\varphi(x)$ gebildet; $f(x)$ wird dann als Function der Coefficienten von $\varphi(x)$ dargestellt, und hieraus werden einige Schlüsse über die Natur der Wurzeln von $f=0$ gezogen. No.

E. Dixon. A new solution of biquadratic equations. Am. J. I. 283-284.

Die Wurzeln der Gleichung $y^4+px^2+qx+r=0$ werden unter der Form $y=\pm\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$ angesetzt. Man findet für B den Werth $F\cdot\sqrt{A}$. Bei der Anwendung dieser Formel braucht man, um y zu bestimmen, nur die Kenntniss einer einzigen Wurzel der cubischen Gleichung, deren Lösung stets erforderlich ist.

No.

O. Pratt. Solution of a problem (221.) Analyst V. 183-184.

Lösung von

$$x^4+px^3+\frac{7p^2}{4^2}x^2+\frac{6p^3}{4^3}x+q=0.$$

Glr. (O.)

A. Cayley. A theorem of Abel's relating to a quintic equation. Proc. of Cambr. III. 155-159.

Der betreffende Satz befindet sich in Abel's Werken II. p. 253 als Auszug aus einem Briefe an Crelle vom 14. März 1826 und bezieht sich auf die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades mit rationalen Coefficienten, welche Abel in der Form

$$x=c+Aa^{\frac{1}{5}}a_1^{\frac{2}{5}}a_2^{\frac{4}{5}}a_3^{\frac{3}{5}}+A_1a_1^{\frac{1}{5}}a_2^{\frac{2}{5}}a_3^{\frac{4}{5}}a^{\frac{3}{5}}+\cdots$$

aufgestellt hat, wo $a, a_1, \ldots A, A_1, \ldots$ gewisse Werthe haben. Prof. Cayley beweist diesen Satz und giebt die Gleichung, deren Wurzeln in dem Satze gegeben sind, indem die Coefficienten in $a_1, a_2, \ldots A_1, A_2, \ldots$ ausgedrückt werden. Glr. (O.)

P. Gordan. Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Clebsch Ann. XIII. 375-405.

Bedeutet

$$\gamma = y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10})$$

ein Ikosaeder, γ_2 seine Hesse'sche, γ_3 die Functionaldeterminante beider, so sind alle ganzen Functionen von y_1, y_2, welche für die 120 Ikosaedersubstitutionen in sich selbst übergehen, ganze Functionen von γ_1, γ_2, γ_3, d. h. γ_1, γ_2, γ_3 bilden das volle System dieser Functionen. Die Substitutionen enthalten eine Constante $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$; führt man ε^2 statt ε ein und wendet die neuen Substitutionen nur auf die Variabeln x_1, x_2 an, so kann man nach dem vollen Systeme der homogenen ganzen Functionen V von y_1, y_2 und x_1, x_2 fragen, welche ungeändert bleiben, falls auf die y die ersten, auf die x die letzteren Substitutionen angewendet werden. Als einfachste Form findet sich

$$f = y_1^3 x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2 x_2^3 + y_1 y_2^2 x_1^3 - y_2^3 x_1 x_2^2,$$

und aus ihr werden durch Ueberschiebung andere Formen

$$\varphi = \tfrac{9}{4}(f, f)_{1,1}, \quad \psi = 12(f, \varphi)_{1,1}, \quad \tau = \tfrac{9}{2}(f, f)_{2,0}, \quad \theta = 4(f, \varphi)_{3,0}, \ \ldots$$

abgeleitet; es ergiebt sich ein volles Formensystem von 36 Formen. Benutzt man die zwischen diesen bestehenden Relationen, so erhält man die Resultate: Alle Functionen V, welche gleichen Grad in den x und den y haben, sind ganze Functionen von

$$f, \varphi, \psi, \quad \text{und} \quad \Delta = (f, \tau')_{0,1}\,\theta - (f, \tau)_{1,0}\,\theta';$$

alle Functionen V, welche bei Vertauschung der x und y ungeändert bleiben, sind ganze Functionen von f, φ, ψ; alle Formen des Systems sind rational darstellbar durch die Formen

$$f, \ \varphi, \ \psi, \ \frac{\tau}{\theta} \quad \text{und} \quad \frac{(f, \tau)_{1,0}}{\theta} = c,$$

zwischen denen eine in c quadratische Relation besteht. Aus den 120 Ikosaedersubstitutionen lassen sich 24 auswählen, welche dem Tetraedertypus angehören, und deren System durch drei Functionen g_1, g_2, g_3 gebildet wird. Verfährt man wie oben, so erhält man 20 Formen, welche das volle System der Tetraederformen ausmachen und welche aus der einfachsten

$$\chi = -y_1(x_1 + x_2) + y_2(x_1 - x_2)$$

abgeleitet werden. Da ferner alle Ikosaederformen auch Tetraederformen sind, so sind dann jene durch diese ausdrückbar. Es ist z. B. $\psi = -\chi^5 - 5f\chi^2 + 5\varphi\chi$. Alle Tetraederformen sind rational in f, φ, c, χ, $(f, \chi)_{1,0}$. An die eben aufgestellte Gleichung knüpft die Lösung der Gleichungen fünften Grades an: sind f, φ, ψ und die Quadratwurzel aus der Discriminante Δ gegeben, so kann die Constante X der Ikosaedergleichung $\frac{\gamma_2^3}{\gamma_1^6} = X$ rational bestimmt, und aus ihren Wurzeln können die Wurzeln χ zusammengesetzt werden. Die obigen Untersuchungen liefern auch Gleichungen mit nur Einem Parameter; so entsteht z. B. aus

$$\gamma_3 = g_1^5 - 10g_1^3\gamma_1 + 45g_1\gamma_1^2$$

durch $u = \frac{g_1}{\sqrt{\gamma_1}}$ die Gleichung

$$u^5 - 10u^3 + 45u - \frac{\gamma_3}{\gamma_1^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Die Jerrard'sche Form kann als Specialfall der erst behandelten Gleichung angesehen werden; es wird die betreffende Transformation und die Lösung durch die Hermite'schen Formeln explicit angegeben. No.

F. Brioschi. Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Clebsch Ann. XIII. 109-160.

Im ersten Abschnitte seiner Arbeit beschäftigt sich der Herr Verfasser mit den Multiplicatorgleichungen bei der Transformation der elliptischen Functionen und zwar speciell mit dem Umstande, dass zwischen den Quadratwurzeln ihrer $n+1$ Wurzeln

$$z, \; z_m \; (m = 0, \; 1, \ldots n-1)$$

$\frac{n+1}{2}$ lineare Relationen bestehen, mit deren Hülfe gefunden wird

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt{z} = a_0 \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}, \\ \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 + \varepsilon^{4m} a_2 + \cdots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 m} a_{\frac{n-1}{2}}, \; (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}). \end{cases}$$

Da die Relationen linear sind, so finden sich ähnliche auch

zwischen den nach dem Modul k genommenen Differentialquotienten gleichen Ordnungen. Wegen der Differentialgleichung $\frac{n+1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die Quadratwurzel des Multiplicators genügt, erhält man nur $\frac{n-1}{2}$ neue Reihen von Functionen derselben Eigenschaft wie $\sqrt{z}$, $\sqrt{z_m}$ und durch eine lineare Verbindung derselben mit den ursprünglichen die allgemeinste Function dieser Art, welche $\frac{n+1}{2}$ Parameter, oder vielmehr nur die $\frac{n-1}{2}$ Verhältnisse derselben willkürlich enthält. Gleichungen, zwischen deren Wurzeln Beziehungen (1) bestehen, nennt Herr Brioschi „Jacobi'sche Gleichungen" und er rechnet zu denselben auch die von Herrn Kronecker angegebenen, mit den Relationen

$$(1') \quad \begin{cases} \sqrt{z} = -a_0 \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}, \\ \sqrt{z_m} = a_0 + \varepsilon^m a_1 + \varepsilon^{4m} a_2 + \cdots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 m} a_{\frac{n-1}{2}}. \end{cases}$$

Mit den allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen 5ten Grades beschäftigt sich der zweite Abschnitt. Ihre Form ist

$$(2) \quad (z-a)^6 - 4a(z-a)^5 + 10b(z-a)^3 - 4c(z-a) + 5b^2 - 4ac = 0,$$

wo die a, b, c ganze Functionen von a_0, a_1, a_2 sind. Um hier allgemeine Functionen zu bilden, werden, da die Grösse k zurücktritt, die nach a_0, a_1, a_2 genommenen Differentialquotienten betrachtet und mit ihrer Hilfe kann

$$\sqrt{Z} = p\sqrt{z} + q\sqrt{z'} + r\sqrt{z''}$$

bestimmt werden, wo $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ ganze ungrade Functionen von $\sqrt{z}$ sind, und $p:q:r$ zwei willkürliche Parameter einführt. $\sqrt{Z}$ ist der allgemeinste Ausdruck für die Wurzel einer Jacobi'schen Gleichung; Z wird eine Function 5ten Grades in z, deren Coefficienten in p, q, r quadratisch sind; der von z^5 z. B. ist $pr-q^2$. Die Coefficienten A, B, C der Gleichung für Z, welche der (2) entspricht, werden durch p, q, r ausgedrückt; A wird quadratische Form derselben, so dass, wenn diese gleich Null gesetzt wird, die transformirte Gleichung für Z die Gestalt annimmt

$$(3) \quad Z^6 + 10BZ^3 - 4CZ + 5B^2 = 0;$$

trifft man über $p:q:r$ die zweite Verfügung, dass $pr-q^2=0$ sei, so ist Z eine Function 4ten Grades in z, also umgekehrt z die Wurzel einer Gleichung 4ten Grades mit rationalen Coefficienten in Z. Es geht aber (2) für

$$Z = Y\sqrt[3]{B},\quad \frac{C^3}{B^5} = -\frac{(1-16k^2k'^2)^2}{4k^2k'^2}$$

in die Transformationsgleichung 5ter Ordnung der elliptischen Functionen über, deren Wurzeln

$$\left[\sqrt{\frac{\lambda\mu}{k}}+\sqrt{\frac{\lambda'\mu}{k'}}\right]^2$$

sind; folglich ist (3) und wegen der oben angegebenen Transformation auch (2) durch elliptische Functionen lösbar. Setzt man

$$\zeta = \alpha + \frac{1}{z-a},\quad \alpha = \frac{c}{5b^2-4ac},$$

$$\beta = \frac{b}{5b^2-4ac},\quad \gamma = \frac{a}{5b^2-4ac},$$

so genügt ζ einer Gleichung (2) mit den Relationen (1'). Auch $\sqrt{\zeta}$ ist eine ganze, ungrade Function von $\sqrt{z}$; den $\sqrt{z'}$, $\sqrt{z''}$ entsprechen hier $\sqrt{\zeta'}$, $\sqrt{\zeta''}$.

Der dritte Abschnitt behandelt die von Galois angegebene, von Hermite durchgeführte Erniedrigung der Jacobi'schen Gleichung (2) auf eine Gleichung fünften Grades und damit die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades. Die Grössen

$$(4)\quad y_\nu = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\left[(z-z_\nu)(z_{\nu+2}-z_{\nu+3})(z_{\nu+4}-z_{\nu+1})\right]^{\frac{1}{2}}\ (\nu = 0, 1, \ldots 4)$$

genügen nämlich der Gleichung

$$(5)\quad y^5+10by^3+5(9b^2-4ac)y-8\sqrt{-h}=0,$$

wo das letzte Glied die vierte Wurzel der Discriminante von (2) ist. Durch (2) ist mittels (4) auch (5) gelöst; andrerseits geht durch die Jerrard'sche Transformation die allgemeine Gleichung fünften Grades in (5) mit $b=0$ über; folglich ist auch die allgemeine Gleichung fünften Grades dadurch gelöst. Die bei der Jerrard'schen Form nöthigen Hülfsgleichungen können vermieden werden; man gestaltet die allgemeine Gleichung auf die von Hermite angegebene Art um (Borchardt J. 59, 304); die Summen

der ersten und der dritten Potenzen der als Wurzeln zu Grunde gelegten Functionen verschwinden, so dass die neue Gleichung direct mit (5) identificirt werden kann. Herr Brioschi vervollständigt die Hermite'schen Untersuchungen durch wirkliche Bestimmung der Coefficienten für die reducirte Gleichung.

Es folgt im vierten Abschnitte eine gedrängte Auseinandersetzung der analytischen Behandlung von Substitutionsgruppen, und an diese schliesst sich die Ableitung der Malfatti'schen Resolvente 6ten Grades für $y^5+\alpha y^3+\beta y+\gamma=0$, sowie die Angabe derjenigen Function der Wurzeln von (2), durch welche jene Resolvente und dadurch wiederum die Gleichung fünften Grades gelöst wird.

Die bisher behandelten Lösungen beruhten auf Transformation von (2); der fünfte Abschnitt giebt die Resultate der Kronecker'schen Untersuchungen, durch welche (2) selbst als Resolvente im weiteren Sinne einer allgemeinen Gleichung fünften Grades erkannt wird. Bedeutet nämlich (01234) eine cyklische Function der Wurzeln und ist für $\alpha=0, 1, 2, 3, 4$

$$u\;=(01234)-(04321);$$
$$u_\alpha=(\alpha, 3+\alpha, 4+\alpha, 1+\alpha, 2+\alpha)-(\alpha, 2+\alpha, 1+\alpha, 4+\alpha, 3+\alpha);$$
$$U\;=tu+t_0u_0+\cdots+t_4u_4;$$
$$U_\alpha=tu_\alpha+t_0u-t_1u_{1+\alpha}+t_2u_{3+\alpha}+t_3u_{2+\alpha}-t_4u_{4+\alpha};$$

wobei alle Zahlen $m+\alpha$ auf ihre Reste mod. 5 zu reduciren sind, dann sind die symmetrischen Functionen von U^2, U_α^2 zweiwerthige Functionen der Wurzeln und also durch die Coefficienten und die Wurzel aus der Discriminante ausdrückbar; für $t=\pm k\sqrt{5}$, $t_\alpha=k$ erfüllen die U gleichzeitig die Gleichungen (1), (1'), sind also Wurzeln von (2), wobei a, b, c rational in den Coefficienten und der Quadratwurzel aus der Discriminante sind. So hat man also (2) als Resolvente, in so fern die Kenntniss aller Werthe einer cyklischen Function die Kenntniss der fünf Wurzeln auf rationalem Wege nach sich zieht. No.

F. Klein. Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Clebsch Ann. XIV. 111-172.

Bedeutet $f(x)$ die im Differential des elliptischen Integrals auftretende, biquadratische, binäre Form; sind g_2, g_3 ihre Invarianten; ist Δ ihre Discriminante; σ eins der Doppelverhältnisse der Wurzeln von $f=0$, so wird $J = g_2^3 : \Delta$ als absolute Invariante und $\omega = \omega_1 : \omega_2$, das Verhältniss der Perioden als transcendente Invariante eingeführt und die Aufgabe gestellt, das Functional-Verhältniss von ω und J zu untersuchen. Die Riemann'sche Fläche, welche ω auf $\sigma(=\varkappa^2)$ abbilden würde, wäre unendlich vielblättrig; sie zerfällt in unendlich viele, aus Kreisbogen gebildete Dreiecke, deren jeder einer Halbebene für σ entspricht. Da ferner

$$J = \tfrac{4}{27} \frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{\sigma^2.(1-\sigma)^2}$$

ist, so erhält man sofort auch die entsprechende conforme Abbildung von J auf ω. Die Dreiecke stossen in Punkten ω zusammen, welche den Werthen $J=0, 1, \infty$ angehören und zwar bezüglich in je 6, 4, ∞ solcher Dreiecke, d. h. in je 3, 2, ∞ der Gesammtebenen von J. Hieraus erkennt man gleichzeitig, wann bei der Substitution

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \quad (\alpha\delta-\beta\gamma=1)$$

Elemente fest bleiben können: bei elliptischen Substitutionen, d. h. solchen mit conjugirt imaginären fest bleibenden Elementen ist

$$J = 0 (g_2 = 0) \quad \text{oder} \quad J = 1 (g_3 = 0);$$

bei parabolischen, d. h. reell zusammenfallenden fest bleibenden Elementen ist $J=\infty$, $\Delta = 0$, ω beliebig rational; bei hyperbolischen d. h. reell verschiedenen fest bleibenden Elementen ist die Periode unendlich gross und niemals rational.

Ist $\varphi(J', J_x) = 0$ die Gleichung, welche die absoluten Invarianten zweier elliptischer Integrale mit einander verbindet, die durch eine Primzahltransformation n^{ter} Ordnung aus einander hervorgehen, und setzt man das Geschlecht von φ gleich Null voraus, so können Verzweigungen von J' in Bezug auf J nur bei $J=0, 1, \infty$ stattfinden, der Art, dass bei $J=0, 1$ beliebig oft je 3, resp. 2 Blätter zusammenhängen, während bei $J=\infty$ die Verzweigung beliebig ist. Aus der Beziehung zwischen den zu J

und J' gehörigen Perioden folgt dann, dass für $n = 6\mu + 5$ bei $J = 0$ die $n + 1$ Blätter der auf J' bezüglichen Riemann'schen Fläche zu 3 und 3 cyklisch zusammenhängen, dass für $n = 6\mu + 1$ bei $J = 0$ nur $n - 1$ in dieser Art zusammenhängen, während 2 isolirt verlaufen; dass bei $J = 1$ für $n = 4\mu + 3$ alle Blätter paarweise zusammenhängen, während für $n = 4\mu + 1$ zwei Blätter isolirt bleiben; dass für $J = \infty$ die Werthe von J' auch ∞ sind und dass n derselben cyklisch zusammenhängen, während eins isolirt verläuft. Hieraus ist der Werth von p ableitbar; man findet ihn für $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ gleich Null. Nach der Feststellung der Verzweigungsstellen von J' handelt es sich um die Entscheidung, wie dieselben durch Verzweigungsschnitte zu verbinden sind, d. h. wie die $2(n + 1)$ Kreisbogendreiecke, welche das Gebiet für J und J' auf der Ebene ω bilden, in ihren Kanten zusammenhängen. Man gelangt dabei zu einer Riemann'schen Fläche, welche, statt $n + 1$-blättrig über der J Ebene ausgebreitet zu sein, frei im Raume liegend, in $2(n + 1)$ Theile zerfällt, deren jeder einer Halbebene entspricht. Statt der Verzweigungspunkte treten die Ecken jener Theile auf, in denen die entsprechende Zahl von Dreiecken zusammenstösst. Die Transformationsgleichungen werden in einfachster Weise dadurch aufgestellt, dass J und J' durch diejenige Variable τ rational dargestellt werden, welche in der Riemann'schen Fläche jeden Werth nur einmal annimmt oder vielmehr, dass J durch τ dargestellt wird, dass dann J' durch dieselbe Form einer Variabeln τ' ausgedrückt und endlich die bilineare Beziehung zwischen τ und τ' ermittelt wird. Die Lösung der aufgestellten Gleichungen durch elliptische Modulfunctionen ist natürlich zu ermöglichen; sie erfolgt durch die Erkenntniss, dass der bei der Transformation auftretende Multiplicator M durch eine Relation $\tau = aM^{\lambda}$ mit τ zusammenhängt, wobei a ein Zahlenfactor, λ das kleinste ganzzahlige Multiplum von $\frac{n-1}{12}$ ist.

Beachtet man, dass für eine Gleichung $\varphi(s, z) = 0$, vom Geschlechte 0, eine einfachste Function η gefunden werden kann, für welche $R(\eta) = z$ ist und ferner, dass bei einer Galois'schen

Resolvente φ jede Wurzel rational durch jede andere und den Parameter z darstellbar ist, dass daher bei einer Galois'schen Resolvente mit $p=0$, jede Wurzel η_i rational durch η_k und umgekehrt ausdrückbar, ihre Beziehung also eine bilineare sein muss, so folgt, dass diese Resolventen lineare Transformationen in sich haben. Es ergeben sich $\eta^n = z$; $\eta^n + \eta^{-n} = z$, ferner die Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergleichung als Gleichungen mit inearen Trans formationen in sich, und

$$\eta^2 = J,\ \eta^2 = J-1,\ \eta^3 + \eta^{-3} = (2J-4):J,$$

nebst den 3 letzteren Gleichungen als solche, welche durch elliptische Functionen lösbar sind. Es muss für $p=0$ der Werth von $n = 2, 3, 4, 5$ sein, und für diese Fälle wird τ explicit durch das Doppelverhältniss σ resp. die Tetraeder-, Oktaeder, Ikosaeder-Irrationalität ausgedrückt.

Anknüpfend an die Thatsache, dass für eine Primzahl n die Gleichungen zwischen $\sigma = x^2$ und $\sigma' = x'^2$ vom $n+1^{ten}$ Grade sind, kann man nach den algebraischen Functionen von J, J' fragen, welche ebenfalls zu Transformationsgleichungen $n+1^{ten}$ Grades Anlass geben. Diese Frage wird nicht allgemein gelöst, doch wird gezeigt, dass für alle von 5 verschiedenen Primzahlen n die Ikosaederirrationalität η, welche durch $12^3 . \frac{H^3\eta}{f^5\eta} = J$ definirt wird, den nothwendigen Bedingungen genügt; ist ζ die entsprechende Grösse, so sind die Transformationen, welche den 60 Ikosaedersubstitutionen für η entsprechen, für ζ entweder mit jenen identisch, falls n quadratischer Rest mod. 5 ist, oder aus ihnen abzuleiten, indem man ε^2 durch ε ersetzt, falls n Nichtrest ist. Für $n = 2, 3$ folgen die Gleichungen aus den Resultaten der Arbeit des Herrn Gordan (Vergl. d. Referat S. 65). Hinsichtlich der Jerrard'schen und Hermite'schen Form der Gleichungen fünften Grades knüpft Herr F. Klein an die Resultate seiner früheren Arbeit (Clebsch Ann. XII.; Vgl. F. d. M. IX. 64-68) an und giebt ihre Beziehungen zu der daselbst behandelten Fläche zweiten Grades $\Psi = 0$, deren Gleichung $\Sigma y^2 = 0$ war. Es folgt endlich eine Untersuchung über die Beziehungen, in denen die verschiedenen Lösungen der Gleichungen fünften Grades stehen;

erwähnt sei hier nur die Bemerkung, dass die Einführung von J statt $\sigma = x^2$ bei der Hermite'schen Lösung die cubische Hülfsgleichung überflüssig macht, da letztere lediglich ein Aequivalent für den Uebergang von J zu σ bildet.

No.

L. Kiepert. Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Gött. Nachr. 424-430.

L. Kiepert. Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Brioschi Ann. (2) IX. 119-123.

F. Brioschi. Nota alla precedente memoria. Brioschi Ann. (2) IX. 124-125.

L. Kiepert. Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Borchardt J. LXXXVII. 114-133.

Herr Kiepert legt seinen Untersuchungen die Formeln des Herrn Weierstrass (Vgl. Borchardt J. 76, 21-33, siehe F. d. M. V.259) zu Grunde und behandelt mit Hülfe derselben die Jacobi'sche Gleichung „mit a gleich Null", welche dann lautet:

$$(1)\quad f^{12}+10bf^{6}+4cf^{2}+5b^{2}=0.$$

Setzt man in

$$[\wp'(u)]^2 = 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3,\quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2,\quad h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$$

für

$$g_2 = -\frac{c}{3b^2},\quad 27g_3^2 = \frac{-c^3-27b^5}{27b^6},$$

so erhält man

$$f = \frac{1}{p^{\left(\frac{2\omega}{5}\right)} - p^{\left(\frac{4\omega}{5}\right)}} = h^{\frac{1}{3}}\Delta^{-\frac{1}{6}}\sqrt{5}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-h^{10\nu}}{1-h^{2\nu}}$$

$$f_r = -\varepsilon^r h^{-\frac{1}{15}}\Delta^{-\frac{1}{6}}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-h^{\frac{2\nu}{5}}.\varepsilon^{24r\nu}}{1-h^{2\nu}}\begin{pmatrix}\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\\ r=0,1,\ldots 4\end{pmatrix},$$

als Wurzeln von (1). Aus dieser Form kann man die bekannten linearen Relationen unter den Wurzeln ableiten. Diejenigen Functionen f, f', f''; $\varphi, \varphi', \varphi''$, welche den Brioschi'schen $\sqrt{z}, \sqrt{z'}, \sqrt{z''}$;

$\sqrt{\zeta}, \sqrt{\zeta'}, \sqrt{\zeta''}$ entsprechen (Vgl. d. vorige Referat pag. 69) werden hier für $a = 0$:

$$f' = \tfrac{1}{2}(\varDelta f^5 - 5f^{-1}),\quad f'' = \tfrac{1}{2}(\varDelta f^9 + 9f^3);$$
$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\varDelta f^5 + 5f^{-1}),\quad \varphi' = f^3,\quad \varphi'' = \tfrac{1}{2}(\varDelta f^7 + 7f).$$

Mit Hilfe von (1) kann man dann nachweisen, dass alle rationalen ungraden Functionen von f linear durch diese sechs darstellbar sind.

Durch die, den Formeln (4) des vorigen Referats entsprechenden, bei denen, wie Herr Kiepert bemerkt, auch rational

$$y_r = \frac{\sqrt{-(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)}}{\sqrt[4]{5}}(f^2 - f_r^2)(f_{r+4} - f_{r+1})$$

gesetzt werden kann, erhält man die Gleichung, welche Herr Brioschi benutzt:

$$(2)\qquad \varDelta^3 y^5 + 10\varDelta^2 y^3 + 45\varDelta y - 216 g_3 = 0.$$

Es kann dann die allgemeine Gleichung fünften Grades mittels einer quadratischen Gleichung auf

$$(3)\qquad z^5 + 5lz^2 - 5mz + n = 0$$

und (2) durch die von Herrn Gordan angegebene Substitution $z = -\dfrac{\alpha + \beta y}{3 + \varDelta y^2}$ auf dieselbe Form gebracht werden. α hängt dabei von einer Gleichung zweiten Grades ab, deren Discriminante aber mit derjenigen der ursprünglichen Gleichung zusammenhängt, so dass keine neue Irrationalität durch α, β eingeführt wird. Bestimmt man aus den hierbei festgelegten Werthen von g_2, g_3 die Grösse h, so geben die obigen Formeln f, f_r, hierauf y_r und endlich rückwärts die z. Am Schlusse der Arbeit ist das gesammte Rechnungsverfahren kurz zusammengestellt.

Herr Brioschi giebt in seiner Note einige Formeln, welche seine Gleichungen in die des Herrn Kiepert überführen.

No.

A. Evans. Solution of the equations of the fifth degree.

Analyst V. 161-166.

Uebersetzung der Art. 421-425 aus Briot et Bouquet, „Théorie des fonctions elliptiques“ (2ie Aufl.) und der Art. 349 und 341 von Todhunter's „Theory of equations“. Glr. (O.)

F. Klein. Ueber Gleichungen siebenten Grades. I. II. Erlanger Ber. 1878.

Ueber diese beiden Mittheilungen wird im nächsten Bande bei der Besprechung der ausführlicheren Arbeit des Herrn Verfassers über denselben Gegenstand referirt werden. No.

Gourier. Sur l'équation de Kepler. Ann. de l'Ec. Norm. (2) VII. 73-77.

Siehe Abschn. VII. Cap. 1. M.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

G. Frobenius und L. Stickelberger. Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen. Borchardt J. LXXXVI. 217-262.

In Betreff der Theorie der endlichen Gruppen von vertauschbaren Elementen hatte Gauss bereits gezeigt, dass jede Gruppe in primäre Gruppen, deren Ordnungen relative Primzahlen zu einander sind, nur auf eine Weise zerlegt werden könne. Von Herrn Schering wurde dann bewiesen, dass jede Gruppe auf mehrfache Weise in elementare zerlegt werden kann, von deren Ordnungen jede durch die folgende theilbar ist. Die Verfasser bedienen sich zur Veranschaulichung ihrer Untersuchungen über Gruppen des Beispiels der Zahlenklassen, die in Bezug auf einen Modul M incongruent und relativ prim zu demselben sind. So gelingt es ihnen zunächst die Gauss'schen und Schering'schen Theoreme auf einem neuen und einfachen Wege zu beweisen.

Insbesondere stellen sie sich die Aufgabe, die Schering'sche und Gauss'sche Zerlegung in ihrem Zusammenhange weiter zu erforschen. Es lässt sich zeigen, dass, wie man auch eine nicht irreducibele Gruppe in irreducibele, d. h. gleichzeitig primäre und elementare Factoren zerlegen mag, doch in je zwei verschiedenen Zerlegungen die Factoren einander so zugeordnet werden können, dass je zwei entsprechende von gleicher Ordnung sind. Hiernach erscheinen diese Ordnungen als Invarianten der Gruppe. Nachdem noch die irreducibelen Factoren in § 9 einer genaueren Characterisirung unterworfen sind, wird in § 10 durch die Verbindung der Theorie der Gruppen mit der der bilinearen Formen ein neuer Gesichtspunkt eröffnet. In den beiden letzten Paragraphen wenden die Verfasser die von ihnen dargelegte Theorie auf das Beispiel der Potenzreihe in Bezug auf einen zusammengesetzten Modul, sowie auf die Untersuchung der Potenzreihe complexer ganzer Zahlen an. V.

G. Frobenius. Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form. Borchardt J. LXXXVI. 44-71.

Sind zwei bilineare Formen A und B (oder Schaaren von quadratischen Formen) durch eine cogrediente lineare Substitution S in einander transformirbar, und bezeichnet man die adjungirten Formen durch A' und B', so wird die Transformationsdeterminante p von S zufolge der Gleichung

$$1)\qquad p^2 = \frac{|rB-B'|}{|rA-A'|}$$

einen von S und r unabhängigen Werth haben, dessen Vorzeichen entweder immer das nämliche ist oder theils positiv theils negativ ausfällt. Herr Frobenius stellt sich nun die Aufgabe, zu entscheiden, wann das eine oder das andere eintritt, und welches im ersteren Falle das Vorzeichen ist, ohne dass eine der Substitutionen S als bekannt vorausgesetzt wird.

Da alle Substitutionen S sich aus einer von diesen s mit denjenigen σ sich zusammensetzen, die A oder eine mit A congruente Form ungeändert lassen, so hat p ein und denselben

Werth oder verschiedene Werthe, je nachdem die σ alle eigentlich oder auch zum Theil uneigentlich sind. Nun wird gezeigt, dass wenn die Determinante von $rA - A'$ weder identisch verschwindet, noch einen für $r = 1$ verschwindenden Elementartheiler von ungradem Exponenten hat (diese Fälle werden zuvor erledigt), die σ alle eigentlich sind. Um noch das Vorzeichen von p zu bestimmen, genügt es, eine Gleichung $b = ap$ zu finden, in welcher a und b von Null verschiedene, rationale, aus den Coefficienten von A und B analog gebildete Functionen bedeuten. Eine solche Function a nennt Herr Frobenius die schiefe Invariante von A. Wenn die rechte Seite von (1) für $r = 1$ nicht $\frac{0}{0}$ wird, so folgt aus der Gleichung

$$p^2 = \frac{|B-B'|}{|A-A'|}$$

auch das Vorzeichen von p. Wenn dagegen die für $r = 1$ verschwindenden Elementartheiler von gradem Exponenten sind, so wird das Anfangsglied der Entwickelung von $rA-A'$ nach Potenzen von $r-1$ das Quadrat einer rationalen gebrochenen Function a der Coefficienten, welche die schiefe Invariante liefert.

In den § 5—9 beschäftigt sich der Verfasser mit der Ermittelung der schiefen Invariante für eine Schaar quadratischer Formen. Dazu wird in § 5—7 eine Contravariante n^{ten} Grades für eine Schaar von bilinearen Formen mit nicht verschwindender Determinante construirt, welche, falls die bilinearen Formen in quadratische mit lauter Elementartheilern von gradem Exponenten übergehen, die schiefe Invariante liefert. Schliesslich wird noch bemerkt, dass auch hier dieselbe sich rational durch die Coefficienten der Grundformen ausdrücken lässt und für den Fall, dass die ersten Unterdeterminanten der Determinanten der Schaar theilerfremd sind, diese rationale Darstellung entwickelt.

V.

L. Stickelberger. Ueber Schaaren von bilinearen und quadratischen Formen. Borchardt J. LXXXVI. 20-43.

Die Weierstrass'sche Reduction von Schaaren quadratischer (resp. bilinearer) Formen auf die Jacobi'sche Normalform beruht auf der, durch eine vorausgehende Substitution erfüllbaren Voraussetzung, dass die Unterdeterminanten, welche die Nenner der einzelnen Quadrate (resp. Produkte) bilden, nicht verschwinden, und keine mit der ganzen Determinante einen Theiler gemein hat, der nicht auch in allen anderen Unterdeterminanten desselben Grades enthalten ist. In der eleganten Darstellung, welche Herr Darboux von dieser Reduction gegeben hat (vergl. auch Gundelfinger, Anal. Geometrie von Hesse, 3te Auflage) findet sich insofern eine Lücke, als kein strenger Beweis vorliegt, dass in derselben die genannte Voraussetzung erfüllt ist. Diese Schwierigkeit beseitigt Herr Stickelberger durch den folgenden, mannigfacher Specialisirungen fähigen Satz, der auf Grund einer der Weierstrass'schen nachgebildeten Reductionsmethode bewiesen wird:

Ist die Determinante in der Schaar bilinearer Formen $C = rA - B$ nicht identisch Null, und bestimmt man in den Determinanten:

$$W_{\nu-1} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & v_1 & \dots & v_1^{\nu-1} & v_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & \dots & c_{nn} & v_n' & \dots & v_n^{\nu-1} & v_n \\ u_1' & \dots & u_n' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ u_1^{\nu-1} & \dots & u_n^{\nu-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & \dots & u_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$w_\nu = W_{\nu-1} \text{ für } u_\alpha = u_\alpha^\nu,\ v_\alpha = v_\alpha^\nu$$

die Constanten u_α', v_α', so dass w_1 durch keine höhere Potenz des Lineartheilers $r-c$ der Determinante w theilbar ist, als alle Coefficienten der bilinearen Form $W(=W_0)$, alsdann v_α^2, u_α^2 so, dass w_α durch keine höhere Potenz von $r-c$ theilbar ist, als alle Coefficienten von W_2 u. s. w.; so ist auch w_ν durch keine höhere Potenz von $r-c$ theilbar, als sämmtliche ν^{ten} Unterdeterminanten von w. Auf eine Reihe anderer, für die Theorie der Reduction bilinearer Formen wichtiger Bemerkungen kann hier nur hingewiesen werden. V.

G. FROBENIUS. Ueber adjungirte lineare Differentialausdrücke. Borchardt J. LXXXV. 185-207.

Siehe Abschn. VI. Cap. 2.

G. FROBENIUS. Theorie der bilinearen Formen mit ganzen Coefficienten. Borchardt J. LXXXVI. 147-208.

Zwei Schaaren bilinearer Formen

$$A = rA' + A'' \quad \text{und} \quad B = rB' + B'',$$

deren Determinanten nicht identisch verschwinden, sind bekanntlich äquivalent, wenn der grösste gemeinsame Divisor d_λ der Determinanten λ^{ten} Grades ($\lambda = 1 \dots n$) für beide Determinanten derselbe ist. Bei dem Beweise dieses Satzes hat man sich nach Herrn Weierstrass' Vorgange der Transformation von A in eine reducirte Form bedient, deren Coefficienten von den Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades abhängen. Da indessen durch rationale Operationen entschieden werden kann, ob zwei Formen äquivalent sind, und welches die Coefficienten einer Substitution sind, die A in B überführt, so war es wünschenswerth einen Beweis zu besitzen, der die Einführung von Irrationalitäten vermeidet.

Fasst man mit Herrn Frobenius die Form A so auf, dass ihre Coefficienten ganze (lineare) Functionen eines Parameters sind, so bezeichnet das Sylvester-Weierstrass'sche Theorem die Umstände, unter denen eine von jenem Parameter unabhängige Substitution existirt, welche A in B verwandelt. Auf diese Weise sah sich Herr Frobenius dazu geführt, allgemein die Theorie der bilinearen Formen mit ganzen Coefficienten zu untersuchen, deren Resultate sich dann auf diejenigen übertragen lassen, deren Coefficienten ganze Functionen von r sind. Mit der Untersuchung solcher Formen hatte sich unter etwas specielleren Gesichtspunkten und unabhängig von Frobenius bereits Herr Smith beschäftigt (Phil. Transact. Vol. 151, 293-326, Proc. L. M. S. IV. 236-253, s. F. d. M. V. p. 96). Da zwei äquivalente bilineare Formen sich stets durch unimodulare Substitutionen in einander transformiren lassen (§ 4

S. 160), so genügt die Betrachtung der letzteren. Nachdem die Construction einer unimodularen Transformation in § 2 gelehrt worden, wird die Lösung der bilinearen Gleichung:

$$\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = f,$$

(wo f der grösste gemeinsame Divisor der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$), nach zwei verschiedenen Methoden entwickelt. Auf Grund dieser beiden Hülfsmittel ergiebt sich die Transformation der Form A in die reducirte:

$$F = f_1 x_1 y_1 + f_1 f_2 x_2 y_2 + \cdots f_1 f_2 \cdots f_l x_l y_l,$$

in welcher l den Rang von A, d. h. den kleinsten Grad der nicht sämmtlich verschwindenden partialen Determinanten gleichen Grades von A bezeichnet. Setzt man $e_\lambda = f_1 f_2 \ldots f_\lambda$, so wird

$$F = e_1 x_1 y_1 + \cdots + e_l x_l y_l;$$

mithin sind die grössten gemeinsamen Divisoren d_λ der Determinanten λ^{ten} Grades:

$$d_\lambda = e_1 e_2 \ldots e_\lambda,$$

woraus folgt, dass nicht allein die Elementartheiler, $e_\lambda = \dfrac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}}$, sondern auch ihre Quotienten $f_\lambda = \dfrac{e_\lambda}{e_{\lambda-1}}$ ganze Zahlen sind.

Die reducirte Form lehrt dann, dass die Gleichheit der Elementartheiler nothwendig und hinreichend für die Aequivalenz der beiden Formen ist.

Die vorhergehenden Betrachtungen enthalten bei einer etwas veränderten Auffassung (§ 8) zugleich die Grundlage für die Theorie der linearen ganzzahligen Gleichungen. Verfasser beweist den Satz, dass mehrere homogene, lineare Functionen, wenn in deren Coefficientensystem diejenigen Determinanten keinen Divisor gemeinsam haben, deren Grad gleich dem Range des Systems ist, alle ganzzahligen Werthe, welche den zwischen ihnen bestehenden linearen Relationen genügen, für ganzzahlige Werthe der Variabelen annehmen können. Wenn also in einem System von m unabhängigen Formen:

$$k_\alpha = k_{\alpha_1} y_1 + \cdots k_{\alpha p} y_p; \quad \alpha = 1, 2 \ldots m$$

der grösste gemeinsame Divisor r der Determinanten m^{ten} Grades > 1 ist, so wird die Gesammtheit der durch diese darstellbaren

Werthsysteme als Modul k vom Range m bezeichnet. Für $k_a = ky_\alpha$ schreibt Herr Frobenius einfach mod. k. Zwei Zahlensysteme a_a, e_a heissen dann congruent (mod. k), wenn

$$a_\alpha = b_a + k_{a_1} y_1 + \cdots k_{a_p} y_p.$$

Es sei ferner die Zahl der mod. K (oder k) incongruenten Systeme, die in den m linearen Formen

$$A_a = a_{a_1} x_1 + \cdots a_{a_n} x_n$$

enthalten sind, durch (AK) oder (Ak) bezeichnet. Von dieser, namentlich von Herrn Dedekind entwickelten Erweiterung der Zahlenbegriffe ausgehend, untersucht nun der Verfasser zunächst die linearen Congruenzen und ihre Lösungen, dann (§ 11) die Aequivalenz bilinearer Formen in Bezug auf einen Modul k. Dabei heissen zwei Formen A, B congruent (mod. k), wenn $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$ (mod. k) ist, sie heissen äquivalent (mod. k), wenn jede in eine der andern congruente Form durch Substitutionen übergeführt werden kann, deren Determinanten relativ prim zum Modul k sind. Alsdann kann auf analogem Wege, wie oben, bewiesen werden: Zwei Formen sind mod. k äquivalent, wenn sie in den Elementartheilern (mod. k) übereinstimmen. Ferner folgt, dass für zwei solche Formen $(A,k) = (B,k)$ ist, u. s. w. Endlich schliesst sich hieran (§ 12) die Untersuchung linearer Formensysteme. Zwei solche Systeme A_α und B_a ($\alpha = 1 \dots m$) sind äquivalent, wenn der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten n^{ten} Grades in drei Systemen von Coefficienten, von denen das erste aus denen von A_α, das zweite aus denen von B_α, das dritte aus denen von A_α und B_α zusammengesetzt ist, den nämlichen Werth hat, welche nothwendige und hinreichende Bedingung mit Hülfe verschiedener Congruenzsysteme so ausgesprochen werden kann, dass sie die Gleichheit eines vollständigen Systemes von Invarianten der beiden Systeme ausdrückt. Die vorhin entwickelten Sätze lassen sich auf solche Formen übertragen, deren Coefficienten ganze Functionen eines Parameters r sind. Zwei bilineare Formen A, B sind daher äquivalent, wenn die auf dem oben beschriebenen Wege ermittelten Elementartheiler übereinstimmen. Und dann lassen sich rational zwei Substitutionen

P_0, Q_0 finden, welche A in B transformiren, so dass $P_0 A Q_0 = B$ wird (F. d. M. IX. p. 88). Endlich lassen sich, wenn r linear in den Coefficienten vorkommt, aus P_0 und Q_0 zwei von r unabhängige Substitutionen derselben Eigenschaft herleiten. Dies ist aber der Eingangs erwähnte Satz. V.

J. J. SYLVESTER. On a rule for abbreviating the calculation of the number of in- and covariants of a given order and weight in the coefficients of a binary quantic of a given degree. Messenger (2) VIII. 1-8.

Wenn i der Grad einer Form ist, ist bekanntlich die Zahl ihrer In- oder Covarianten von der Ordnung j und dem Gewicht w in den Coefficienten gleich $(w:i,j)-\{(w-1):i,j)$, wo $(x:i,j)$ im Allgemeinen die Zahl der Zusammensetzung von x mit j Zahlen bezeichnet, deren jede irgend einen Werth von 0 bis i (beide incl.) oder: was dasselbe ist, mit i Zahlen, deren jede einen Werth von 0 bis j hat. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie man die Differenz zwischen den obigen beiden Zahlen berechnen kann, ohne jede einzeln zu berechnen, wodurch die Weitläufigkeit der Rechnung wesentlich gegen die sonst übliche beschränkt wird. Der Fall, wo i oder j unendlich, wird besonders in einem Zusatz zu der Arbeit betrachtet. Glr. (O.)

J. J. SYLVESTER. Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants. Phil. Mag. 1878.

Der Satz wartet seit länger als einem Vierteljahrhundert auf einen Beweis, und ein Beweis desselben wäre doch um so mehr nothwendig, als man vermuthet, dass der Satz zu falschen Schlüssen geführt hat. Er bildet die Grundlage der Untersuchungen im Anfang der zweiten Cayley'schen Abhandlung: „On Quantics".

Man denke sich eine binäre Form: $(a, b, c \dots l \between (xy)^i$. Bildet man dann eine rationale Function der Elemente $a, b, c, \dots l$, welche

dem Werthe nach unverändert bleibt, wenn man für sie die Elemente einer neuen Form substituirt, die aus der ursprünglichen Form hervorgeht, indem man in ihr $x+hy$ für x setzt, so heisst dieselbe ein „Differentiant nach x" der gegebenen Form. Unter einem Differentianten von gegebenem Gewicht w und der Ordnung j wird ein solcher verstanden, bei welchem in jedem Gliede die Combination der Elemente von der j^{ten} Ordnung und die Summe ihrer Gewichte w ist, wenn man die Gewichte der successiven Elemente rechnet als resp. $0\ 1\ 2 \dots i$. Der zu beweisende Satz ist dann der folgende: „Die Zahl willkürlicher Constanten in dem allgemeinsten Ausdruck eines solchen Differentianten (von der Ordnung j und dem Gewicht w) ist gleich der Differenz zwischen der Zahl von Wegen, auf welchen w aus je j der ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots i$ (mit Wiederholungen) und der Zahl von Wegen, auf denen $w-1$ aus denselben ganzen Zahlen gebildet werden kann. Csy. (O.)

J. J. Sylvester. On the limits to the order and degree of the fundamental invariants of the binary quantics. Proc. of London XXVII. 11-13.

Die Worte „Ordnung" und „Grad" werden sonst durcheinander gebraucht. In der vorliegenden Arbeit sind sie jedoch in dem Sinne geschieden, dass: Ordnung (order) gleich der Dimension in den Variabeln, Grad (degree) gleich der in den Coefficienten heisst, also der gewohnten deutschen Bezeichnung entgegengesetzt.

Zuerst wird für die Ordnung der allgemeine Satz gegeben: Hat man ein System von Formen von ungrader Ordnung $n, n', n'' \dots$ und von grader Ordnung $\nu, \nu', \nu'' \dots$, dann ist (ausgenommen der Fall, wo das System eine einzelne lineare oder quadratische Function ist), die obere Grenze für die Ordnung einer irreducibelen Covariante

$$\Sigma \tfrac{1}{2}(n^2+1) + \Sigma(\tfrac{1}{2}\nu^2) - 2.$$

Zweitens der Grad. Da die allgemeinen Ausdrücke zu complicirt sind, beschränkt sich der Verfasser auf den Fall einer einzelnen Form von der Ordnung n.

A. n grade $\equiv 0$ (mod. 4). Die obere Grenze für den Grad der Invarianten ist

$$= \tfrac{1}{2}(n+1)(n-4),$$

der Covarianten

$$= \tfrac{1}{2}(n+2)(n-3).$$

B. n grade $\equiv 2$ (mod. 4) und grösser als 2. Die Grenzen sind resp.

$$\tfrac{1}{4}(3n^2-6n-12) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{4}(n+2)(3n-8).$$

C. n ungrade und grösser als 3. Die Grenze für die Invarianten ist $\tfrac{3}{4}(n+1)(n-3)$; und n ungrade und grösser als 1. Die Grenze für die Covarianten ist $\tfrac{1}{4}(3n^2-4n-9)$.

Cly. (O.)

J. J. Sylvester. Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées. Borchardt J. LXXXV. 89-114.

Im vorigen Bande des Jahrbuches wurde über eine Reihe von in den C. R. enthaltenen Noten des Verfassers referirt, die alle zum Ziel hatten, die Zahl der linear von einander unabhängigen, zu einer Grundform gehörigen invarianten Bildungen von gegebenem Grad (in den Variabeln) und gegebener Ordnung (in den Coefficienten der Grundform) festzustellen. Die daselbst angegebenen Sätze und Methoden waren ohne Beweise mitgetheilt, und beruhten nach der Angabe des Verfassers zum Theil auf inductiven Schlüssen; auch wurden dieselben wiederholt modificirt. Es war nur zu ersehen, dass die Betrachtungen sich an Cayley's „second memoir on quantics" anschlossen.

In dem vorliegenden Aufsatze werden nun einige der dort benutzten Sätze bewiesen. Das erste Stück des Aufsatzes (p. 89-99) handelt indess zunächst von einem davon unabhängigen Gegenstande: von einem wenigstens der Form nach neuen Process, aus zwei invarianten Bildungen (dérivées invariantives) eine dritte zu erzeugen. Wie man nämlich aus einer Covariante und einer Contravariante

$$F(x), \quad G(u)$$

nach bekannter Methode dadurch eine neue Contravariante her-

leitet, dass man in $F(x)$ an Stelle der x die Differentialquotienten von $G(u)$ nach den u einsetzt, so verbindet Sylvester dieselben beiden Bildungen auch dadurch, dass er an Stelle der in $F(x)$ stehenden Coefficienten

$$a, b, c, \ldots$$

der Grundformen die Differentialquotienten von $G(u)$, nach denselben Grössen $a, b, c, \ldots$ genommen, einsetzt, wobei diese Differentialquotienten vorher nur mit gewissen einfachen Zahlenfactoren multiplicirt werden müssen und dann u für x setzt. Auch hierdurch wird eine Contravariante der Grundformen erhalten. Es können dabei F und G auch Invarianten sein, wobei also eine neue Invariante resultirt. Ferner kann man auch, wenn

$$F(x), \ G(x)$$

zwei Covarianten sind, zu gleicher Zeit in $F(x)$ die x durch die Differentialquotienten von $G(x)$ nach denselben x und die Grössen $a, b, c, \ldots$ durch die mit den Zahlenfactoren multiplicirten Differentialquotienten von $G(x)$ nach diesen Grössen ersetzen, um eine neue Covariante zu erhalten; und ähnlich für zwei Formen $F(x)$, $G(u)$.

Diese Sätze folgen aus der Betrachtung der linearen Transformation, welcher die Coefficienten der Grundform unterliegen, wenn man die Variabeln linear transformirt. Jene Transformation wird als die durch die zweite „inducirte" bezeichnet. Als zwei „conträre" Substitutionen werden diejenigen bezeichnet, welche man gewöhnlich reciproke nennt: nämlich, zwei Substitutionen

$$x_i = \sum_k a_{ik}\xi_k,$$
$$AX_i = \sum_k A_{ik}\Xi_k,$$

wo A die Determinante der a_{ik} und A_{ik} die Unterdeterminante von A nach a_{ik} ist. Um einfache Ausdrücke der hierhergehörigen Sätze zu erhalten, behandelt Sylvester „präparirte" Grundformen, d. h. solche, deren Glieder noch die Quadratwurzeln aus den Polynomialcoefficienten explicite enthalten, wie

$$a_x^n = a_0 x_1^n + \sqrt{n_1}\,.\,a_1 x_1^{n-1} x_2 + \sqrt{n_2}\,.\,a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n.$$

Für solche Coefficienten a_i hat man dann:

Zwei auf die Variabeln ausgeübte contrâre Substitutionen induciren auch zwei conträre Substitutionen für die Coefficienten.

Bei so präparirter Grundform kann man dann in der Covariante $F(x)$ die Coefficienten $a, b, c, \ldots$ ohne Weiteres durch die $\frac{\partial G(u)}{\partial a}, \frac{\partial G(u)}{\partial b}, \ldots$ ersetzen, und dann die x durch die u, um die neue Contravariante zu erhalten, wie die Transformation der $\frac{\partial G(u)}{\partial a}, \ldots$ lehrt.

Den Uebergang zu dem Folgenden bietet die Betrachtung, dass man auch ebenso die „Differentianten in x" behandeln kann, d. h. die Grössen D_1 bei binären Grundformen, welche durch die Substitution $x + \lambda y$ für x unverändert bleiben, Grössen, welche immer den ersten Coefficienten einer Covariante bilden. Sei nämlich analog D_2 ein „Differentiant in y", eine Grösse, die als erster Coefficient einer Contravariante auftritt. Setzt man in D_2 für die Coefficienten der Grundform die entsprechenden Differentialquotienten von D_1, so erhält man einen neuen „Differentianten in x".

Die Differentianten genügen (siehe Cayley) einfachen partiellen Differentialgleichungen der Form:

$$a \frac{\partial D_1}{\partial b} + 2b \frac{\partial D_1}{\partial c} + 3c \frac{\partial D_1}{\partial d} + \cdots = 0,$$

und unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der hieraus folgenden Gleichungen ergiebt sich nach Cayley, dass die Zahl der linear unabhängigen Differentianten D_1 von der Ordnung j in den Coefficienten, welche zu einer binären Grundform vom Grade i gehören, wenn w das Gewicht von D_1 (wenn $a, b, c, \ldots$ bez. von den Gewichten 0, 1, 2, ... gesetzt werden) ist, gleich wird:

$$(w:i, j) - (w-1:i, j),$$

wo

$$(w:i, j) = (w:j, i) = (ij - w:j, i)$$

die Anzahl der Lösungen in ganzen positiven Zahlen (incl. 0) des Systems

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + \cdots + x_i &= j \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + ix_i &= w \end{aligned}$$

vorstellt. Man weiss, dass $w \gtreqless \frac{ij}{2}$ sein muss, wenn ein D_1 existiren soll. Sylvester zeigt nun zunächst, dass

$$(w:i,j)-(w-1:i,j) \geqq 0, \quad \text{oder} \quad \gtreqless 0,$$

je nachdem $w \gtreqless \frac{ij}{2}$ oder $> \frac{ij}{2}$.

Ohne jene Unabhängigkeit vorauszusetzen wird dann auf combinatorischem Wege nachgewiesen, dass jene Zahl der D_1 gleich der angegebenen $(w:ij)-(w-1:i,j)$ wird.

Jedem solchen Differentianten entspricht eine Covariante vom Grade $ij-2w$. Wenn dann

$$K(i,j:ij-2w)$$

die Anzahl der Covarianten vom Grade ij-$2w$ und von der Ordnung j bedeutet, so hat man z. B.

$$K(i,j:0)+2K(i,j:1)+3K(i,j:2)+\cdots = \frac{(i+j)(i+j-1)\dots(i+1)}{1.2.3\dots j}.$$

Nr.

J. J. Sylvester. Détermination d'une limite supérieure au nombre total des invariants et covariants des formes binaires. C. R. LXXXVI. 1437-1441, 1491-1492, 1519-1522.

Sylvester benutzt hier den in den früheren Noten eingeschlagenen und im vorhergehenden Referate charakterisirten Weg zur Ermittelung von oberen Grenzen für die Zahl der Covarianten einer bestimmten Ordnung bei einer binären Grundform des Grades $2i$. Um die Lösungen der Gleichungen (s. d. vorherg. Referat)

$$x_1 + x_1 + \cdots + x_i = j$$
$$x_1 + 2x_2 + \cdots + ix_i = w$$

zu finden, dient eben die erzeugende Function von Cayley (s. F. d. M. IX. 76). Auch die genannten oberen Grenzen hängen von algebraischen Summen der Coefficienten dieser erzeugenden Function ab. Diese sind endlich, wodurch dann ein neuer Beweis des Gordan'schen Satzes von der Endlichkeit des Formensystems, wie es scheint, ohne Benutzung von Inductionsschlüssen, herge-

stellt ist. Die hier angegebenen Grenzen sind verhältnissmässig sehr niedrig, wie sich an Beispielen für die Formen zweiten bis achten Grades zeigt. So findet sich für die Gesammtzahl der Formen des Systems einer Form achten Grades als obere Grenze 80, während die früher angewandten Methoden als untere Grenze 69 liefern. Sylvester drückt noch den Wunsch aus, dass die Form achten Grades auch nach dem Gordan'schen (erweiterten ersten Cayley'schen) Verfahren behandelt werde, zur Vergleichung mit seinen Resultaten; was aber wohl zu schwer durchführbaren Rechnungen führen würde. Nr.

C. Jordan. Sur les covariants des formes binaires. C. R. LXXXVII. 202-204.

Jordan behandelt dieselbe allgemeine Frage auf dem Gordan-schen Wege, wie nach dem vorhergehenden Referate Sylvester auf dem zweiten Cayley'schen Wege. Er gelangt jetzt zu niedrigeren Grenzen für den Grad der Covarianten des Systems, als früher (F. d. M. VIII. p. 59). Nr.

J. J. Sylvester. Sur les covariants fondamentaux d'un système cubo-quartique binaire. C. R. LXXXVII. 242-244, 287-289.

J. J. Sylvester. Sur le vrai nombre des formes irréductibles du système cubo-biquadratique. C. R. LXXXVII. 445-448.

J. J. Sylvester. Détermination du nombre exact des covariants irréductibles du système cubo-biquadratique binaire. C. R. LXXXVII. 477-481.

J. J. Sylvester. Sur les covariants irréductibles du quantic du septième ordre. C. R. LXXXVII. 505-509.

J. J. Sylvester. Sur la forme binaire du 7e ordre. C. R. LXXXVII. 899-908.

J. J. SYLVESTER. A synoptical table of the irreducible invariants and covariants to a binary quintic.
Am. J. I. 370-378.

Diese Noten geben Anwendungen der Methoden des Verfassers, die zur Bestimmung der Zahl der Formen des Systems dienende „erzeugende Function“ zu diesem Zwecke auf verschiedene Weise umzugestalten (s. F. d. M. IX. p. 77). Diese noch unbewiesenen Methoden werden erst an dem Beispiel des Systems zweier binären Formen von den Graden 3 und 4 geprüft, wobei sich 3 Formen weniger ergeben, als bei Gundelfinger; und diese 3 Formen zeigen sich in der That als reducibel. Die vierte und fünfte Note stellen die ganze Tafel des Systems der Form siebenten Grades auf, wobei sich indess in der letzteren ergiebt, dass die sonst vorgenommene Herstellung der kanonischen Form der erzeugenden Function hier nicht zulässig ist.

In der sechsten wird die Tafel des Systems einer binären Form fünften Grades gegeben, abgeleitet aus der kanonischen Form $x^5+y^5+z^5$, wo die x, y, z durch eine lineare Relation verbunden sind. Nr.

J. J. SYLVESTER. Sur la loi de réciprocité pour les invariants et covariants des quantics binaires.
C. R. LXXXVI. 446-448.

J. J. SYLVESTER. Note on M. Hermite's law of reciprocity. Appendix 2 to „on an application of the new atomic theory etc.“ Am. J. I. 90-118.

Der Hermite'sche Satz, nach welchem man jeder Covariante von der Ordnung j und dem Grade $ij-2w$ einer binären Form i^{ten} Grades eine Covariante von der Ordnung i und dem Grade $ij-2w$ einer binären Form j^{ten} Grads zuordnen kann, wird aus deren Darstellung in den Differenzen der Wurzeln der Grundform bewiesen. Geht man so von einer Form A vom Typus $(i, j : ij-2w)$ (vgl. das obige Referat pag. 87) zu einer Form B vom Typus $(j, i : ij-2w)$, so gelangt man, wenn man denselben

Process auf B anwendet, sobald mehrere Formen desselben Typus existiren, im Allgemeinen nicht zur ursprünglichen Form A zurück. Vielmehr bestimmen sich die Formen, welche durch den doppelten Process auf sich zurückführen, durch specielle Gleichungen, vom selben Grade wie die Anzahl der Formen des Typus. Auch wird die Ausdehnung des Satzes auf Formen gegeben, die zu mehreren Grundformen simultan gehören, wobei die Vertauschung in Bezug auf jede einzelne Grundform vorgenommen werden kann, ohne dass man durch die verschiedenen Vertauschungen zu verschiedenen Systemen von in sich zurückführbaren Formen käme. Nr.

J. J. Sylvester. Sur la théorie des formes associées de MM. Clebsch et Gordan. C. R. LXXXVI. 448-450.

J. J. Sylvester. On Clebsch's theory of the „einfachstes System associirter Formen („Bin. Formen") and its generalisation. Appendix 3 to „on an application of the new atomic theory etc." Am. J. I. 118-124.

Clebsch hat aus der Hermite'schen Theorie der associirten Formen ein einfachstes System von Formen abgeleitet, durch welche alle Formen des Systems, wenn multiplicirt mit einer Potenz der binären Grundform f, als rationale und ganze Functionen ausgedrückt werden können (Bin. Formen, p. 330). Dieses Theorem wird von Sylvester aus dem Verhalten der „Differentianten" abgeleitet und auch auf simultane binäre Systeme ausgedehnt. Die Ausdehnung auf 2 Formen ist übrigens schon von Gundelfinger, Borchardt J. LXXIV. p. 87 (siehe F. d. M. III. 36) geschehen. Nr.

J. J. Sylvester. On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics; — with 3 appendices. Am. J. I. 63-125.

W. Clifford. Extract of a letter to Mr. Sylvester. Am. J. I. 126-129.

J. C. Malet. Some remarks on a passage in Prof. Sylvester's paper as to the atomic theory. Am. J. I. 277-282.

Es liegt nahe, die Formeln der neueren Chemie, der atomistischen Theorie, in der symbolischen Form der Invarianten binärer Formen anzuschreiben. Bezeichnet man die Elemente durch binäre Formen, deren Grad gleich dem der Werthigkeit des Elementes ist, setzt man also:

$$\begin{aligned} H &= h_x = h'_x = h''_x = \cdots h_{1x} = \cdots \\ O &= o_x^2 = o_x'^2 = o_x''^2 = \cdots \\ C &= c_x^4 = c_x'^4 = c_x'' = \cdots \\ N &= n_x^5 = n_x'^5 = n_x''^5 = \cdots \qquad \text{etc.}, \end{aligned}$$

so erhält man für gesättigte Verbindungen Invariantenausdrücke, wie:

$$2O = (oo')^2, \quad H_2O = (ho)(h'o),$$
$$H_4C = (hc)(h'c)(h''c)(h'''c), \quad NO_3H = (no)^2 (no')^2 (no'')(o''h).$$

Die graphischen Darstellungen, welche von den Chemikern für diese Verbindungen benutzt werden, und die darin bestehen, dass man die Elemente durch Punkte, die Zusammenhänge (oo', etc.) durch verbindende Striche wiedergibt, können also auch zur Repräsentation der Invariantenausdrücke dienen.

Dabei ist zunächst zu beachten, dass der Kern einer Verbindung oder eine ungesättigte Verbindung durch eine Covariante dargestellt wird, so das Ladenburg'sche Bild des Benzolkerns durch

$$(cc_1)(c_1c_2)(c_2c_3)(c_3c_4)(c_4c_5)(c_5c)(cc_3)(c_1c_4)(c_2c_5)\, c_x c_{1x} c_{2x} c_{3x} c_{4x} c_{5x}.$$

Ferner ist zu beachten, dass nicht jedem Körper eine Invariante entspricht; so ist schon Wasserstoff nicht mehr durch (hh') darstellbar, da $(hh') = 0$ wird. Hier liegt also bereits, wenn man nicht den Wasserstoff als einen zusammengesetzten Körper auffassen will, eine Lücke in der Zuordnung vor.

Bei dieser bildlichen Darstellung einer Invariante oder Co-

variante von binären Formen wird das Gewicht derselben gleich der Anzahl der gebundenen Werthigkeitseinheiten, also der Striche zwischen den Punkten des Bildes. Der Verfasser untersucht nun die Frage, welche Eigenschaften das Bild hat, wenn die invariante Form reducibel ist, wie die oben hingeschriebene Covariante sechsten Grades; und zeigt an einigen Beispielen, wie man dann das Bild eines Products aus den Bildern der einzelnen irreducibeln Factoren zusammensetzen und deformiren kann. Einer Invariantenbeziehung entspricht überhaupt die Möglichkeit einer Deformation der Bilder der verschiedenen Formen in einander. Besonders müsste sich auch das Hermite'sche Reciprocitätsgesetz (vgl. d. B. p. 89) zunächst graphisch prüfen lassen, und dann auch chemisch, da sich hiernach m n-werthige Atome durch n m-werthige ersetzen liessen.

Die Anhänge enthalten Bemerkungen über die Ausdrücke der „Differentianten" durch die Wurzeldifferenzen und über die in den beiden vorhergehenden Referaten behandelten Punkte.

Die hier niedergeschriebenen Invariantenausdrücke für die chemischen Darstellungen sind in Sylvester's Abhandlung nur ihrem Typus nach angegeben, während er den Ausdruck selbst nicht eindeutig zuzuordnen weiss. Diese Lücke ist in dem Brief von Clifford ausgefüllt, wo aber die Symbole für die m-werthigen Elemente m-fach lineare Ausdrücke sind.

Die Bemerkungen von Malet sind chemischer und historischer Art. Nr.

A. Capelli. Sopra un punto della teoria delle forme binarie. Battaglini G. XVI. 217-224.

Clebsch hat in seiner ersten Arbeit über symbolische Darstellung einen Process angegeben, durch den jede invariante Bildung aus ihrem Ausdruck in den Wurzeldifferenzen der Grundformen in den symbolischen Ausdruck übergeführt wird (s. auch „Bin. Formen", § 20). Dieser Process wird hier etwas eingehender entwickelt, unter Bestimmung der dabei auftretenden Zahlenfactoren. Nr.

G. Pittarelli. Nota sugli scorrimenti (Ueberschiebungen) delle forme binarie. Battaglini G. XVI. 225-233.

Diese Note ist unverständlich, da der Verfasser homogene Functionen von ungleichen Dimensionen zu homogenen Functionen additiv zusammensetzt. Nr.

F. Lindemann. Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (2me note). Bull. S. M. F. VI. 195-208.

Fortsetzung der Note, über welche im vorigen Jahrgang, pag. 81, referirt worden ist. Die dort bezeichnete specielle Curve α_z^2 wird aus der allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung abgeleitet, welche durch die Schnittpunkte von α_x^n mit dem Kegelschnitt geht. Als Anwendung wird die Bedingung der Berührung zweier Kegelschnitte untersucht. Nr.

B. Igel. Die simultanen Invarianten, aus denen sich die Resultante dreier ternären quadratischen Formen zusammensetzt. Wien. Ber. 1878. 96.

Siehe Abschnitt IX.

A. Cayley. A tenth memoir upon quantics. Phil. Trans. CLXIX. 603-661.

Die Abhandlung betrifft einen Gegenstand aus der Theorie der binären Formen fünfter Ordnung $(*\between x, y)^5$, mit dem sich der Herr Verfasser schon längere Zeit beschäftigt. Es war nämlich zuerst hauptsächlich beabsichtigt, eine Theorie derjenigen canonischen Form zu geben, die von dem Verfasser entdeckt und kurz in Salmon's „higher algebra“ (1876), p. 217—218, angeführt ist. Schreibt man $a, b, c \dots u, v, w$ für die 23 Covarianten der Form fünfter Ordnung, dann sind a, b, c, d, e, f durch die Gleichung

$$f^2 = -a^3d + a^2bc - 4c^3$$

verbunden; und die Form enthält diese Covarianten so miteinan-

der verbunden, und ebenso die übrigen; alsdann ist die Form in der That folgende:

$$(1,\ 0,\ c,\ f,\ a^2b-3c^2,\ a^2e-2cf \between x,\ y)^5.$$

Der Plan der Arbeit wurde hingegen verändert durch die Untersuchungen Sylvester's über die von ihm sogenannte numerische „erzeugende Function“ (N. G. F., i. e. numerical generating function) der Covarianten der Form fünfter Ordnung und durch des Verfassers darauf folgende eigene Einführung der „wirklichen erzeugenden Function“ (R. G. F., i. e. real generating function) derselben Covarianten. Dadurch war es ermöglicht, für jeden gegebenen Grad der Coefficienten und für jede Ordnung der Variabeln, oder (wie er es ausdrückt) für jede gegebene „Grad-Ordnung“ (deg-order) ein besonderes System von Potenzen und Producten der Covarianten aufzustellen, nämlich ein System von „abgesonderten Formen“ (segregates): Diese sind nicht syzygetisch, d. h. nicht untereinander durch eine lineare Gleichung mit numerischen Coefficienten verbunden, und sie sind folglich so beschaffen, dass jede andere Combination der Covarianten derselben Grad-Ordnung sich als lineare Function mit numerischen Coefficienten durch die abgesonderten Formen dieser Grad-Ordnung ausdrücken lässt (und dies natürlich nur auf eine Art). So ist in dem einfacheren Fall der binären Form vierter Ordnung die N. G. F. in des Verfassers „Ninth Memoir“ (1871 siehe F. d. M. III. 40) gegeben; sie ist gleich

$$\frac{1-a^6x^{12}}{(1-ax^4)\,(1-a^2x^4)\,(1-a^2)\,(1-a^3)\,(1-a^3x^6)},$$

und dort hat der obige Satz die Bedeutung, dass die Anzahl der nicht-syzygetischen Covarianten $a^\vartheta\, x^\mu$ der Grad-Ordnung $\vartheta\,\mu$ gleich dem Coefficienten von $a^\vartheta\, x^\mu$ in der Entwickelung dieser Function ist. Daraus folgt, dass die Covarianten sind: $(ax^4,\ a^2x^4,\ a^2,\ a^3,\ a^3\, x^6)$, die binäre Form vierter Ordnung selbst, die Hesse'sche Determinante, die quadratische Invariante, die cubische Invariante und die cubische Covariante, verbunden durch eine syzygetische Gleichung von der Grad-Ordnung 6.12. Sind z. B. a, b, c, d, e die Covarianten, so heisst diese Gleichung:

$$e^2 = -a^3d + a^2bc - 4c^3.$$

Die neue Form, oder die R. G. F. ist

$$\frac{1-e^2}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(1-e)}.$$

Die Entwickelung derselben enthält nur Glieder von der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ und $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e$, alle mit dem Coefficienten $+1$, so dass die Anzahl der Glieder für eine gegebene Grad-Ordnung $\vartheta\mu$ gleich dem Coefficienten von $a^\vartheta x^\mu$ in der zuerst erwähnten Function ist, und diese Glieder für eine gegebene Grad-Ordnung stellen die nicht-syzygetischen Covarianten dieser Grad-Ordnung dar; jede andere Covariante derselben Grad-Ordnung lässt sich als lineare Function jener darstellen. Ist z. B. die Grad-Ordnung $= 6.12$, so sind die Glieder der R. G. F. gleich $a^3 d$, $a^2 bc$, c^3; es gibt hier ein Glied e^2 mehr von derselben Grad-Ordnung; daher muss e^2 eine lineare Function jener sein, und wir erhalten in der That die obige Gleichung

$$e^2 = -a^3 d + 3a^2 bc - 4c^3.$$

Dieselbe Theorie lässt sich auf die binäre Form fünfter Ordnung anwenden. Die R. G. F. ist

$$\begin{aligned}
&\{(1-b^5)(1-v)+(1-b^3)(0+t)+(1-b^2)(e+k)+(1-b)f \\
&+(1-ag^2)(d+h+j+m+dj+hj+j^2+jm) \\
&+(1-bg)(l+jo+js) \\
&+(1-b^2g)(i+n+p+jk) \\
&+(1-abg)s \\
&+(1-g)jt \\
&+(1-a)w\} : \{(1-a)(1-b)(1-c)(1-g)(1-q)(1-u)\}.
\end{aligned}$$

Kehren wir zur canonischen Form der binären Form fünfter Ordnung zurück und betrachten die Gleichung

$$f^2 = -a^3 d + a^2 bc - 4c^3,$$

so ist ersichtlich, dass jede Covariante, multiplicirt mit einer Potenz der Form a fünfter Ordnung selbst, sich als rationale und ganze Function der Covarianten a, b, c, d, e, f, die linear in Bezug auf f ist, darstellen lässt und dies nur auf eine Weise, oder es kann jede Covariante in der „Normal"-(standard-) Form dargestellt werden, und zwar nur auf eine Weise. Als Beispiel nehme man $a^2 h = 6\,acd + 4\,bc^2 + ef$. Umgekehrt kann ein Aus-

druck in Normalform, der explicite nicht theilbar durch $\underline{a}$, sehr wohl durch eine Potenz von $\underline{a}$ wirklich theilbar sein (wo der Ausdruck für den Quotienten folglich eine oder mehrere von den höheren Covarianten g, h etc. enthält), und in diesem Falle sagt man, der Ausdruck sei theilbar und habe getheilt die Form eines Quotienten, der als rationale und ganze Function der Covarianten ausgedrückt ist. Diese Form ist jedoch nicht vollständig bestimmt; sie wird erst bestimmt, wenn sie in der obigen abgesonderten Form dargestellt wird, und eine solche weitere Reduction ist nothwendig. Die Covarianten der canonischen Form sind auf Tafel 97 in der Normalform, auf Tafel 98 in der Quotientenform und (mit Ausnahme einiger wenigen Coefficienten) in abgesonderter Form dargestellt.

Die canonische Form ist besonders geeignet, um die Ausdrücke für die einzelnen „Ueberschiebungen" (nach Gordan, hier „derivatives") $(a, b)^1$, $(a, b)^2$ etc., oder nach des Verfassers Bezeichnung $ab\,1$, $ab\,2$ etc. zu erhalten, welche aus zwei gleichen oder verschiedenen Covarianten als rationale und ganze Functionen der einzelnen Covarianten gebildet werden können. Es mag daran erinnert werden, dass diese Ueberschiebungen in Gordan's Theorie benutzt werden, um das System der 23 Covarianten aufzustellen, aber der Verfasser betrachtet sie vorzugsweise, um das System der Covarianten zu haben und mit ihrer Hülfe das System der Ueberschiebungen zu erhalten. Die einzelnen Ueberschiebungen für den Grad 6 sind auf Tafel 100 gegeben. Am Schlusse der Abhandlung werden 2 Ausdrücke, deren einer oder welche beide von Sylvester herrühren, für die N. G. F. einer binären Form sechster Ordnung gegeben.

Cly. (M.)

R. Sturm. Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve. Borchardt J. LXXXVI. 116-146.

Da die Coordinaten eines Punktes auf einer cubischen Raumcurve sich als homogene Functionen von zwei Veränderlichen darstellen lassen, so kann jede binäre Form statt durch Punkte

einer Geraden durch diejenigen Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung dargestellt werden, für deren Parameterwerthe sie verschwindet. Die Beziehungen zwischen verschiedenen Formen gehen dann in solche zwischen den Punktgruppen über, welche diese Formen darstellen. Von diesem Grundgedanken ausgehend, stellt der Verfasser obiger Abhandlung die Relationen auf, die sich auf cubische und biquadratische Formen gründen, indem er dabei besonders von der apolaren Lage zweier Punktgruppen, entsprechend der apolaren, symbolisch durch die Gleichung

$$(ab)^i a_x^{n-i} = 0$$

ausgedrückten Beziehung, Gebrauch macht. Es ist nicht möglich, an dieser Stelle einen Ueberblick über die reiche Fülle der sich ergebenden Sätze zu geben, sondern es muss in dieser Hinsicht auf die Arbeit selbst verwiesen werden. St.

V. Cerruti. De formae cujusvis quadraticae in semetipsam transformatione. Acc. R. d. L. (2) II. 48.

Die Bewegung im Raume constanter Krümmung kann bekanntlich bei geeigneter Bestimmung der Variabeln als Transformation einer quadratischen Form in sich selbst aufgefasst werden. Die hiernach mit der genannten Transformation verknüpften geometrischen Beziehungen werden in dieser Arbeit besprochen. V.

F. d'Arcais. Nota sopra un teorema nella teoria delle forme binarie. Mem. di Bologna (3) IX. 173-180.

M. Lévy. Sur les conditions, pour qu'une forme quadratique de différentielles puisse être transformée de façon que ses coefficients perdent une partie de la totalité des variables qu'ils renferment. C. R. LXXXVI. 463-466.

Siehe Abschn. VI. Cap. 2.

Invarianti, covarianti, contravarianti delle funzioni omogenee. Acc. P. d. L. XXXI. 249-316.

C. le Paige. Sur certains covariants d'un système cubo-biquadratique, nebst Rapport von F. Folie. Bull. de Belg. (2) XLVI. 765-771.

Ausdruck einer gewissen schiefen Covariante eines cubo-biquadratischen Systems als ganze rationale Function dreier fundamentaler Covarianten. Werth einer gewissen Invariante zehnter Ordnung einer binären Form sechsten Grades. Mn. (O.)

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

Forestier. Quelques méthodes d'élimination entre deux équations. Mém. de Toul. (7) IX. 142-163.

H. Lemonnier. Mémoire sur l'élimination. Ann. de l'Éc. N. (2) VII. 77-100, 151-214.

Diese Abhandlung zerfällt in drei Theile. Im ersten giebt der Verfasser eine äusserst sorgfältige und ausführliche Darstellung der verschiedenen von Sylvester, Bezout, Cauchy gegebenen Methoden zur Herstellung der Bedingungen dafür, dass zwei Gleichungen mit einer Unbekannten eine oder mehrere Wurzeln gemein haben, und der Gleichung, welche diese gemeinsamen Wurzeln giebt. Er zeigt die nahe Beziehung, welche zwischen diesen Methoden besteht, indem die Gleichungen, welche bei einer angewandt sind, lineare Combinationen der Gleichungen der anderen sind, und stellt eine einfache praktische Regel auf, um die gesuchten Bedingungen und den gemeinsamen Theiler in Determinantenform zu bilden. Im zweiten Theile werden zunächst die bei der

gewöhnlichen Methode des grössten gemeinsamen Theilers entstehenden Polynome untersucht und die Faktoren hergestellt, um welche sie sich von den Determinantenausdrücken des ersten Theiles unterscheiden. Das Gleiche geschieht dann mit denjenigen Formen, welche die oben erwähnte praktische Regel liefert. Mit Hilfe dieser Regel werden dann die Sturm'schen Functionen in Form von Determinanten aufgestellt und gezeigt, dass die Coefficienten der höchsten Potenzen der so gefundenen Ausdrücke mit den von Borchardt gegebenen übereinstimmen. Zum Schlusse endlich werden die gefundenen Regeln auf eine Reihe von Beispielen angewandt.

Im dritten Theile werden zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten betrachtet und auf sie die früher gegebenen Regeln angewandt; das so sich ergebende Auflösungsverfahren wird dann mit dem von Labatie verglichen und gezeigt, dass dieses letztere mit Factoren complicirt ist, die bei dem ersteren nicht auftreten. Die Anwendung auf einige Beispiele schliesst die lesenswerthe Abhandlung. Lth.

J. Toeplitz. Zur Theorie der Elimination. Schlömilch Z. XXIII. 61-66.

Nach einer kurzen Herleitung der Bedingungen dafür, dass zwei Gleichungen mit einer Unbekannten Wurzeln gemein haben, und der Gleichungen für diese gemeinsamen Wurzeln, wird eine Anwendung auf zwei Gleichungen mit zwei, und auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten gemacht und werden in Bezug auf diese die bekannten Formeln für die Anzahl der Lösung im allgemeinen Falle abgeleitet. Lth.

P. Mansion. Sur l'élimination. C. R. LXXXVII. 975-978.

Aufstellung der Bedingungen dafür, dass zwei Gleichungen eine oder mehrere Wurzeln gemein haben in Form von Determinanten, die gleich Null sein müssen, und Nachweis, dass die Bedingungen nothwendig und hinreichend sind. Lth.

P. Mansion. Sur l'élimination. 1[ière] note. Bull. de Belg. (2) XLVI. 899-908.

E. Catalan. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLVI. 880-881.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande d. J. nach Erscheinen der folgenden Noten über denselben Gegenstand. Siehe auch das vorangehende Referat. Mn. (O.)

M. A. Baraniecki. Ueber die Bestimmung der gemeinschaftlichen Wurzeln gegebener Gleichungen mittels ihrer Eliminante. Par. Denkschr. 1878. (Polnisch).

Dn.

M. A. Baraniecki. Ueber die Bildung des conjugirten Systems linearer Substitutionen. Par. Denkschr. 1878. (Polnisch).

Der Verfasser giebt eine Regel zur methodischen Bildung des conjugirten Systems aller linearer Substitutionen in dem Falle, wo die Anzahl der Elemente eine Primzahl und eine zusammengesetzte Zahl ist. Dn.

A. de Gasparis. Sopra una trasformazione di variabili. Sunto dell' autore. Rend. di Napoli XVII. 110.

Es handelt sich um Relationen zwischen den Variabeln verschiedener Gruppen von Gleichungen, welche nach demselben Gesetz auseinander hergeleitet werden. Namentlich werden Functionen von Variabeln betrachtet, die dadurch aus anderen hergeleitet sind, dass die entsprechenden Variabeln inverse Werthe haben. O.

Bochert. Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen von n Elementen. Diss. Breslau. 1877.

E. Netto. Ueber die Anzahl der Werthe einer ganzen Function von n Elementen. Borchardt J. LXXXV. 327-339.

Hinsichtlich der Frage nach der Anzahl der Werthe, welche eine Function von n Elementen bei Vertauschung derselben annehmen kann, verdanken wir Herrn Bertrand folgende Sätze (Journ. de l'Ec. polyt. Cah. 30. cf. Serret's Algebra Bd. II. Th. IV. Cap. III):

„Jede Function von n Elementen hat für die verschiedenen Permutationen derselben, wenn $n > 4$ ist, mindestens n Werthe, falls die Function nicht alternirend oder symmetrisch ist, d. h. zwei oder einen Werth hat.“

„Hat eine Function von n Elementen n Werthe, so ist sie, ausser für $n = 6$, nach $n - 1$ der Elemente symmetrisch,“ die von ihm selbst, von Serret und Mathieu (C. R. XLVI.) um weitergehende Sätze vermehrt worden sind. C. Jordan endlich fasste in seinem „Traité des Substitutions“ (1870) diese Theoreme als besondere Fälle des allgemeinen Satzes auf: „Ist k eine feste, n eine veränderliche ganze Zahl, so lässt sich für die letztere eine untere Grenze angeben, oberhalb deren eine Function von n Elementen, die nach $n - k$ derselben symmetrisch oder alternirend ist, weniger Werthe hat, als eine solche, bei der dies nicht der Fall ist.“

Um den Beweis, den Herr Netto hierfür giebt, leichter verständlich und übersichtlicher zu machen, liefert er in den beiden ersten Paragraphen der vorliegenden Abhandlung zunächst selbstständige Beweise für die beiden angeführten Bertrand'schen Sätze. Das hierbei benutzte Prinzip wird in die Form eines allgemeinen Satzes gebracht, welcher lautet: „Ist für eine Gruppe n^{ten} Grades die Ordnung $r > (n-k)!$ (also die Anzahl der Werthe der Function, zu der diese Gruppe gehört $< \frac{n!}{(n-k)!}$), so enthält dieselbe reguläre Substitutionen (d. h. Substitutionen, welche in allen ihren Cyklen gleich viele Elemente haben) von nicht mehr als $3k$ Elementen“, was im § 3 bewiesen wird. Und nun folgt im § 4 der Beweis des Jordan'schen Satzes. Ist k eine feste, n eine veränderliche gegen k grosse ganze Zahl, G eine Gruppe des Grades n und der Ordnung r, welche nach $n - k$ Elementen symmetrisch oder alternirend ist, so muss jede andere Gruppe H gleichen Grades, welche mehr Substitutionen besitzt als G, für

hinlänglich grosse n nach $n-k+l$ ($0 \leqq l \leqq k$) Elementen transitiv sein. Hieraus folgt dann weiter die Nothwendigkeit der Existenz einer Gruppe H_1, deren Ordnung $> (n-k-1)!$ ist; diese Gruppe enthält also nach dem angeführten Satze des § 3 Substitutionen von höchstens 3 $(k+1)$ Elementen, und, da sie ausserdem primitiv ist, muss sie nach H. Jordan (Borchardt J. LXXIX. 248-257 s. F. d. M. VI. 81), falls ihr Grad hinlänglich gross ist, die alternirende Gruppe sämmtlicher Elemente umschliessen; es ist daher H_1 und damit auch H nach mindestens eben so vielen Elementen alternirend als G, woraus sich unmittelbar der Jordan'sche Satz ergiebt. Im § 5 wird der im vorigen Paragraphen benutzte Jordan'sche Hilfssatz bewiesen.

Bei dem gelieferten Beweise ist überall von einer Feststellung der Grenze von n abgesehen, neben anderen Gründen deswegen, weil eben hierdurch die Beweisführung an Einfachheit gewinnt. Schliesslich werden noch im § 6 die oberen Grenzen für die Ordnung von Gruppen von gegebener Klasse (d. i. die geringste Anzahl der Elemente, welche durch eine Substitution der Gruppe umgestellt werden) aufgestellt.

Bei dieser Gelegenheit will Referent auf eine Arbeit hinweisen, die sich mit demselben Gegenstande, wie die vorliegende beschäftigt: „Bochert: Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen von n Elementen (Diss. Breslau 1877)". Herr Bochert sucht diese Theorie durch directe Fortsetzung der oben citirten Sätze zu fördern, indem er in der Aufführung der kleinsten Werthanzahlen bis $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ geht; auf eine genaue Grenzbestimmung von n und auf alle dabei auftretenden Ausnahmefälle wird eingegangen; hierbei benutzt der Verfasser eine eigenthümliche Methode, indem die Function nicht durch die zugehörige Gruppe, sondern durch eine gewisse Anordnung der Transpositionen nach der Art und Weise, wie sie die Function ändern, gekennzeichnet wird. T.

E. Netto. Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihrer Anwendungen. Grunert Arch. LXII. 225-259.

In dieser durchsichtig geschriebenen Arbeit verfolgt der

Herr Verfasser den Zweck, das erste Studium der Substitutionstheorie und ihrer Anwendungen dadurch zu erleichtern, dass er die Theorie gleich von vornherein in Beziehung zur Algebra setzt; auf den speciellen Gang der Untersuchung kann hier nicht näher eingegangen werden. Vorausgesetzt wird aus der Algebra nur der Satz, dass eine Gleichung r^{ten} Grades identisch ist, wenn sie mehr als r Wurzeln hat; der Satz der Darstellbarkeit der symmetrischen Functionen durch die elementaren wird an geeigneter Stelle und zwar durch einen Schluss von n auf $n+1$ hergeleitet. T.

E. Netto. Neuer Beweis eines Fundamentaltheorems aus der Theorie der Substitutionslehre. Clebsch Ann. XIII. 249-251.

Die Cauchy'sche Umkehrung: „Wenn die Ordnung einer Gruppe durch eine Primzahl theilbar ist, so enthält die Gruppe eine Substitution jener Primzahlordnung“ des Lagrange'schen Fundamentaltheorems: „dass die Ordnung einer Gruppe durch die Ordnung jeder in ihr enthaltenen Gruppe theilbar sei“, hat Herr Sylow (Clebsch Ann. V. S. 584 ff. cf. F. d. M. IV. S. 56) dahin ausgedehnt: „Wenn die Ordnung einer Gruppe durch eine Primzahlpotenz theilbar ist, so enthält die Gruppe eine andere von der Ordnung jener Primzahlpotenz.“ Während aber Herr Sylow den Beweis seines Satzes auf jenen Cauchy'schen Satz stützt, liefert ihn Herr Netto allein mittels eines der beiden Sätze, die Cauchy zu dem Beweise seines Satzes benutzt, den man in der Arbeit des Herrn Netto, über die im vorigen Art. referirt worden ist, S. 238 findet. Auch die weiteren von Herrn Sylow l. c. gezogenen Schlüsse werden durch den Netto'schen Beweis nach Angabe des Verfassers vereinfacht. Cf. auch § 9 der genannten Arbeit des Herrn Netto. T.

A. Voss. Ueber orthogonale Substitutionen. Clebsch Ann. XIII. 320-373.

Unter einer orthogonalen Substitution wird hier allgemein jede lineare (reelle oder imaginäre) Substitution verstanden,

welche eine quadratische Form $\sum_1^n x_i^2$ in sich überführt. Von diesem etwas umfassenderen Gesichtspunkt aus werden die speciellEren Fälle solcher Substitutionen nach der Beschaffenheit der von Herrn Frobenius als Characteristik bezeichneten Gleichung untersucht und zugleich gezeigt, wie allgemeine Substitutionen sich in verschiedener Weise aus einfacheren von vorgeschriebenem Character (symmetrischen, speciellen, vertauschbaren etc...) zusammensetzen lassen. Die Bezugnahme auf geometrische Vorstellungen, welche diesen allgemeinen Betrachtungen zu Grunde liegt, wird dann insbesondere durchgeführt an den verschiedenen Substitutionen, welche ein Punktepaar, einen Kegelschnitt, eine Fläche zweiten Grades, endlich den Linienraum in sich transformiren. V.

A. Cayley. On the theory of groups. Proc. L. M. S. IX. 126-133.

Bezeichnet man alle Substitutionen einer Gruppe mit verschiedenen Buchstaben und stellt dann eine Tafel mit doppeltem Eingang auf, durch die das Product je zweier Substitutionen ersichtlich wird, so erhält man ein Quadrat, in welchem diejenigen Substitutionen, die von der Anordnung der Elemente in der ersten zu sämmtlichen Zeilen überführen, eine zur gegebenen Gruppe isomorphe Gruppe bilden, deren Grad ihrer Ordnung gleich ist. Umgekehrt wird die Bedingung dafür aufgestellt, dass ein derartiges Quadrat eine Gruppe repräsentirt. Für solche Gruppen, deren Grad ihrer Ordnung gleich ist, und deren Substitutionen folglich regulär sind, wird noch eine andere Darstellung gegeben: Eine Reihe von verschieden gefärbten Polygonen ist mit den Ecken aneinander gesetzt und jedem Polygon ist eine bestimmte Richtung für das Durchlaufen der Seiten zuertheilt. Dann ist durch die Aufeinanderfolge der Farben und den Anfangspunkt jeder Weg eindeutig bestimmt. Alle nur durch ihre Anfangspunkte bei derselben Aufeinanderfolge der Farben bestimmten Wege liefern eine Substitution, alle verschiedenen Farbenfolgen sämmtliche Substitutionen der Gruppe. No.

A. CAYLEY. A theorem on groups. Clebsch Ann. XIII. 561-565.

1. Wenn $G = [1, s_2, \dots s_r]$ eine Gruppe des Grades n und der Ordnung r bildet, so kann man in bekannter Weise eine neue Gruppe Γ des Grades $2n$ und der Ordnung $2r$ aufstellen. Falls $s_\lambda s_\mu = s_\mu s_\lambda$ ist, giebt es noch eine zweite Art für die Bildung einer Gruppe Γ, indem man nämlich mit $\sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_r$ den Substitutionen $s_2, s_3, \dots s_r$ aus n neuen Elementen ähnlich gebildete Substitutionen bezeichnet, mit t diejenige Substitution zweiter Ordnung, welche jedes alte Element mit dem entsprechenden neuen vertauscht, und dann

$$\Gamma = [1, s_2\, \sigma_2, \dots s_r \sigma_r;\;\; t,\, ts_2\, \sigma_2, \dots ts_r\, \sigma_r]$$

setzt. Die Substitutionen von Γ sind im Allgemeinen nicht mehr unter einander vertauschbar.

2. Bedeutet r die Ordnung einer Gruppe mit den Substitutionen s_1, s_2, $s_3 = s_1 . s_2$ der Ordnungen m_1, m_2, m_3, so ist:

$$\mu\left(1-\frac{1}{m_1}\right)+\mu\left(1-\frac{1}{m_2}\right)\equiv \mu\left(1-\frac{1}{m_3}\right) \text{ (mod. 2).}$$

No.

A. CAYLEY. Desiderata and suggestions. No. 1: The theory of groups. No. 2: Graphical representation. Am. J. I. 50-52, 174-176.

Der Verfasser wünscht einige Punkte der Substitutionstheorie anzuregen und giebt in der ersten Note eine Bemerkung über die Gruppen von der Ordnung n, deren Substitutionen auf dieselbe Anzahl von Buchstaben ausgeübt werden, oder, wie der Verfasser sich ausdrückt, über die Gruppen von n Operationen. Die zweite Note stellt diese n Buchstaben durch Punkte, jede Substitution durch Verbindungsstriche mit bestimmter Richtung zwischen diesen Punkten dar (siehe p. 104). Nr.

A. CAPELLI. Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni. Battaglini G. XVI. 32-88.

Der Herr Verfasser nimmt den Begriff des Isomorphismus in weiterem Sinne, als dies bisher geschah: *G heisst zu H isomorph*

wenn beide in n Untergruppen getheilt werden können, so dass einer Substitution einer Untergruppe in G eine solche der entsprechenden in H zugeordnet werden kann, und dass die Multiplication von Substitutionen eindeutige Beziehungen liefert. Aus diesen Festsetzungen wird ein grosser Theil der bekannten Sätze, so z. B. der Sylow'sche abgeleitet und durch den interessanten Zusatz ergänzt, dass eine Gruppe G mit der Ordnung $p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma \dots$ als Product von Partialgruppen der Ordnungen p_1^α, p_2^β, p_3^γ, ... dargestellt werden kann. Ferner wird gezeigt, dass nur Ein Typus von Untergruppen der Ordnung p_1^α in G sein könne, dass andere Gruppen der Ordnungen $p_1^{\alpha-1}$, $p_1^{\alpha-2}$, ... vorhanden sind, deren jede mit der vorhergehenden vertauschbar ist (Vgl. Borchardt J. LXXXVIII. 16), und dass eine transitive Gruppe der Ordnung p und eines Grades $n>p$ nicht primitiv sein kann. Am Schluss wird mit Hülfe der Meriedrie ein kürzerer als der Jordan'sche Beweis über die Constanz der Factoren der Composition gegeben.

No.

V. Janni. Sopra una formola di Waring. Rend. di Napoli XVII. 27.

Die Formel von Waring, welche zur Darstellung der Summen von Potenzen der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben dient, heisst:

$$S_m = (-1^n)\, \Sigma \pm \frac{n(p+q+r+\dots+-1)!}{p!\; q!\; r!\dots}\, a_1^p a_2^q a_3^r \dots,$$

wo

$$p+2q+3r\dots = n;$$

sie wird in der vorliegenden Arbeit mit Hülfe der elementaren Eigenschaften der Determinanten hergeleitet.

O.

V. Mollame. I determinanti. Napoli. Tip. d. Acc. Reale.

W. V. Sersawy. Fundamente der Determinantentheorie. Wien. Seidel.

G. DOSTOR. Éléments de la théorie des déterminants. Darboux Bull. (2) II. 242-244.

Besprechung des Buches, über das F. d. M. IX. p. 97 referirt worden ist. O.

PICQUET. Mémoire sur l'application du calcul des combinaisons à la théorie des déterminants. J. de l'Éc. Pol. Cah 45, 201-244.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande. O.

E. SCHERING. Théorie analytique des déterminants. C. R LXXXVI. 1387-1390.

Bericht über eine neue Theorie der Determinanten, welche in den Gött. Abh. XXII. erscheinen wird. M.

G. GARBIERI. Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende von Dr. Siegmund Günther etc. 2 Aufl. Erlangen 1877. Boncompagni Bull. XI. 257-318.

Herr Garbieri übersetzt aus dem genannten Werke den grössten Theil des 1. Capitels (Historische Skizzen der Entwickelung des Determinantencalcüls) und giebt die hauptsächlichen Citate und historischen Notizen auch der übrigen Capitel wieder, sowie das Literaturverzeichniss am Schlusse desselben. Neben einigen Berichtigungen der Darstellung des Herrn Günther finden sich mehrere literarische Notizen von Interesse. So macht Herr Garbieri auf die wenig beachteten Schriften von Chio und Bellavitis über die Determinanten aufmerksam, die ungefähr gleichzeitig mit den Werken von Brioschi und Baltzer erschienen. Ferner führt er mehrere, von Herrn Günther nicht berücksichtigte Sätze von E. D'Ovidio und V. Janni an, die auch in diesem Jahrbuche bisher nicht erwähnt worden sind. D'Ovidio giebt in der im VIII. B. d. J. p. 74 ohne Referat aufgeführten Abhand-

lung u. A. den Satz: „Die Determinante der $\binom{\lambda}{\mu}$ Minoren vom Grade $n-\mu$, welche aus einer Determinante B von n^{ter} Ordnung durch Unterdrückung von solchen μ Horizontal- und μ Vertical-Reihen entstehen, die bestimmten λ Horizontal- und λ Vertical-Reihen angehören, — ist gleich der $\binom{\lambda-1}{\mu}^{\text{ten}}$ Potenz von B multiplicirt mit der $\binom{\lambda-1}{\mu-1}^{\text{ten}}$ Potenz des nach Unterdrückung der genannten λ Horizontal- und λ Vertical-Reihen in B übrig bleibenden Minors." Dieser Satz wurde, wie Herr D'Ovidio und Picquet (s. u.) selbst bemerken, bereits von Sylvester gefunden, aber auf ganz andere Art gezeigt (vgl. Phil. Magazine 4. ser. I. p. 304). V. Janni betrachtet (Nota sullo sviluppo di un determinante. Ohne Druckort und Jahreszahl) eine specielle Determinante von Interesse und giebt in einer kürzlich erschienenen Note (Rendiconti dell' accademia R. di Napoli XVII. s. p. 106) die Entwickelung der Summe der n^{ten} Potenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung nach den Coefficienten derselben. St.

Picquet. Sur le déterminant dont les éléments sont tous les mineurs possibles d'ordre donné d'un déterminant donné. C. R. LXXXVI. 310-312.

Dieselben Sätze, die D'Ovidio gefunden hat (vgl. vorstehendes Referat.) St.

Picquet. Analyse combinatoire des déterminants. C. R. LXXXVI. 1118-1119.

Sätze über Determinanten, welche aus den Minoren zweier gegebenen Determinanten derselben Ordnung gebildet sind.

St.

G. Garbieri. Nuovo teorema algebrico e sua speciale applicazione ad una maniera di studiare le curve razionali. Battaglini G. XVI. 1-17, 108-148.

Betrachtet man m ganze Functionen n^{ten} Grades von $x: f_r(x)$

und n beliebige Zahlen $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m$, so ist die Determinante

$$K = |f_r(\alpha_s)| \quad (r, s = 1, 2 \ldots m),$$

falls $n = m-1$, das Product des Differenzen-Productes $\Delta(\alpha_1, \ldots \alpha_m)$ in die Determinante der Coefficienten der f_r. Wenn $n \geqq m$ ist und angenommen wird, die α seien die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades $\varphi(x) = 0$, so können die $f_r(\alpha_s)$ auf den $(m-1)^{\text{ten}}$ Grad reducirt werden, somit ist auch jetzt noch

$$(1) \qquad K = \Delta(\alpha_1 \ldots \alpha_m) \,.\, A.$$

Dabei bezeichnet A eine Determinante m^{ten} Grades, welche sich aber in eine solche $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades verwandeln lässt, die die Coefficienten der f_r, φ zu Elementen hat; wie auch aus dem oben erwähnten Satze von d'Ovidio sofort folgt. Aus (1) ergiebt sich die Formel

$$(2) \qquad |F(\alpha_r, \beta_s)| = \Delta(\alpha_1 \ldots \alpha_m)\, \Delta(\beta_1 \ldots \beta_m) \,.\, B,$$

worin $F(x, y)$ eine ganze Function von x, y, je vom Grade n, und B eine Determinante vom Grade $2n+2-m$ bedeutet. Die β sind ebenfalls Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades. Diese Sätze enthalten eine Reihe schon bekannter Formeln als specielle Fälle.

Die Formel (1) leistet wichtige Dienste bei analytischer Darstellung der Theorie der Involutionen, der ebenen und räumlichen rationalen Curven. St.

G. R. Dick. On the sign of any term of a determinant. Educ. Times XXIX. 99-100.

Das Vorzeichen von $a_\alpha\, b_\beta\, c_\gamma \ldots$ in

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, \ldots \\ a_2, & b_2, & c_2, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, \ldots \end{vmatrix}$$

ist gleich dem des Productes

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma) \ldots (\beta-\gamma) \ldots .$$

No.

R. Rubini. Formole di trasformazione nella teorica dei determinanti. Battaglini G. XVI. 198-208.

Bezeichnet man die adjungirten Elemente einer Determinante

$$| \alpha_{r,s} | = A$$

von n^{ter} Ordnung mit $a_{r,s}$ und setzt

$$b_{1,r}\alpha_{1,s} + b_{2,r}\alpha_{2,s} + \cdots + b_{n,r}\alpha_{n,s} = A_{r,s}, \quad \left(\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n\Big),$$

so hat man

$$| A_{r,s} | = A^{n-1} \,.\, | b_{r,s} | \,.$$

Der Herr Verfasser giebt mehrere algebraische und geometrische Anwendungen dieser Formel. St.

C. le Paige. Sur une transformation de déterminants. N. C. M. IV. 79-82.

Ein vom Gesichtspunkt analytischer Transformationen interessanter Beweis des Satzes: Wenn zwei auf einer Geraden liegende Reihen von Punkten a, b, c ..., a', b', c' ... homographisch sind, so bilden die Punkte ab' ba' eine Involution mit den beiden Doppelpunkten dieser homographischen Reihen.

Mn. (O.)

M. Falk. Elementary demonstration of the theorem of multiplications of determinants. Rep. Brit. Ass. 1878.

Die vorliegende Arbeit will einen strengen Beweis dieses wichtigen Satzes geben, der auf denselben elementaren Principien beruht (Elimination zwischen zwei Systemen von Gleichungen) wie der Beweis, den Brioschi in seinen „Determinanten“ gegeben hat und der in Schellbach's Uebersetzung des Werkes reproducirt worden ist. Dem Beweis von Brioschi wirft Herr Falk Unvollständigkeit vor, insofern als er die Zähler der zwei Quotienten nicht berücksichtigt, aus deren Gleichheit die der Nenner gefolgert wird. Csy. (O.)

P. Mansion. Sur la théorie des nombres. Gand. Hoste.

P. Mansion. Démonstration d'un théorème relatif à un déterminant remarquable. Bull. de Belg. (2) XLVI. 892-899.

E. Catalan. Théorème de MM. Smith et Mansion. N. C. M. IV. 103-111.

C. le Paige. Sur un théorème de M. Mansion. N. C. M. IV. 176-178.

Die dritte Notiz der erst genannten Broschüre: Généralisation d'un théorème de M. Smith ist ein Auszug aus den Ann. Soc. Sc. Brux. II. 211-224 und ist durch die Abhandlung des englischen Gelehrten im Messenger (2) VII. 81-82 (s. F. d. M. VIII. p. 74) entstanden. Der Hauptsatz heisst: Eine Determinante

$$\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn},$$

wo

$$a_{ik} = a_{ki} = a_{i-k,k} \quad \text{oder} \quad a_{i,k-i},$$

ist eine einfache Function ihrer Diagonalen. Corollar 1). Jedes Product $x_1 x_2 \ldots x_n$ kann in die Form einer Determinante dieser Art gebracht werden, wo

$$a_{ii} = x_1 + x_d + \ldots + x_{d'} + x_i$$

und $1, d, \ldots d', i$ alle Theiler von i sind. 2) Jede Determinante dieser Form wird mit $+1$, -1 oder 0 multiplicirt, wenn man die Elemente einer Linie durch die entsprechenden Elemente der zweiten Diagonale der Determinante ersetzt. Die Arbeit von Catalan enthält einen etwas veränderten Beweis des Hauptsatzes und Corollars 1); die von Le Paige einen directen Beweis des Corollars 1), nur mit Hülfe des Princips der Addition der Reihen. Die zweite Notiz von Mansion enthält den Beweis desselben Corollars durch Multiplication zweier Determinanten, die nach dem oben bezeichneten Princip gebildet sind, so dass alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonale Null sind. Mn. (O.)

W. Thomson. On a machine for the solution of simultaneous linear equations. Proc. of London XXVIII. 111-113.

Die Maschine besteht aus n Körpern $B_1, B_2, \ldots B_n$, durch

Seile auf einander wirkend, welche successive oder gleichzeitig gezogen werden bis zu Längen gleich $l_1, l_2, \dots l_n$ (den constanten Gliedern der n Gleichungen) und durch gewisse Ringe gehen. Die Winkel, um welche die Körper $B_1, B_2, \dots B_n$ durch diese gegebene Bewegung der Seile gedreht werden, sind dann die geforderten Werthe der Unbekannten $x_1, x_2, \dots x_n$, die dem System linearer Gleichungen genügen. Der Verfasser bemerkt, dass die wirkliche Construction einer wirklich brauchbaren Maschine bis zu einem System von 8 Gleichungen keine besonderen Schwierigkeiten bieten werde. Er folgert, dass wenn einmal erst eine erste Annäherung durch die Maschine gefunden sei, es nur einer mässigen arithmetischen Rechnung bedürfen werde zur Berechnung der Correctionen bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit. Cly. (O.)

A. Voss. Ueber gewisse Determinanten. Clebsch Ann. XIII. 161-167.

Im Anschlusse an eine frühere Arbeit (vgl. d. Jahrbuch Bd. IX. p. 575) betrachtet diese Note Determinanten, die entstehen, wenn man eine nicht verschwindende Determinante n^{ter} Ordnung mit Reihen, welche aus den gleich hohen Differentialquotienten von n Functionen einer Veränderlichen gebildet sind, $(r+1)$fach vertical und horizontal rändert. St.

M. Falk. Sur une propriété des déterminants nuls. N. C. M. IV. 373-376.

Zwischen den Elementen aller Linien einer Null-Determinante existirt, sogar wenn ihre Minoren selbst Null sind, eine und dieselbe lineare Relation. Man kann daher eine Null-Determinante in eine solche Form bringen, dass alle Elemente einer Linie oder einer Colonne gleich Null sind. Mn. (O.)

J. W. L. Glaisher. On the factors of a special form of determinants. Quart. J. XV. 347-356.

J. W. L. GLAISHER. On a special form of determinants and on certain functions of n variables analogoues to the sine and cosine. Quart. J. XVI. 15-34.

A. MINOZZI. Sopra un determinante. Battaglini G. XVI. 148-151.

Herr Glaisher sucht die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & \dots a_n \\ a_2 & a_3-x & \dots a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots a_n-x \end{vmatrix} = 0,$$

welche bekanntlich zugleich mit den a reell sind. Nach Betrachtung der Fälle $n=3$, 4, 5 hält er für wahrscheinlich, dass dieselben — die unmittelbar ersichtlichen Wurzeln

$$x = a_1 \pm a_2 + a_3 \pm a_4 + \cdots$$

abgerechnet — von der Form seien:

$$x^2 = (a_1+a_2\omega+\cdots+a_{n-1}\omega^{n-1})\,(a_1+a_2\omega^{-1}+\cdots+a_{n-1}\omega^{-n+1}),$$

wo ω eine imaginäre Wurzel der Einheit bedeutet. Ferner wird die Determinante

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

betrachtet und bemerkt, dass n schon von Olivier (Crelle J. II. p. 243) betrachtete Functionen einer, und die Appell'schen Functionen y_r (vergl. d. Jahrb. IX. p. 326) von $(n-1)$ Veränderlichen, für die $a_1, a_2 \dots a_n$ gesetzt, dieselbe identisch $=1$ machen. Die letzteren sind definirt durch das System der Gleichungen

$$y_1+\omega y_2+\cdots+\omega^{n-1}y_n = e^{\omega x_1+\omega^2 x_2+\dots+\omega^{n-1}x_{n-1}},$$

wo ω alle Werthe der n^{ten} Wurzel aus $+1$ anzunehmen hat, und analog den hyperbolischen Functionen, die daraus für $n=2$ hervorgehen.

Herr Minozzi giebt die Entwickelung der Determinante (1) als Norm der ganzen Function $a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$, welche auch Referent (Clebsch Ann. XI. p. 46) ausgerechnet hat. St.

A. Puchta. Ein Determinantensatz und seine Umkehrung. Wien. Denkschr. XXXVIII.

Gewisse symmetrische Determinanten vom Grade 2^m, die in jeder Reihe dieselben Elemente enthalten, lassen sich in 2^m lineare Factoren zerlegen. St.

F. J. Studnička. Eine Determinantennotiz. Casopis VI. 31-32. (Böhmisch).

Enthält eine Bemerkung über das Zeichen der Dreiecksdeterminante, sowie die Ableitung der Formel

$$2V = \begin{vmatrix} x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \\ x_4 - x_1, & y_4 - y_1 \end{vmatrix},$$

wenn V den Flächeninhalt des Vierecks $(x_1 - x_4, y_1 - y_4)$ bedeutet. Std.

Muir. Letter to Prof. Sylvester on the word continuant. Am. J. I. 344.

Der Verfasser bemerkt, dass er das Wort „Continuant" zur Abkürzung des Ausdrucks „continued-fraction determinant" gebildet habe, und dass es dem deutschen Ausdruck: „Kettenbruch-Determinante" äquivalent sei. O.

J. W. L. Glaisher. On a class of determinants. Messenger (2) VII. 160-165.

Die Arbeit bezieht sich auf Determinanten von der Form

$$\begin{vmatrix} a_1, & 1 & & & \\ a_2, & a_1, & 1 & & \\ a_3, & a_2, & a_1, & 1 & \\ a_4, & a_3, & a_2, & a_1, & 1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_1 - b_1, & 1 & & & \\ a_2 - b_2, & a_1, & 1 & & \\ a_3 - b_3, & a_2, & a_1, & 1 & \\ a_4 - b_4, & a_3, & a_2, & a_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Es sind dies die Coefficienten von x^n in der Entwickelung von

$$\frac{1}{1 - a_1 x + a_2 x^2 \ldots} \quad \text{und} \quad \frac{1 - b_1 x + b_2 x^2 \ldots}{1 - a_1 x + a_2 x^2 \ldots}.$$

Man erhält eine Reihe von Relationen, die verschiedene Determinanten dieser Formen verbinden, wenn man die Coefficienten in Formeln wie

$$\frac{1+b_1x+b_2x^2+\cdots}{1+a_1x+a_2x^2+\cdots} = \frac{1-A_1x+A_2x^2-A_3x^3\ldots}{1-B_1x+B_2x^2-B_3x^3\ldots}$$

gleichsetzt und der Reihe specielle Formen giebt. Z. B.

$$\log\log(1+x) = \log x+b_1x+\tfrac{1}{2}C_2x^2+\tfrac{1}{3}C_3x^3+\cdots,$$

wo

$$C_n = -\begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & 1, \ldots & & \\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{2}, & 1, \ldots & \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{2}, & 1, \ldots \\ \frac{4}{5}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{2}, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} \ (n \text{ Reihen}),$$

und auch

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{1.2}, & -1, \ldots & & \\ \frac{1}{2.3}, & \frac{1}{1.2}, & -1, \ldots & \\ \frac{1}{3.4}, & \frac{1}{2.3}, & \frac{1}{1.2}, & -1, \ldots \\ \frac{1}{4.5}, & \frac{1}{3.4}, & \frac{1}{2.3}, & \frac{1}{1.2}, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} \ (n \text{ Reihen}).$$

Eine Fortsetzung der Arbeit findet sich Messenger (2) VIII. 158-167, 1879. Glr. (O.)

B. J. Scott. On some theorems in determinants.
Messenger (2) VIII. 32-37.

1) Einfacher Beweis des bekannten Satzes:

$$\begin{vmatrix} x-A_1, & a_2, & \ldots a_n, \\ a_1, & x-A_2, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1, & a_2, & \ldots x-A_n, \end{vmatrix} = x(x-S)^{n-1},$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_n$ n Grössen sind, deren Summe gleich S ist, und $A_m = S - a_m$.

2) Der grösste Theil der Arbeit bezieht sich auf die Determinanten:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} x_1, & x_2, \dots x_n \\ x_n, & x_1, \dots x_{n-1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_2, & x_n, \dots x_1 \end{vmatrix},$$

welche, wie bekannt,

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, \Pi(x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n),$$

wo α eine n^{te} Wurzel der Einheit ist. Bezeichnet man den Logarithmus der Determinante mit u, so erhält man mehrere Ausdrücke für die Hesse'sche von u. Der Verfasser werthet die Determinante 1) für die speciellen Fälle aus, wo $x_1, x_2, \dots x_n$ resp. folgende Werthe haben:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & a, \quad a+b, \dots a+(n-1)b, \\ \text{II.} & 1^2, \quad 2^2 \quad, \dots n^2, \\ \text{III.} & c_1, \quad c_2 \quad, \dots c_n, \end{array}$$

wo $c_1, c_2, \dots$ die Binomialcoefficienten in der Entwickelung von $(1+x)^{n-1}$ sind;

$$\begin{array}{ll} \text{IV.} & \cos a, \ \cos(a+b) \dots \cos\{a+(n-1)b\}, \\ \text{V.} & \sin a, \ \sin(a+b) \ \dots \ \sin\{a+(n-1)b\}. \end{array}$$

Glr. (O.)

N. L. W. A. Gravelaar. Eene byzondere vergelijking.
Nieuw Arch. IV. 113-124.

Auf rein analytischem Wege wird bewiesen, dass die beiden Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots b_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn}-x & b_{n1} & b_{n2} & \dots b_{nm} \\ b_{11} & b_{21} & \dots b_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{12} & b_{22} & \dots b_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots b_{nm} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

nur reelle Wurzeln haben. G.

J. D. H. Dickson. A class of determinants. Trans. of Edinb. XXVIII. II. 625-631.

Die betrachteten Determinanten sind von der Form:

$$\begin{vmatrix} & & & a_1, & a_2, \dots a_r \\ & & & b_1, & b_2, \dots b_r \\ & & a_1, & a_2, & a_3, \dots a_{r+1}, \\ & & b_1, & b_2, & b_3, \dots b_{r+1}, \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ a_1, & a_2, \dots a_{r-2}, & & a_{r-1}, & a_r, \dots a_{2r-2} \\ b_1, & b_2, \dots b_{r-2}, & & b_{r-1}, & b_r, \dots b_{2r-2} \end{vmatrix}$$

und von derselben Form, nur dass die obere horizontale Reihe und die erste verticale Reihe vertauscht sind.

Cly. (O.)

F. J. Studnička. Beitrag zur Determinantentheorie. Prag. Ber. 1877. 120-125.

Siehe F. d. M. IX. p. 100. O.

F. Mertens. Sätze über Determinanten und Anwendung derselben zum Beweise der Sätze von Pascal und Brianchon. Borchardt J. LXXXIV. 355-359.

Beweis des Satzes von Pascal und zweier anderer Sätze vermittelst Determinanten-Umformung. St.

A. Scholtz. Sechs Punkte eines Kegelschnittes.
Grunert Arch. LXII. 317-325.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. C.

Dritter Abschnitt.

Zahlentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

E. Kummer. Neuer elementarer Beweis des Satzes, dass die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche ist.
Berl. Monatsber. 1878. 777-778.

Wäre die Anzahl aller Primzahlen eine endliche und P ihr Product, so wäre keine Zahl unterhalb P mit Ausnahme der Eins zu P relativ prim. Man hätte also einmal $\varphi(P) = 1$ und andererseits

$$\varphi(P) = (2-1)(3-1)(5-1)(7-1)\ldots;$$

diese Gleichungen würden sich aber widersprechen. No.

Proth. Théorèmes sur les nombres premiers.
C. R. LXXXVII. 926.

Proth. Énoncée d'un théorème relatif à la théorie des nombres. C. R. LXXXVII. 374.

Die Zahl n ist eine Primzahl, wenn $a^x \equiv 1 \pmod{n}$ für $x = \frac{n-1}{2}$, aber für keinen Theiler von $\frac{n-1}{2}$; ebenso wenn $a^x \equiv 1 \pmod{n}$ für $x = n-1$ wird, und wenn zugleich a^x zu n theilerfremd ist, für jeden Modnl der Theiler von $n-1$, und $<$

$\sqrt[3]{n}$ angenommen wird. Wenn ferner $n = m.2^k+1$ ist, wo m eine ungrade Zahl $< 2^k$ bedeutet, und wenn ausserdem a Nichtrest von n ist, so wird n Primzahl sein oder nicht, je nachdem $a^{\frac{n-1}{2}}+1 \equiv 0 \pmod{n}$ ist oder nicht. Endlich ist $n = mp+1$, wo m eine beliebige, p eine Primzahl $> \frac{1}{2}\sqrt[3]{n}$ bedeutet, dann Primzahl, wenn $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, ohne dass $a^m \equiv \pm 1 \pmod{n}$ ist. In allen diesen Sätzen ist $a < n$ und a zu n theilerfremd angenommen.

Das mitgetheilte Theorem lautet: Die Zahl 2^h+1 ist Primzahl oder nicht, je nachdem sie $3^{2^h-1}+1$ theilt oder nicht; h bedeutet eine Potenz von 2. No.

Tchébycheff. Sur une transformation de séries numériques. N. C. M. IV. 305-308.

E. Catalan. Démonstration des formules de M. Tchébycheff. N. C. M. IV. 308-313.

Die Grundlage der Untersuchungen von Tchébycheff und A. de Polignac über die Vertheilung der Primzahlen ist die Formel:

$$\text{(A)} \qquad \overset{a}{\underset{1}{S}} lx = \psi(a)+\psi\left(\frac{a}{2}\right)+\psi\left(\frac{a}{3}\right)+\cdots,$$

wo

$$\text{(B)} \qquad \psi\left(\frac{a}{n}\right) = \overset{\infty}{\underset{1}{S}} \theta\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)^p$$

und $\theta(k)$ die Summe der Logarithmen aller Primzahlen ist, die nicht grösser als k (Liouville J. (1) XVII. 369). Die Formel (A) macht es möglich, Grenzwerthe (valeurs limitatives) von Functionen zu finden, für welche andere Formeln nur asymptotische Werthe geben. So ist z. B. die folgende, die von Euler (Intr. in anal. Inf. I. No. 268) stammt:

$$\text{(C)} \qquad 1+\frac{1}{25}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\cdots = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^5}\cdot\frac{1}{1-(\frac{1}{3})^5}\cdot\frac{1}{1-(\frac{1}{5})^5},$$

deren rechte Seite nur Primzahlen enthält.

Herr Tchébycheff hat gefunden, dass die Formeln (A) und (C) sich aus folgender Gleichung:

$$\text{(D)} \qquad \overset{\infty}{\underset{1}{S}} lx.fx = S\, lx.Fx, \quad Fx = \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}} \; \overset{m=\infty}{\underset{m=1}{S}} f(nx^m)$$

ergeben, wo x auf der rechten Seite alle Primzahlen darstellt. Er selbst giebt diese Gleichung ohne Beweis. Man leitet (C) aus (D) her, indem man $fx = \frac{1}{x^s}$ setzt, wobei nach (A)

$$fx = 1 \text{ für } x \lesseqgtr a, \quad fx = 0 \text{ für } x > a.$$

Herr Catalan giebt die Beweise von Tchébycheff und Euler für (A) und (C) mit Vereinfachungen und fügt einen Beweis für die neue Formel (D) hinzu. Mn. (O.).

P. Pepin. Sur la formule $2^n - 1$. C. R. LXXXVI. 307-310.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass $q = 2^n - 1$ eine Primzahl ist, wird durch die Congruenz

$$\left(\frac{a - b\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}\right)^{\frac{q+1}{2}} \equiv -1 \pmod{q}$$

ausgedrückt, worin $a^2 + b^2 = p$, und p eine Primzahl von der Form $4h + 1$ bedeutet, für welche q quadratischer Nichtrest ist. Hieraus folgt noch ein zweites Kriterium, welches dem von E. Lucas in den C. R. LXXXIII. p. 1286 angegebenen ähnlich ist. Schl.

E. Lucas. Sur la série récurrente de Fermat. Boncompagni Bull. XI. 783-799.

Die Arbeit bezieht sich, wie einige frühere desselben Verfassers (F. d. M. VIII. und IX. III. Abschn. Cap. 1), auf die Ermittelung von Regeln, welche die Zerlegung zusammengesetzter Zahlen, bez. die Erkennung von Primzahlen von der Form $2^n \pm 1$ erleichtern. Nach le Lasseur folgt daraus, dass

$$x^2 + y^2 = (x + y + \sqrt{2xy})(x + y - \sqrt{2xy}),$$

wenn xy das Doppelte einer Quadratzahl ist, rationale Theiler

besitzt, für $x = 2^{4n+2}$, $y = 1$, die Zerlegung von $2^{4n+2}+1$. Herr Lucas giebt ausserdem eine Tabelle von Formeln, die von le Lasseur und Aurifeuille herrühren, und Zerlegungen liefern für den Fall, dass xy gewisse ganze Vielfache von Quadratzahlen darstellt; z. B. ist $\frac{x^{10}+y^{10}}{x^2+y^2}$ zerlegbar, wenn xy das Zehnfache einer solchen ist. Darauf folgt ebenfalls nach le Lasseur eine Tafel für die Theiler der verschiedenen Glieder der Fermat'schen Reihe, die nach den vier Gruppen 2^n-1, 2^n+1, $2^{4n+2}+1$, $2^{4n}+1$ geordnet sind, wozu Regeln hinzugefügt werden, nach denen sich die Aufsuchung der Theiler vereinfachen lässt; z. B.: Die Theiler von $2^{4n}+1$ sind von der Form $16nq+1$, diejenigen von $a^{abn}-b^{abn}$ von der Form $4abnq+1$, wenn n ungrade und ab von der Form $4h+3$ ist u. s. w., ferner ist $2^{4q+3}-1$ durch $8q+7$ theilbar, wenn $8q+7$ eine Primzahl ist.

In der F. d. M. IX. p. 111 besprochenen Arbeit hat Herr Lucas eine Regel für die Untersuchung der in Rede stehenden Zahlen gegeben. Er fügt zu derselben hier noch eine Reihe anderer Regeln hinzu; um die Art derselben zu kennzeichnen, sei eine angeführt: „Es sei $p = A.2^q-1$, wo q und A einer der Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{array}{l} q\equiv 0\\ q\equiv 1\\ q\equiv 2\\ q\equiv 3\end{array}\right\} \pmod{4} \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} A\equiv 3 \text{ oder } 9\\ A\equiv 7 \quad - \quad 9\\ A\equiv 1 \quad - \quad 7\\ A\equiv 1 \quad - \quad 3\end{array}\right\} \pmod{10}.$$

Man bilde die recurrirende Reihe $r_1 r_2 \dots r_q$ mit dem Bildungsgesetz $r_{n+1}\equiv r_n^2-2 \pmod{p}$, während r_1 und r_2 die Glieder U_A und V_A der Fibonacci'schen Reihe sind; dann ist p eine Primzahl, wenn die Stelle des ersten durch p theilbaren Gliedes $= q$ ist."

In einer Anzahl von Fällen kann man diese Sätze durch andere ersetzen, die dem Wilson'schen Theorem insofern näher kommen, als sie nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür ergeben, dass eine gewisse Zahl eine Primzahl sei; derartige Sätze werden für die Zahlen von der Form

$$2^{4q+3}-1,\quad 2^{8q+5}-1,\quad 2^{16q+9}-1,\quad 2^{12q+5}-1,\quad 2^{64q+33}-1$$

angegeben. Auch von diesen möge nur einer hier angeführt werden: „Damit $p^{4q+3}-1$ eine Primzahl sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Congruenz

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{p+1}{2}}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{p+1}{2}}\equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

bestehe." T.

E. Lucas. On the interpretation of a passage in Mersenne's works. Messenger (2) VII. 185-187.

Die betreffende Stelle bezieht sich darauf, dass Zahlen von der Form 2^n-1 zusammengesetzte Zahlen sind, ausser wenn n die Werthe 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257... hat. Herr Lucas betrachtet in dieser Note die Auflösung von 2^n in Factoren und zwar betrachtet er die 3 Formen

$$2^{4q+3}-1,\ 2^{4q+1}-1,\ 2^{2^n}-1,$$

jede für sich. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On certain special enumeration of primes. Rep. Brit. Ass. 1878.

Die Arbeit betrifft 1) Primpaare, d. h. Paare von Primzahlen, die nur durch eine andere Zahl getrennt sind, wie 11 und 13, 17 und 19, 29 und 31 etc., 2) Primzahlen von den Formen $4n+1$ und $4n+3$, die getrennt aufgezählt werden.

Csy. (O.)

J. W. L. Glaisher. An enumeration of prime pairs. Messenger (2) VIII. 28-33.

Unter einem Primzahlpaar ist ein Paar von Primzahlen gemeint, die nur durch eine Zahl getrennt sind, wie 11 und 13, 17 und 19 etc. Die vorliegende Arbeit enthält Tafeln über die Zahl der Primzahlpaare in je tausend Zahlen von 0 bis 100000, 1000000 bis 1100000, 2000000 bis 2100000, 6000000 bis 6100000, 7000000 bis 7100000 und 8000000 bis 8100000. Die Tafeln

formes binaires" C_p durch gewisse Grössen $s_1, s_2, \dots s_p$ ausgedrückt, die von den Wurzeln der Gleichungen

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)=0,$$
$$(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{n+r})=0$$

abhängen. Der hierbei auftretende Ausdruck kann aber auch symbolisch als Coefficient in der Entwickelung einer p^{ten} Potenz aufgefasst werden, und wenn man von dem Umstande Gebrauch macht, dass der Coefficient der p^{ten} Potenz in der Entwickelung von $\psi(x)$ nach Potenzen von x gleich dem entsprechenden in der Entwickelung von

$$\frac{1}{p!}[\delta+\log\psi(x)]^p$$

ist, falls δ^i durch $i!$ ersetzt wird, so erhält man als Schlussresultat, dass C_p gleich dem Coefficienten der p^{ten} Potenz in der Entwickelung des Ausdrucks

$$\frac{1}{p!}\left[\delta+\log\frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}\right]^p$$

wird. Aehnliche Formeln ergeben sich für die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=p.$$

No.

G. Halphén. Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers. Bull. S. M. F. VI. 173-188.

G. Halphén. Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers et les décompositions en deux carrés. Bull. S. M. F. VI. 119-120.

In der Gleichung $a-x^2=\pm(b-x)y$ seien a, b positiv; y positiv und ungrade; x liege zwischen $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$; x, y seien die zum positiven, x', y' die zum negativen Zeichen gehörigen Lösungen bei gegebenen a, b; dann folgt aus einer Untersuchung über die Congruenz der x, x' und y, y' (mod. 2), dass

$$\Sigma(-1)^x-\Sigma(-1)^{x'}=0 \text{ für } a-b^2\gtrless 0$$
$$=(-1)^{b+1}b \text{ für } a-b^2=0,$$

und, wenn $P(\omega)$ die Summe der positiven und graden Divisoren von ω bezeichnet, dass

$$\Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' = (-1)^{b+1} P(a-b^2) \text{ für } a-b^2 \lessgtr 0$$
$$= (-1)^{b+1} b^2 \text{ für } a-b^2 = 0.$$

Ist nun $f(z)$ eine ungrade Function, und bildet man die Summe der Ausdrücke $(-1)^x f\left(\frac{a-x^2}{y}+x\right)$ für alle zwischen $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ liegenden x und alle ungraden Theiler von $a-x^2$ für y, so folgt, indem man zuerst sämmtliche zu den Argumenten $\frac{a-x^2}{y}+x = \pm b$ gehörigen Summanden zusammenfasst, aus dem ersten Theile des obigen Satzes, dass jene Summe gleich 0 wird, falls a kein Quadrat ist, im entgegengesetzten Falle dagegen gleich $(-1)^{a+1}\sqrt{a}\,f(\sqrt{a})$. Wird $f(z) = z$ angenommen, so folgt, wenn wir mit $C(\omega)$ die Summe derjenigen Divisoren von ω bezeichnen, deren Complemente ungrade sind, dass

$$C(a)-2C(a-1)+2C(a-4)-2C(a-9)+\cdots = 0,$$

falls a kein Quadrat ist, und

$$= (-1)^{a+1}.a,$$

falls a ein Quadrat ist.

Aus diesen Reductionsformeln kann man dann unmittelbar die Sätze ableiten, dass jede Primzahl der Form $4m+1$ als Summe zweier, jede Primzahl der Form $8m+3$ als Summe dreier Quadrate darstellbar ist. Durch andere Formen der Function $f(z)$, durch die Anwendung des zweiten Theils des obigen Satzes, sowie endlich durch Zugrundelegung von allgemeineren Gleichungen als $a-x^2 = \pm(b-x)y$ werden in ähnlicher Weise neue Reductionsformeln hergeleitet. Schliesslich wird gezeigt, wie die merkwürdige Euler-Jacobi'sche Identität, welche im Allgemeinen zur Ableitung solcher Formeln für die Divisoren verwendet wird, umgekehrt aus den gefundenen Sätzen hergeleitet werden kann.

No.

V. Bouniakowsky. Nouveau cas de divisibilité des nombres de la forme $2^{2^m}+1$, trouvé par le révérend père J. Pervouchine. Bull. de St. Petersb. XXIV.

V. Bouniakowsky. Encore un nouveau cas de divisibilité des nombres de la forme $2^{2^m}+1$. Bull. de St. Petersb. XXV.

Herr J. Pervouchine sandte der Akademie zwei Mittheilungen über die Theilbarkeit der Zahlen von der Form $2^{2^m}+1$ zu. In der ersten, die vom 18. (30.) November 1877 datirt, wird bewiesen, dass

$$2^{2^{12}}+1 \equiv 0 \text{ (Mod. 114689)}.$$

In der zweiten kommt eine noch grössere Zahl in Betracht, nämlich

$$2^{2^{23}}+1,$$

welche die Primzahl 167772161 zum Divisor hat.

Die Theilbarkeit der Zahl $2^{2^{12}}+1$ ist auch von Herrn Lucas (Atti della Reale Academie di Torino Vol. XIII) bemerkt worden, die Note des Herrn Lucas ist aber zwei Monate später (27. Januar 1878) als die Mittheilung des Herrn Pervouchine bekannt geworden; im Uebrigen ist es unzweifelhaft, dass die beiden Mathematiker unabhängig von einander das fragliche Resultat aufgefunden haben.

Soviel bekannt, sind die oben aufgeführten Zahlen und die noch von Euler angeführte Zahl $2^{2^5}+1$ die einzigen von der Form $2^{2^m}+1$, deren Theilbarkeit bis jetzt bemerkt worden ist.

Die Verification der angeführten Resultate wurde von den Herren Akademikern Bouniakowsky und Zolotareff unternommen und zeigte deren vollkommene Richtigkeit. P.

F. da Ponte Horta. Sobre divisibilidade dos nomeros. Jorn. sc. math. e astr. I. 57-62.

J. W. L. Glaisher. On factor tables with an account of the mode of formation of the factor table for the fourth million. Proc. of Cambr. III. 99-108.

Die Arbeit enthält 1) einen historischen Bericht über Factorentafeln, 2) einen Bericht über die Herstellung der Factorentafel für die vierte Million.

Der grössere Theil des historischen Theils ist den Tafeln Felkel's (1776), der Beziehung Lambert's zu solchen Tafeln und den Tafeln von Chernac, Burckhardt und Dase gewidmet. Der Inhalt der 21 Paragraphen, in welche die Arbeit getheilt ist, ist: §§ 1—2) Gebrauch einer Factorentafel, 3) Liste früherer Tafeln bis 1811, 4) Beschreibung von Felkel's Tafel, 5) Felkel und Lambert, 6) Lambert's Publikationen, die sich auf Factorentafeln beziehen, 7) Correspondenz zwischen Lambert und von Stamford und Rosenthal, 8) zwischen Lambert und Felkel, 9) zwischen Lambert und Hindenburg, 10) Felkel's wieder erschienene Tafeln, 11) Felkel's eigner Bericht über seine Arbeit, 12) Schicksal seiner Tafeln, 13) Marci's und Vega's Tafeln, 14) Chernac's cribrum, 15—16) Burckhardt's Tafeln, 17) Gauss, Dase und Rosenberg (siebente, achte und neunte Million), 18) die zehnte Million, 19) das Berliner Manuscript der vierten, fünften und sechsten Million, 20) Bericht über die Berechnung der vierten Million, 21) Beispiel, um die Anwendung einer Factorentafel zur Berechnung von Logarithmen zu zeigen. § 20 enthält einen genauen Bericht über die Berechnungsart der Factorentafel für die vierte Million nach der Construction von Herrn James Glaisher, dem Bruder des Verfassers, der es übernommen hatte, die Lücke von 3 Millionen zwischen Burckhardt's und Dase's Tafeln auszufüllen. Die angewandte Methode ist der von Burckhardt benutzten ähnlich. Die Factorentafel selbst ist 1879 veröffentlicht und enthält in der Einleitung zu dem Bande einen vollständigen Bericht über ihre Construction. Ein Nachtrag zu der Arbeit findet sich in den Proc. of Cambr. III. 228—229 (1879). Glr. (O.)

G. Torelli. Sopra alcune proprietà numeriche. Battaglini G. XVI. 152-168.

In der vorliegenden Abhandlung werden mit Hilfe von bekannten Jacobi'schen und Eisenstein'schen Sätzen zwölf zahlen-

theoretische Theoreme bewiesen, welche grösstentheils den merkwürdigen Zusammenhang betreffen, der zwischen der Summe der Divisoren einer ungraden Zahl und der Anzahl der möglichen Zerlegungen eines bestimmten Vielfachen derselben Zahl in die Summe von vier resp. drei Quadraten besteht. Drei dieser Sätze sind bereits von E. Fergola im X. Bande des Battaglini'schen Journals p. 54 mitgetheilt worden; sie ergeben sich als specielle Fälle. Wir heben folgenden Satz hervor: Wenn $2n-1$ eine durch 3 nicht theilbare ungrade Zahl ist, und p und q bezüglich angeben, auf wie viele verschiedene Arten die Zahl $4.3^{k+2}(2n-1)$ in die Summe der drei Quadrate $2x^2+y^2+z^2$, bezüglich in die Summe von vier Quadraten $x^2+y^2+z^2+t^2$ zerlegbar ist, wobei jedoch für x, y, z, t nur ungleiche und ungrade Zahlen gesetzt werden dürfen, welche nicht sämmtlich durch 3 theilbar sind, so ist, wenn mit $\varphi(2n-1)$ die Summe der Divisoren der Zahl $(2n-1)$ bezeichnet wird, $p+2q=3^k\varphi(2n-1)$. Schl.

L. Lorenz. Om Primtalrokken. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 1-3.

Bezeichnet n_m die periodische Function

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}-\frac{\sin\frac{2n\pi}{m}}{\sin\frac{2\pi}{m}}+\cdots-\frac{\sin\frac{(m-1)n\pi}{m}}{\sin\frac{(m-1)\pi}{m}},$$

wo m eine ungrade, n eine grade Zahl bedeutet, dann wird immer $n_m=n-2mr$ sein, wenn r die Anzahl der ganzen Zahlen in der Reihe 1, 3, 5, ... $n-1$ bezeichnet, welche durch m theilbar sind. Dies lässt sich zur Bestimmung eines exacten Ausdrucks für die Anzahl der ganzen Zahlen bis n inclusive, welche durch die Primzahlen 2, 3, 5, ... p nicht theilbar sind, anwenden.

Ferner zeigt der Verfasser, dass es möglich ist für die Function $\varphi(p)$ (die Anzahl der Primzahlen $\leqq p$), eine Näherungsformel mittelst einer Differentialgleichung zu erhalten, indem man sie durch eine continuirliche Function ersetzt, und p einen so grossen Werth beilegt, dass die Differenz zwischen p und der

nächsten Primzahl als verschwindend in Vergleich mit p betrachtet werden kann. Er findet die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dp}\, l(\varphi(p^2)-\varphi(p)) = \frac{2-\varphi'(p)}{p},$$

die als erste Annäherung auf die bekannte Gauss'sche Formel führt. Gm.

J. W. L. Glaisher. Generalisation of Prof. Cayley's theorem on partition. Messenger (2) VIII. 83-84.

Prof. Cayley's Satz erschien Messenger (2) V. p. 188 (siehe F. d. M. VIII. p. 85). Die Verallgemeinerung geht dahin, dass wenn n_r die Zahl der Theilungen von n bezeichnet, deren keine kleiner als r und die der Reihe nach geordnet sind, dann

$$n_r = (n-1)_r + (n-r)_r,$$

d. h. jedes Glied ist gleich dem unmittelbar vorhergehenden + dem r^{ten} vorhergehenden. Wenn $r=1$, so dass alle Zahlen in den Theilungen vorkommen können, so hat man $n_0 = 2\,(n-1)_1$, wo, wie bekannt, $n_1 = 2^{n-1}$. Glr. (O.)

H. Postula, E. Catalan. Sur un problème d'arithmétique. N. C. M. IV. 204-209.

Es sei $\sigma(N)$ die Summe der Zahlen, prim und kleiner als N. Postula findet $2\sigma(N) = N\varphi(N)$ mittelst eines Weges, der dem analog ist, durch den man $\varphi(N)$ bestimmt (siehe Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie § 11). Catalan gelangt auf folgende Weise dazu: Eine Zahl λ, prim zu N, entspricht einer Zahl $N-\lambda$, ebenfalls prim zu N. Die Summe beider ist N. Die Summe $\sigma(N)$ der $\varphi(N)$ Zahlen λ plus der der $\varphi(N)$ Zahlen $N-\lambda$, die nothwendig identisch sind, ist also $N\varphi(N)$. Mn. (O.)

P. Mansion. Sur la théorie des nombres. Gand. Hoste.

E. Catalan. Théorème de MM. Smith et Mansion. N. C. M. IV. 103-111.

C. LE PAIGE. Sur un théorème de M. Mansion. N. C. M. IV. 176-177.

Die Brochüre enthält 5 Artikel, von denen 3 bereits in diesem Jahrbuch besprochen sind: 1) Sur un principe élémentaire d'arithmétique. Berichtigung eines Fehlers in Poinsot's: Réflexion sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. 2) Généralisation du théorème de Nicomaque, siehe F. d. M. VII. p. 90. 3) Généralisation d'un théorème de M. H. J. S. Smith. Siehe diesen Band p. 111. 4) Sur le théorème de Fermat. N. C. M. IV. 72-76 [(siehe F. d. M. VII. p. 88)], nebst historischen Notizen über diesen Satz. 5) Loi de réciprocité des résidus quadratiques. Siehe F. d. M. VIII. p. 93. Die Arbeit über den Satz von Smith enthält einen Beweis der Formel $\varphi(ab) = \varphi(a).\varphi(b)$, wo a und b relativ prim sind. Der Weg des in der letzten Arbeit angegebenen Beweises findet sich unter den Examinationsarbeiten der Universität Cambridge für 1878 angegeben.

Mn. (O.)

CH. LADD, H. L. ORCHARD. Solution of a question (5631). Educ. Times XXIX. 23-24.

Beweis, dass keine Potenz von 3 von der Form $13n-1$ ist, und dass die 14[te] Potenz von 3 die kleinste von der Form $29n-1$ ist.

O.

S. RÉALIS. Scolies pour un théorème de Fermat. Nouv. Ann. (2) XVII. 381.

Der Satz, um den es sich handelt, heisst: Jede ganze Zahl ist die Summe von 3 dreieckigen Zahlen.

O.

Correspondance. Nouv. Ann. (2) XVII. 462-464.

Es ist wegen

$$9n^2 = \frac{(3n^2+1)(3n^2+2)}{2} - \frac{(3n^2-2)(3n^2-1)}{2}$$

jedes durch 3 theilbare Quadrat die Differenz zweier zu 3 theilerfremden Triangularzahlen.

No.

H. W. L. Tanner. Arithmetical note. Messenger (2) VII. 157-158.

Bezieht sich auf den Beweis, dass $n!$ nicht Potenz einer ganzen Zahl sein kann. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On certain sums of squares. Messenger (2) VIII. 48.

Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Quadrate $\Sigma(a_i^{} a_j)^2$, gebildet durch Addition der Quadrate aller Paare der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$, kann, wenn n ungrade ist, ausgedrückt werden als Summe von n Quadraten in der Form:

$$\Sigma\{(a_1+a_2c_n+a_3c_{2n}+\cdots+a_rc_{rn-r})^2+(a_2s_r+\cdots+a_ns_{rn-n})^2\},$$

wo c_r gleich $\cos\frac{2r\pi}{n}$ und s_n gleich $\sin\frac{2r\pi}{n}$. Der entsprechende Satz für ein grades n wird ebenfalls gegeben.

Glr. (O.)

E. Cesaro. Théorème d'arithmétique. N. C. M. IV. 329.

Bezeichnet S_n die Summe der Reste der ganzen Zahl n bei der Division durch jede der vorhergehenden ganzen Zahlen, so hat man:

$$S_n+\int 1+\int 2+\int 3+\cdots+\int n = n^2,$$

wo $\int k$ die Summe der Theiler von k ist. Mn. (O.)

A. Z. Candido. Theorema da theoria dos numeros. Jorn. sc. math. e astr. I. 171-172.

Pepin. Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus de puissances. Acc. P. d. N. L. XXXI. 140-149.

W. MANTEL. Prijsvraag No. 12. Nieuw. Arch. IV. 57-59.

G. A. OSKAMP. Prijsvraag No. 12. Nieuw. Arch. IV. 83-94.

Zwei Lösungen der Aufgabe: Man soll beweisen, dass der Werth der Coefficienten, welche man bei der Untersuchung nach der Theilbarkeit durch eine Primzahl in jedem Zahlsystem benützen muss, um mittelst Abziehung ein, zwei, drei etc. Ziffern zu eliminiren, periodisch ist. Und zweitens, dass die Zahl von Gliedern der Periode der Zahl von Ziffern der Wiederholung, welche bei der Theilung durch dieselbe Primzahl nöthig ist, gleich ist. G.

E. LUCAS. Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques. N. C. M. III. 369-376, 401-407, IV. 1-8, 33-40, 65-71, 97-105, 129-134, 225-228.

G. DE LONGCHAMPS. Sur les formules u_n, v_n de M. E. Lucas. N. C. M. IV. 83-84.

Der zweite Artikel enthält die Verallgemeinerung einiger Formeln, die aus der Theorie von Lucas abgeleitet sind. Die Abhandlung des Herrn Lucas ist in 20 Paragraphen getheilt, und diese sind fast identisch mit den 17 ersten der unten besprochenen aus dem Am. J., während die No. 18 bis 30 des letzteren Ergänzungen dazu enthalten. Siehe das folgende Referat.

Mn. (O.)

E. LUCAS. Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. Am. J. I. 184-251, 289-321.

Die vorliegende Arbeit liefert eine Zusammenfassung, Entwickelung und Erweiterung der Untersuchungen des Herrn Verfassers, über die bereits F. d. M. VII. 88, VIII. 81, 82, IX. 111 referirt ist. — In $x^2 = px - q$ seien beide Coefficienten ganze Zahlen; aus den Wurzeln a und b werden die numerischen Functionen $u_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}$, $v_n = a^n + b^n$ gebildet. Sind a und b

reell und ganz, so heissen die Reihen solche erster Art; sind a und b reell, aber irrational, zweiter; sind a und b imaginär, dritter Art. Beispiele für die u-Reihen der drei Arten liefern die Fermat'sche: 0, 1, 3, 7, .. , für welche $u_{n+1} = 2u_n + 1$; die von Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, ..., für welche $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$; die Pell'sche: 0, 1, 2, 5, 12, ..., für welche $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ ist. Die grosse Fülle der Beziehungen dieser Reihen zu den goniometrischen Functionen, den Kettenbrüchen, Theilbruchreihen u. s. w. bietet nichts, was im Referate angegeben werden könnte.

Im zweiten Abschnitte wird das Auftreten der Primzahlen in den Reihen besprochen und der Fundamentalsatz aufgestellt: „Ist $m = p_1^{\pi_1}.p_2^{\pi_2}...$ eine zu $a.b$ theilerfremde Zahl, und bedeutet Δ die Discriminante der Gleichung $x^2 = px - q$ mit den Wurzeln a, b; ist ferner

$$\psi(m) = p_1^{\pi_1-1}.p_2^{\pi_2-1}...\left[p_1 - \left(\frac{\Delta}{p_1}\right)\right]\left[p_2 - \left(\frac{\Delta}{p_2}\right)\right]\cdots,$$

so wird $u_{\psi(m)} \equiv 0 \pmod{m}$; und wenn umgekehrt $u_n \equiv 0 \pmod{m}$ ist, dann wird n ein Vielfaches von $\psi(m)$ sein.“ Hieraus folgt dann, dass, wenn $u_{n\pm1}$ durch n theilbar wird, aber kein früheres u, dessen Index ein Theiler von $n \pm 1$ ist, n eine Primzahl sein muss. Diese Bedingung ist hinreichend aber nicht nothwendig; der Herr Verfasser scheint dies auch gesehen zu haben (S. 313), aber doch nicht scharf genug. Wenigstens giebt er auf Grund jenes Satzes mittelst unzulänglicher Beweise eine Reihe von Theoremen, über deren Richtigkeit Referent kein Urtheil wagt. Theorem II, S. 305 freilich ergiebt sich schon für die Beispiele $q = 0$, $q = 1$ als falsch. (Nebenbei mag bemerkt werden, dass auch an anderen Stellen die Strenge der Beweise nicht über allem Zweifel erhaben ist; so wird S. 309 geschlossen: Weil jedes Glied einer unendlichen Reihe eine Primzahl von der Form $5q + 2$ enthält, deshalb giebt es unendlich viele Primzahlen dieser Form. Der Schluss S. 291, Theorem IV ist noch etwas gewagter.) Aus diesen Resultaten zieht der Herr Verfasser die „einzige directe und praktische Methode“ für die Untersuchung grosser Zahlen hinsichtlich ihres Primzahlcharakters. Für gewisse Zahlformen, wie z. B. $2^{2^n} + 1$, $2^n - 1$ u. s. w. liefert die Methode in

der That bei verhältnissmässig geringem Zeitaufwand die Entscheidung. No.

E. Lucas. Théorèmes d'arithmétique. Atti di Torino XIII. 271-285.

Aus dem Gauss'schen Theorem

$$4\frac{x^p-1}{x-1} = Y^2 - \left(\frac{-1}{p}\right)px^2Z^2$$

wird ein ähnliches:

$$16\frac{x^p-1}{x-1} = G^2 - \left(\frac{-1}{p}\right)px^2H^2$$

hergeleitet und auf die Functionen u_n, v_n angewendet. (Siehe die vorige Arbeit.) $\frac{v_{2pr}}{v_{2r}}$, $\frac{u_{pr}}{u_r}$ werden zerlegt, und sobald p eine Primzahl von der Form $4q+1$ ist, findet man:

$$\frac{u_{pr}}{u_r} = Y^2 - pQ^rZ^2, \quad \frac{v_{pr}}{v_r} = Y^2 + pQ^r\Delta Z^2;$$

da unter gewissen Umständen die zweiten Summanden der rechten Seiten Quadrate werden, so hat man in diesem Falle eine Factorenzerlegung der Quotienten auf der linken Seite und kann dies zur Erforschung des Primzahlcharacters gewisser Zahlen von der Form 2^a+1 benutzen. Siehe auch die Arbeit von Bouniakowsky p. 127-128. No.

E. de Jonquières. Étude sur les décompositions en sommes de deux carrés, du carré d'un nombre entier composé de facteurs premiers de la forme $4n+1$, et de ce nombre lui-même. Formules et application à la résolution complète, en nombres entiers, des équations indéterminées, simultanées,

$$y = x^2 + (x+1)^2 \quad \text{et} \quad y^2 = z^2 + (z+1)^2.$$

Nouv. Ann. (2) XVII. 241-247, 289-310.

Ist die Zahl N das Product von n Factoren f_λ der Form $4\alpha+1$, wo $f_\lambda = a_\lambda^2 + b_\lambda^2$ gesetzt werden kann, so giebt es

2^{n-1} Darstellungen von N als Summe zweier Quadrate und $\frac{1}{2}(3^n-1)$ von N^2. Die letzteren zerfallen in n Unterabtheilungen, je nachdem bei $N^2=x^2+y^2$ die drei Zahlen x, y, N eine Anzahl von $n-1$, $n-2,\ldots 1$, 0 Factoren f_λ gemeinsam haben. Die Anzahl der Darstellungen ist bezüglich

$$n,\ 2\binom{n}{2},\ 2^2\binom{n}{3},\ldots 2^{n-2}\binom{n}{n-1},\ 2^{n-1},$$

und für die erste der Abtheilungen wird

$$x=(a_i^2-b_i^2)\frac{N}{\mathfrak{f}_i},\ y=2a_ib_i\frac{N}{\mathfrak{f}_i}$$

werden. Zu diesen von Volpicelli (Nouv. Ann. 1850 (1) IX.) gegebenen Resultaten fügt der Herr Verfasser als Vervollständigung die Angabe der Formen für x und y auch bei den übrigen Unterabtheilungen hinzu. Von Wichtigkeit sind besonders die Darstellungen der letzten Abtheilung, weil diese mit den Zerlegungen von N selbst in Beziehung stehen. Setzen wir nämlich

$$N_\alpha=\mathfrak{f}_1.\mathfrak{f}_2\ldots\mathfrak{f}_\alpha=L_\alpha^2+P_\alpha^2,$$

so wird

$$\begin{aligned}N_{\alpha+1}=\mathfrak{f}_1\ldots\mathfrak{f}_\alpha.\mathfrak{f}_{\alpha+1}&=L_{\alpha+1}^2+P_{\alpha+1}^2\\&=(a_{\alpha+1}L_\alpha-b_{\alpha+1}P_\alpha)^2+(a_{\alpha+1}P_\alpha+b_{\alpha+1}L_\alpha)^2,\end{aligned}$$

und aus dieser einen Darstellung gehen die übrigen dadurch hervor, dass man die Vorzeichen der $b_1, b_2,\ldots b_{\alpha+1}$ in gewisser Weise ändert; ist ferner

$$N=L_i^2+P_i^2=L_k^2+P_k^2,$$

so wird

$$N^2=(L_i^2-P_i^2)^2+(2L_iP_i)^2 \quad\text{oder}\quad =(L_iL_k\mp P_iP_k)^2+(L_iP_k\pm L_kP_i)^2$$

werden, und zwar liefert die erste dieser beiden Darstellungen von N^2 alle zur letzten Abtheilung gehörige und nur diese.

Ist ferner

$$y=x^2+(x+1)^2;\ y^2=z^2+(z+1)^2,$$

so wird die Zerlegung von y^2 zur letzten Abtheilung gehören, also muss für $y=L^2+P^2$ werden:

$$y^2=(L^2-P^2)^2+(2LP)^2,$$

wobei

$$(L^2-P^2)-2LP=\pm 1$$

werden müsste. Wenn nun $L=P+\alpha$ ist, so ergiebt sich

$\alpha^2-2P^2=\pm 1$, d. h. es müssen α, P Zähler und Nenner der Näherungswerthe in der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ sein. Setzt man nun voraus, wie der Herr Verfasser es unbewiesen und ungerechtfertigt thut, dass die Zerlegung von $y^2=(z+1)^2+z^2$ aus der von $y=(x+1)^2+x^2$ entstanden ist, dass also $L=x+1$, $P=x$ ist, dann kann man $\alpha=1$ annehmen und erkennt sofort aus den Näherungswerthen, dass $P=x=1$, $y=L=2$ die einzige Lösung des Systems ist. Darüber, dass

$$y=L_1^2+P_1^2=L_2^2+P_2^2,\ L_1-P_1=\pm 1,\ (L_2^2-P_2^2)-L_2P_2=\pm 1$$

sein könnte, ist Nichts gesagt; richtig ist das Resultat nur, wenn y eine Primzahl ist. No.

E. de Jonquières. Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme x^2+ty^2, t étant un nombre rationnel positif ou négatif; résolution en nombres entiers du système des équations indéterminées

$$y=x^2+t(x+\alpha)^2,\quad y^2=z^2+t(z+\beta)^2.$$

Nouv. Ann. (2) XVII. 419-425, 433-446.

Mittels einer geringen Aenderung der eben besprochenen Zerlegungsformeln für $N^2=x^2+y^2$ erhält der Herr Verfasser die für $N^2=x^2+ty^2$, wenn N nur Factoren von der Form $a_1^2+tb_1^2$ besitzt. Bei den Anwendungen auf die unbestimmten Gleichungen tritt der oben angegebene Mangel wieder auf, wie bei diesen allgemeinen Gleichungen bereits sehr einfache Beispiele zeigen.
No.

E. de Jonquières. Méthode nouvelle pour la décomposition des nombres en sommes quadratiques binaires; application à l'analyse indéterminée. C. R. LXXXVII. 399-402.

Mittheilung der Resultate der beiden oben besprochenen Arbeiten. No.

L. H. Bie. Kongruenser og deren Anvendelse i den ubestemte Analyse. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 161-178.

Elementare Darstellung der Lehre von den Zahlcongruenzen des ersten Grades und ihrer Anwendung zur Lösung von unbestimmten Gleichungen. Gm.

Ch. Ladd. Note on the solution of a congruence of the first degree when the modulus is a composite number. Educ. Times XXX. 41-42.

Die Lösung von $ax+b\equiv 0$ (mod. M), wo $M=M_1.M_1.M_2\ldots M_k$, wird, statt wie bei Serret (Alg. Sup. 4me éd. Art. 289) auf die Lösung von

$$a\alpha+b\equiv 0 \text{ (mod. } M_1), \; a\alpha_1+b_1\equiv 0 \text{ (mod. } M_2)\ldots,$$

zurückgeführt auf

$$az+1\equiv 0 \text{ (mod. } M_1), \; az_1+1\equiv 0 \text{ (mod. } M_2)\ldots$$

O.

H. W. L. Tanner. Arithmetical note. Messenger (2) VIII. 13-17.

Die Notiz bezieht sich auf Zahlen, welche Vielfache von der Form 100...01 haben. Ist r die Wurzel der Bezeichnungsscala (radice of the scale of notation) und N eine gegebene Zahl, so bestimmt der Verfasser die Werthe von r und m, welche der Congruenz $r^m+1\equiv 0$ (mod. N) genügen. Z. B. für $N=13$, ist r^6+1 oder 1000001 ein Vielfaches in jeder der Scalen 2, 5, 6, 7, 8, 11; r^3+1 oder 1001 ist ein Vielfaches in den Scalen 4, 10, 12; r^2+1 oder 101 in den Scalen 5, 8, und $r+1$ in der Scale von 12. In den Scalen 1, 3, 9 giebt es kein Vielfaches der geforderten Form.

Glr. (O.)

E. Lucas. Sur les congruences des nombres eulériens et les coefficients différentiels des fonctions trigonométriques suivant un module premier. Bull. S. M. F. VI. 49-54.

Die Euler'schen Zahlen, für welche die symbolische Gleichung

$$(E+1)^n+(E-1)^n=0$$

besteht, haben die Eigenschaften

$$E_{p-1}+E_{p-3}+E_{p-5}+\cdots+E_2+E_0\equiv 0 \pmod{p}$$

$$E_{2n}\equiv E_{2n+k(p-1)} \pmod{p}.$$

No.

VON SCHÄWEN. Die diophantischen Gleichungen ersten Grades. Hoffmann Z. IX. 105-118.

Der Verfasser bespricht zunächst die zwei Lösungsmethoden der diophantischen Gleichungen ersten Grades, welche in den arithmetischen Lehrbüchern gewöhnlich auseinandergesetzt werden, die Euler'sche und die Lagrange'sche Methode. Gegen die Euler'sche Reductions- oder Divisionsmethode erklärt er sich in Ausdrücken, die dem Referenten etwas übertrieben erscheinen. Von der Lagrange'schen Methode giebt er eine Darstellung, welche besser sein soll, als die in dem Mehler'schen Lehrbuch enthaltene in folgender Weise: Die Wurzeln der Gleichung $ax+by=c$, worin a und b theilerfremd sein müssen, sind die Lösungen des Systems $ax+by=c$ und $ax+\beta y=m$, wo m eine willkürliche ganze Zahl ist, α und β Zähler und Nenner des letzten Näherungsbruches von $\frac{a}{b}$ sind. a und α haben gleiche Vorzeichen, ebenso b und β. Darauf wendet sich der Verfasser zu den Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten und behandelt hierbei ausführlich die Aufgabe, diejenigen Zahlen zu bestimmen, welche durch $a_1, a_2, \ldots a_n$ dividirt der Reihe nach die Reste $r_1, r_2, \ldots r_n$ geben. Schl.

C. DE POLIGNAC. Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax+by=c$. Bull. S. M. F. VI. 158-163.

Verwendung zweier Systeme aequidistanter Geraden von der Entfernung 1 zu der Auflösung der numerischen Gleichung

$$ax+by=c.$$

No.

A. GENOCCHI. Sur une formule de Libri. N. C. M. IV. 319-323.

Vereinfachung der von Libri (Mém. des Sav. étr. de Paris V und Ann. de Gergonne XVI) gegebenen Lösungen der unbestimmten Gleichung $by - ax = c$. Mn. (O.)

S. TEBAY, Lloyd TANNER a. o. Solutions of a question (5540). Educ. Times XXIX. 94-95.

Die Zahlen M und N zu finden, welche der Proportion

$$N + 10^n M : M + 10^n N = a : b$$

für gegebene n, a, b genügen. M.

F. TIRELLI. Soluzione di una quistione sui numeri fratti. Battaglini G. XVI. 88-91.

Betrifft die Zerlegung eines gegebenen Bruches in die Summe oder Differenz zweier anderen Brüche, von welchen die Nenner gegeben sind. Schl.

F. G. TEIXEIRA. Sur la décomposition des fractions rationnels. Jorn. sc. math. e astr. I. 1-12, 17-24, 33-37, 49-56, 97-101, 113-120.

A. KUNERTH. Praktische Methode zur numerischen Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in rationalen Zahlen. Wien. Ber. 1878.

Die Gleichung $y^2 = ax^2 + bx + c$ lässt sich auf beliebig viele Arten in einen Ausdruck von der Form

$$y^2 = (\alpha x + \beta)^2 + (\gamma x + \delta)(\varepsilon x + \zeta)$$

verwandeln und eine jede Transformation liefert zwei Werthe für x, aus denen sich andere finden lassen. Zur Bestimmung der Coefficienten α, β u. s. w. giebt der Verfasser geeignete Hilfsmittel an und erläutert sein Verfahren an mehreren Zahlenbeispielen. Schl.

S. ROBERTS. On the decomposition of certain numbers into sums of two square integers by continued fractions. Proc. L. M. S. IX. 187.

Ist $D = (\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2)$, $\alpha\delta-\beta\gamma = \pm 1$ und bedeutet $E(x)$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl, so findet für

$$P = E\left(\frac{2\beta\delta}{\beta^2+\delta^2} E\sqrt{D}\right)+1$$

$$Q = E\left(\frac{\beta^2-\delta^2}{\beta^2+\delta^2} E\sqrt{D}\right)+1$$

die Gleichung statt

$$D = P^2+Q^2,$$

wenn D nicht von der Form t^2+1 ist, sonst

$$D = P^2+(Q-1)^2.$$

Es schliessen sich an diese Ableitung weitere Entwickelungen über die Form, welche D gemäss der obigen Bedingung haben muss. No.

A. SÝKORA. Zerlegung einer Zahl in die Differenz zweier Quadrate. Grunert Arch. LXI. 446-447.

Es ist

$$mn = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

No.

E. LUCAS. Sur le système des équations indéterminées $x^2-Ay^2 = u^2$, $x^2+Ay^2 = v^2$. Nouv. Ann. (2) XVII. 446-454.

Es wird gezeigt, dass das angegebene von Herrn Lucas schon mehrfach behandelte System dann und nur dann lösbar ist, wenn man hat

$$A = \lambda\mu(\lambda+\mu)(\lambda-\mu).$$

Ausserdem werden Formeln angegeben, welche von einer Lösung des Systems auf eine andere führen. No.

D. S. HART. Solution of an indeterminate problem. Analyst V. 118-119.

Enthält bekannte Lösungen von $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, nebst Beispielen. Glr. (O.)

H. BROCARD. Notes élémentaires sur le problème de Pell. N. C. M. IV. 161-169, 193-200, 228-232.

Auseinandersetzung der Lagrange'schen Lösung und Anwendung seiner Methode zur algebraischen Lösung der unbestimmten Gleichung

$$x^2 = \pm(1 - y^2).$$

Den Schluss bilden bibliographische Notizen. Mn. (O.)

H. S. MONCK. Solution of a question (4253). Educ. Times XXIX. 23.

Ueber pythagoräische Dreiecke; siehe question 4102, F. d. M. VI. 107. M.

H. S. MONCK. Solution of a question (5573). Educ. Times XXIX. 74-75.

Ueber rechtwinklige Parallelepipede mit rationalen Kanten und Diagonalen. M.

E. LUCAS. Théorème sur la géométrie des quinconces. Nouv. Ann. (2) XVII. 129-130.

Der Satz „Die Mittelpunkte der Felder eines Schachbrettes können niemals so zu Tripeln vereinigt werden, dass dieselben den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks entsprechen", wird aus der Relation

$$3(a^2 + b^2) = (a + c)^2 + (b + d)^2$$

apagogisch hergeleitet, welch letztere eine zahlentheoretische Unmöglichkeit ist. Dabei sind a, b und c, d die Coordinaten zweier

solcher Mittelpunkte, während der dritte im Ursprung des Systems liegt. Gr.

E. Lucas. Théorème sur la géométrie des quinconces.
Bull. S. M. F. VI. 9-10.

Der Satz ist der gleiche, wie oben, nur wird er noch dahin erweitert, dass an Stelle eines regulären Dreiecks auch nie ein ebensolches Sechseck treten kann. Die simultanen Gleichungen

$$x^2+y^2 = u^2+v^2 = 2(ux+vy)$$

lassen demgemäss keine rationalen Lösungen zu. Auch wird eine stereometrische Generalisirung dieses Lehrsatzes angedeutet, welche sich auf ein sogenanntes Raumgitter bezieht. Gr.

M. Laisant. Note sur la géométrie des quinconces.
Bull. S. M. F. VI. 156-158.

Der oben erwähnte Lehrsatz von Lucas wird hier in elementarer Weise, ohne Zuziehung eines zahlentheoretischen Hülfssatzes, erwiesen. Durch eine höchst einfache Coordinatenbetrachtung erhellt nämlich, dass die Mittelpunkte dreier beliebiger Felder ein Dreieck bilden, für dessen Winkel die Tangenten rationale Zahlen sind, wogegen $\tang 60^\circ = \sqrt{3}$ ist. Verf. macht auch noch darauf aufmerksam, in wie naher Beziehung die „géométrie des quinconces" zu der bekannten graphischen Darstellung der complexen Zahlen und zur Aequipollenzenlehre steht. Gr.

S. Réalis. Questions 271, 272, 273. N. C. M. IV. 27-30.

Jede ganze Zahl ist die Summe von 4 Zahlen, enthalten in einer der Formeln $\frac{1}{2}(3z^2 \pm z)$, $2z^2 \pm z$. Mn. (O.)

Note sur la résolution en nombres entiers et positifs des deux équations indéterminées

$$x = 4y^2+1, \quad x^2 = z^2+(z+1)^2.$$

Nouv. Ann. (2) XVII. 521-523.

Auf Grund des Legendre'schen Satzes, dass ausser 1 keine

Triangularzahl eine vierte Potenz sein kann, folgt, dass $x = 5$ die einzige Lösung des obigen Systems ist. No.

GERONO. Résolution en nombres entiers positifs du système des trois équations

$$x = u^2,\ x+1 = 2v^2,\ 2x+1 = 3w^2.$$

Nouv. Ann. (2) XVII. 381-383.

Herr Lucas hat gezeigt, dass

$$x = u = v = w = 1$$

die einzige Lösung ist; dasselbe wird hier mit Hülfe der oben besprochenen Gleichungen

$$x = 4y^2+1,\ x^2 = z^2+(z+1)^2$$

nachgewiesen. No.

L. W. JONES, C. VINCENZO, C. LEUDESDORF, EVANS Solutions of a question (5484). Educ. Times XXIX. 90-91.

Es werden 3 positive ganze Zahlen gesucht, die so beschaffen sind, dass das Product zweier von ihnen, vermindert um die Summe derselben zwei, ein Quadrat ist. Solche Zahlen sind z. B.: 2, 3, 6; 3, 6, 14; etc. O.

E. DE JONQUIÈRES. Détermination de certains cas généraux où l'équation $x^3 \pm a = y^2$ n'admet pas de solution en nombres entiers. Nouv. Ann. (2) XVII. 374-381.

E. DE JONQUIÈRES. Au sujet des cas d'impossibilité d'une. solution en nombres entiers de l'équation $x^3 \pm a = y^2$. Nouv. Ann. (2) XVII. 514-516.

Für

$$a = (8b+1)^2-4;\ (8b+5)^2-4^3;\ (4b+2)^2-1$$

ist $x^3 \pm a = y^2$ nicht lösbar. No.

E. LUCAS. Sur l'équation indéterminée $x^3+y^3 = az^3$. Nouv. Ann. (2) XVII. 425-426.

Aus der Identität

$$[s^3-t^3+6s^2t+3st^2]^3+[t^3-s^3+6t^2s+3ts^2]^3$$
$$=st.(s+t).3^2[s^2+st+t^2]^3$$

folgt, dass $x^3+y^3=az^3$ dann und nur dann befriedigt werden kann, wenn a, abgesehen von cubischen Factoren, die Form $st(s+t)$ hat. No.

Desboves. Sur l'emploi des identités algébriques dans la résolution, en nombres entiers, des équations d'un degré supérieur au second. C. R. LXXXVII. 159-161, 321-322.

Aehnlich wie die obige Identität wendet Herr Désboves die folgende

$$(s^2-2st-t^2)^4+(2s+t)s^2t(2t+2s)^4$$
$$=(s^4+t^4+10t^2s^2+4st^3+12s^3t)^2,$$

an, um die Möglichkeit der Lösung von $x^4+ay^4=z^2$ zu zeigen, wenn a die Form $(2s+t)s^2t$ hat. Aendert man s und t in s^2, t^4 um, so hat a die Form $2s^2+t^4$; ändert man s in $s+t$, dann in der neuen Identität t in s^2+t^2 und endlich t^2 in $2st(2st-s^2+t^2)$ um, so findet sich für a die Form

$$-2st(s^2-t^2)[(s^2-t^2)^2-4s^2t^2].$$

Aehnliche Identitäten liefern die Lösung für

$$a=-8(x^8+y^8);\quad -s(s^2+4),\quad -(s^8+4).$$

No.

Desboves. Deuxième note sur la résolution en nombres entiers de l'équation $ax^4+by^4=cz^2$. C. R. LXXXVII. 598-600.

Falls $a+b$ ein Quadrat ist, lassen sich Formeln angeben, die aus einer Lösung von $ax^4+by^4=cz^2$ acht neue, die aber nicht nothwendig alle von einander verschieden sind, liefern.

No.

Desboves. Sur la résolution en nombres entiers de l'équation $ax^4+by^4=cz^2$. C. R. LXXXVIII. 522-523.

Beweis folgenden Satzes: Sind a und c gleich 1 und b von der Form $u^2v(2u+v)$ oder einer der derivirten Formen

$$(v^2\pm 2u^2)v,\ (2u+v^4)u^2,\ v^4\pm 2u^2,\ (v^2-u^2)u^2,$$
$$-u^2(u^2+v^2),\ \pm v^2-u^4,\ -u^2v^2(u^2-v^2)^2,$$

so kann man mit Hülfe einer Identität stets eine erste Lösung der Gleichung erhalten. Man findet dann andere Lösungen mit Hülfe der Formeln

$$X=2x^4-z^2,\ Y=2xyz,\ Z=z^4+4bx^4y^4,$$

oder

$$X_1=x(4a^2x^8-3c^2z^4),\ Y_1=y(4b^2y^8-3c^2z^4),$$
$$Z_1=z(c^4z^8+24ab(c^2z^4-2abx^4y^4)).$$

O.

E. Lucas. Sur l'analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802. Nouv. Ann. (2) XVII. 507-514.

Ableitung neuer ganzzahliger Lösungen für unbestimmte Gleichungen dritten Grades mit drei Unbekannten aus bereits vorhandenen. Beweis des Sylvester'schen Satzes: $x^3+y^3=m$ ist in rationalen Zahlen nicht lösbar, wenn m eine der Formen p, $2p$, $4p^2$; q^2, $2q^2$, $4q$ hat, wobei p eine Primzahl der Form $18n+5$, q eine solche der Form $18n+11$ bedeutet.

No.

S. Réalis. Sur quelques équations indéterminées du troisième degré. Nouv. Ann. (2) XVII. 454-457.

Bekannt war, dass aus einer Lösung α, β, γ der Gleichung $x^3+y^3=9z^3$ andere mittels der Formeln

$$x=\alpha(\alpha^3+2\beta^3),\ y=-\beta(\beta^3+2\alpha^3),\ z=\gamma(\alpha^3-\beta^3)$$

abgeleitet werden können; ein neues System von Lösungen erhält man durch

$$x=2\alpha^2-4\alpha\beta+9\beta\gamma-9\gamma^2;\ y=2\beta^2-\alpha\beta+9\alpha\gamma-18\gamma^2;$$
$$z=2\alpha^2-4\alpha\gamma-\beta\gamma+\beta^2.$$

Für die Gleichung $x^3+y^3=7z^3$ wird ein ähnliches System angegeben, um von bekannten Lösungen, z. B. $x=2$, $y=-1$, $z=1$ auf neue zu kommen.

No.

A. H. Frost. Description of plates 3 to 9. Quart. J. XV. 366-368.

Erklärung der Eigenthümlichkeiten von 7 zusammengehörigen, magischen Würfeln, die in den Figurentafeln angegeben sind.

No.

S. Réalis. Note sur quelques équations indéterminées. N. C. M. IV. 325-328, 346-352, 369-371.

Quadratische, cubische und biquadratische Gleichungen, unter denen $x^3+y^3+z^3+u^3=v^3$ eine der wichtigsten ist.

Mn. (O.)

E. Catalan. Décomposition d'un cube en quatre cubes. N. C. M. IV. 352-354, 371-373.

Zahlreiche Folgerungen aus einer algebraischen Identität, die zu complicirt ist, um hier wiedergegeben werden zu können.

Mn. (O.)

Th. Pepin. Sur les équations biquadratiques et indéterminées. Acc. P. d. L. XXXI. 397-427.

S. Réalis. Note sur un théorème d'arithmétique. N. C. M. IV. 209-210.

E. Lucas. Sur la décomposition des nombres en bicarrés. N. C. M. IV. 323-325.

Jede Zahl ist die Summe von 53 Biquadraten (Liouville), 6 wenigstens sind Null (Réalis); 8 wenigstens sind 1000 (Lucas).

Mn. (O.)

E. Lucas. Sur un théorème de M. Liouville concernant la décomposition des nombres en bicarrés. Nouv. Ann. (2) XVII. 536-537.

Der Verfasser zeigt, dass man die Anzahl von 53 Biquadraten auf 41 erniedrigen kann.

F. P. Ruffini. Di un problema di analisi indeterminata. Rend. di Bol. 1877. 121-125; Mem. di Bol. VIII. 199-215.

L. Porfirio da Motta Pegado. Su un problema de analyse indeterminada. Jorn. sc. math. e astr. I. 150-155.

Lösungen weiterer Aufgaben aus der Zahlentheorie von C. Leudesdorf, S. Roberts, Evans, H. L. Orchard finden sich Educ. Times XXX. 37, 38.

O.

A. Cayley. Formulae involving the seventh root of unity. Messenger (2) VII. 177-182.

Die imaginären siebenten Wurzeln der Einheit werden dargestellt als lineare Functionen von α, β mit Coefficienten, welche Functionen von ω, X sind, wo

$$\omega = \tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{7}),\ \alpha^3 = -7(1+3\omega),\ X = \tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{7}).$$

Herr Cayley giebt dabei auch eine Uebersicht über den Inhalt der Arbeit von Jacobi: „Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie." (Berl. Monatsber. 1837 und Crelle J. XXX. 166—182). Als Beispiel werden die Methoden von Jacobi und Gauss auf die fünften Wurzeln der Einheit angewandt und völlig durchgeführt, um daran den Unterschied zwischen den Methoden zu zeigen. Glr. (O.)

E. Lucas. Sur les suites de Farey. Bull. S. M. F. VI. 118-119.

Die Reihe entsteht, indem man in 1, 1 die Summe beider aufeinanderfolgender Terme einschaltet, und mit der so erhaltenen Folge 1, 2, 1 in gleicher Weise fortfährt; man kommt also zu den Folgen 1, 3, 2, 3, 1; 1, 4, 3, 5, 2; 5, 3, 4, 1 u. s. w. Von diesen Reihen werden einige Eigenschaften abgeleitet.

No.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

G. Oltramare. Sur la transformation des formes linéaires des nombres premiers en formes quadratiques. C. R. LXXXVII. 734-736.

Wenn eine Primzahl p von einer der linearen Formen $2\alpha m+1$ oder $4\alpha m+1$ in die quadratische Form $x^2+\alpha y^2$ gebracht werden kann, so ist

$$x\equiv\pm\tfrac{1}{2}A^m.\varphi(m)^{c_1}.\varphi(2m)^{c_2}.\varphi(3m)^{c_3}\dots\varphi(\alpha m)^{c_\alpha}\quad(\text{mod. } p),$$

wobei A eine algebraische Function von m bedeutet, $c_1, c_2, \dots c_\alpha$ ganze Zahlen $<p$ sind, α eine ganze Zahl $\leqq\frac{p-1}{4p}$ ist, und

$$\varphi(m)=\frac{(m+1)(m+2)\dots(2m)}{1.2\dots m}$$

wird. Für eine Reihe von linearen Formen werden die Werthe von x gegeben. No.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

E. Sang. On the tabulation of all fractions having their value between two prescribed limits. Trans. of Edinb. XXXVIII. II. 287-298.

Das Verfahren beruht auf folgendem Satz: Wenn $\frac{A}{\alpha}$, $\frac{C}{\gamma}$ Brüche, in ihren kleinsten Zahlen geschrieben, sind, so dass $A\beta-B\alpha=\pm1$, so ist ein Bruch von zwischenliegendem Werth von der Form

$$\frac{B}{\beta}=\frac{pA+qC}{p\alpha+q\gamma},$$

wo p und q positive ganze Zahlen sind. Auch dieser Bruch ist in kleinsten Zahlen geschrieben, wenn p und q relativ prim zu einander sind. Als Beispiel wird eine Tafel auf 6 Decimalstellen der Werthe all' der Brüche, deren Zähler und Nenner nicht grösser als 20 sind, gegeben. Cly. (O.)

S. GÜNTHER. Nuovo metodo per sommare direttamente le frazioni continue periodiche. Battaglini G. XVI. 234-243.

Uebersetzung der Arbeit des Herrn Günther (vgl. F. d. M. IX. p. 144) durch Herrn G. Garbieri. No.

P. APPELL. Sur les fractions continues périodiques. Grunert Arch. LXII. 183-188.

Aus dem Kettenbruche von p-gliedriger Periode

$$u_1+\cfrac{1}{u_2+\cdot_{\cdot_{\cdot+\cfrac{1}{u_p+\cfrac{1}{u_1+\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}}}}$$

soll ein willkürlicher n^{ter} Näherungswerth in der Form $f_{(n,u_1,\dots u_p)}$ hergeleitet werden. Nach Erledigung des Specialfalles $p=2$, dessen Behandlung die allgemeine nachgebildet ist, betrachtet Verfasser die trinomische Gleichung

$$X_{n+p}-(P_p+Q_{p-1})X_n+(-1)^pX_{n-p}=0$$

und findet hieraus, unter $\alpha_1\dots\alpha_p$ die Wurzeln der binomischen Gleichung $\alpha^p-1=0$ verstanden,

$$X_n = a^n\sum_{i=1}^{i=p}A_i\alpha_i^n+b^n\sum_{i=1}^{i=p}B_i\alpha_i^n,$$

wo

$$A_1\dots A_p,\ B_1\dots B_p$$

Constante, a und b dagegen die p^{ten} Wurzeln aus den beiden, die Gleichung

$$x^2-(P_p+Q_{p-1})x+(-1)^p=0$$

befriedigenden Werthen vorstellen. Die Constanten werden, je nachdem X_n in den Zähler oder Nenner des gesuchten Näherungsbruches $\frac{P_n}{Q_n}$ sich verwandeln soll, resp. durch eines der beiden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ll} X_0 = P_0, & X_0 = Q_0, \\ X_1 = P_1 & X_1 = Q_1 \\ \vdots & \vdots \\ X_{2p-1} = P_{2p-1} & X_{2p-1} = Q_{2p-1} \end{array}$$

bestimmt. Gr.

K. E. Hoffmann. Die geschlossene Form der periodischen Kettenbrüche. Grunert Arch. LXII. 310-317.

Der Verfasser behandelt das nämliche Problem, wie Appell (s. p. 151), doch erhält sein Resultat zufolge des von ihm eingeschlagenen Weges eine andere Gestalt. Indem er, vom Kettenbruch

$$\cfrac{1}{z_1+\cfrac{1}{z_2+\ddots+\cfrac{1}{z_n+\cfrac{1}{z_1+\ddots}}}}$$

ausgehend, die Determinante

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & z_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & z_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_n \end{vmatrix} = D_{1,n}$$

setzt und damit auch für die Determinante $D_{i,k}$ die Bedeutung festlegt, ergiebt sich ihm für einen beliebigen r^{ten} Näherungswerth folgender Ausdruck:

$$2D_{2,n}:\left[2D_{1,n}+(-1)^{n-1}\frac{(D_{1,n}+D_{2,n-1}+\sqrt{(D_{1,n}+D_{2,n-1})^2+4(-1)^{n-1}})^{r-1}}{(D_{1,n}+D_{2,n-1}+\sqrt{(D_{1,n}+D_{2,n-1})^2+4(-1)^{n-1}})^{r}}\right.$$
$$\left.\frac{-(D_{1,n}+D_{2,n-1}-\sqrt{(D_{1,n}+D_{2,n-1})^2+4(-1)^{n-1}})^{r-1}}{-(D_{1,n}+D_{2,n-1}-\sqrt{(D_{1,n}+D_{2,n-1})^2+4(-1)^{n-1}})^{r}}\right].$$

Beiden Autoren scheint es vollständig entgangen zu sein, dass diese Frage Seitens des Berichterstatters bereits im 22. Bande der „Zeitschr. f. Math. u. Phys." in einem Aufsatze erledigt worden ist, den Herr Garbieri für das Battaglini'sche Journal übersetzt und mit Noten bereichert hat (s. p. 151). Gr.

Ed. Weyr. Ueber die Kettenbruchentwickelung der Wurzelgrössen zweiten Grades. Prag. Ber. 1877. 65-73.

Während man früher der Meinung war, dass die Richtigkeit der bekannten Relation

$$\sqrt{a^2-b} = a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cdots}}$$

an die Ungleichung $2a \geqq b+1$ gebunden sei, zeigten 1869 und und 1872 Emil Weyr und Schlömilch, dass $a^2 > b$ die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz obigen Kettenbruches sei. Für diese Thatsache erhalten wir hier einen neuen Beweis, dessen Eigenthümlichkeit im Ausschluss aller der Kettenbruchlehre selbst eigenthümlichen Hülfssätze liegt. Ohne jede Zuziehung construktiver oder rechnerischer Betrachtungen hat früher Referent (Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873, S. 90) die Nothwendigkeit fraglicher Convergenzbedingung dargethan.

Gr.

J. S. E. Dickson. Continued roots. Analyst V. 20-21.

Der Ausdruck

$$\sqrt{q-p\sqrt{q-p\sqrt{q-\cdots}}}$$

wird eine Kettenwurzel genannt, analog dem Kettenbruch,

$$\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p+\ddots}}},$$

dem er gleich ist, indem beide eine Wurzel der Gleichung $x^2+px=q$ darstellen. Bemerkt wird, dass ein ähnlicher Ausdruck für eine Wurzel der Gleichung $x^4+px=q$ existirt. Eigenschaften dieser Kettenwurzeln werden nicht abgeleitet.

Glr. (O.)

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

F. J. BROCKMANN. Kleinigkeiten aus dem Gebiete der combinatorischen Operationen, der Binomialcoefficienten, der figurirten Zahlen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Pr. Cleve.

Der Inhalt der vorliegenden Abhandlung ist aus dem Titel ersichtlich. Verfasser stellt in derselben die Combinationslehre mit ihren Anhängen in derjenigen Abgrenzung dar, in welcher sie nach seinem auf Erfahrung gestützten Urtheile, dem Zwecke der Schule entsprechend und mit Erfolg in der Prima behandelt werden könne. Schl.

TH. VON OPPOLZER. Ueber einige Relationen zwischen den Combinationssummen der Quadrate der graden und ungraden Zahlen. Clebsch Ann. XIII. 405-411.

Wir heben von den in der Abhandlung entwickelten zahlreichen Formeln eine der wichtigsten hervor:

$$\sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{n^{2p-1}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}\{2^2, 4^2, \ldots (2d-2)^2\}$$
$$= (n+d-1) \sum_{p=1}^{p=d} (-1)^{d-p} \frac{(n-\frac{1}{2})^{2p-2}}{2^{2(d-p)}} C^{d-p}\{1^2, 3^2, \ldots (2d-3)^2\}.$$

In dieser Formel bedeutet n eine beliebige, d eine positive ganze

Zahl, und C^{d-p} die Summe der Combinationen ohne Wiederholung der in der Klammer stehenden Elemente zur Klasse $(d-p)$.
Schl.

D. André. Sur le nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données. C. R. LXXXVII. 838-840.

Verfasser stellt eine allgemeine Regel für die Behandlung der Probleme der combinatorischen Analysis auf.

Schl.

W. A. Whitworth. Arrangements of m things of one sort and n things of another sort, under certain conditions of priority. Messenger (2) VIII. 105-114.

Die Bedingungen der Voranstellung sind so beschaffen, dass sie Grenzen für das Verhältniss der beiden Klassen von Gegenständen in einem Theil der Anordnung aufstellen; z. B. wenn eine Urne schwarze und weisse Kugeln enthält, welche nach einander herausgezogen werden sollen, kann die Reihenfolge, in der dies geschehen soll, durch die Bedingung begrenzt werden, dass die Zahl der gezogenen weissen Kugeln nie die der schwarzen überschreiten darf, oder durch die Bedingung, dass der Ueberschuss der schwarzen Kugeln über die weissen immer grösser sein muss, als eine gegebene Zahl. Im Weiteren folgt eine allgemeine Untersuchung über die Anzahl der Wege, auf denen der Punkt P erreicht wird von dem Punkt O, dadurch dass er m Felder parallel OX und n Felder parallel OY (OX und OY rechtwinklige Axen) berührt unter der Bedingung: 1) dass das Feld nicht die den Winkel XOY halbirende Diagonale kreuzt, 2) dass es die Diagonale in der Entfernung h von dieser Diagonale nicht kreuzt.

Die allgemein erhaltenen Resultate werden angewandt auf die Lösung von 9 Fragen, wie: 1) Auf wie viel Arten kann man m Spiele gewinnen, n verlieren, so dass man zu keiner Zeit mehr

verloren als gewonnen hat. 2) Auf wie viel Arten kann Jemand, der k Pfund besitzt, m Wetten gewinnen und n verlieren, jede von 1 Pfund, ohne ruinirt zu sein? 3) In wie viel Arten können m grade und n ungrade Potenzen von x angeordnet werden, so dass, wenn x gleich -1, die Summe bis zu einer gewissen Zahl niemals negativ wird? Glr. (O.)

W. A. Whitworth. A theorem in combinations. Messenger (2) VIII. 82-83.

Beweis des Satzes, dass die Anzahl der Combinationen der r^{ten} Klasse von n Elementen, wenn jedes Element irgend eine Anzahl von Malen wiederholt werden kann, gleich

$$\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}.$$

Dieser Beweis, wenn auch nicht so kurz, wie der vom Verfasser in seinem Werke „Choice und Chance“ gegebene, ist leichter und beruht nur auf den ersten Principien. Glr. (O.)

Sylvester and S. Tebay. On the mathematical question: What is a tree? Educ. Times XXX. 52, 81-85.

Definition eines Baumes und Sätze über Anzahl der Zweige desselben. M.

A. Cayley. A problem in partitions. Messenger (2) VII. 187-188

Das Theilungsproblem, welches vorgelegt (aber nicht gelöst) wird, hängt zusammen mit dem Problem der 15 Schulkinder, welches es als speciellen Fall enthält. Folgender Satz findet sich in der Note: Zwei nicht commutative Symbole α, β, die so beschaffen sind, dass $\beta\alpha = \alpha^2\beta^2$, können nicht zu einer Gruppe von Symbolen der Form $\alpha^p\beta^q$ verwandt werden. Glr. (O.)

D. Bierens de Haan. Iets over dobbelen. Versl. en Mededeel. XII. 371-400.

Die Arbeit handelt von der Wahrscheinlichkeit des Werfens einer bestimmten Zahl von Augen mit einer gegebenen Zahl von Würfeln. Nachdem der Verfasser zuerst einige besondere Fälle untersucht hat, bestimmt er allgemein das Gesetz, welches angiebt, wie gross die Zahl günstiger Fälle $n(gk)$ ist, wenn mit k Würfeln g Augen geworfen werden sollen.

Es ergiebt sich dafür die Formel:

$$n(gk) = \binom{g-1}{k-1} - \binom{k}{1}\binom{g-y}{k-1} + \binom{kg-13}{2k-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1}\binom{k}{1}\binom{g-6k+5}{k-1}$$

Im Weiteren werden diese Werthe berechnet und in eine Tafel gebracht. Mittels dieser werden die Vortheile und Nachtheile einiger Würfelspiele untersucht. G.

J. Hammond, F. Wertsch. Solutions of a question (5723). Educ. Times XXX. 61-62.

Wirft man eine Münze n Mal in die Höhe, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kopf nicht 2 Mal hinter einander nach oben fällt,

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{4^{n+1}\sqrt{5}}.$$

O.

H. G. Day. Solution of a question (5224). Educ. Times XXIX. 34.

Die Aufgabe ist folgende: Auf jedem von n Pfeilern, deren Höhen in aufsteigender Reihe $C_1, C_2, \dots C_n$, sind, sind nach Zufall Punkte angenommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein auf dem r^{ten} Pfeiler genommener Punkt der höchste ist? Es ergiebt sich für dieselbe der Ausdruck

$$\frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n-1} + \cdots + \frac{P_r}{n-r+1},$$

wo

$$P_r = \frac{(C_r)^{n-r}}{C_{r+1}\,C_{r+2}\dots C_n} - \frac{(C_{r-1})^{n-r+1}}{C_r\,C_{r+1}\dots C_n}$$

gesetzt ist. H.

E. Catalan. Sur le problème des partis. N. C. M. IV. 8-11.

E. Ghysens. Remarque sur cet article. N. C. M. IV. 85.

Die Wahrscheinlichkeit, dass A, der noch a Points zu machen hat, in $a+b-1$ Malen gewinnen wird, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass B b Points gewinnen wird, in einer Anzahl von Würfen, die gleich oder grösser als $a+b$ ist. (Siehe: „Poisson, „Probabilité des jugements, No. 16 u. 73, und P. Mansion, „Sur le problème des partis“. Mém. in 8° de Belg. XXI.) Mn. (O.)

O. Z. Bianco. Sopra un problema di probabilitá. Battaglini G. XVI. 169-173.

Der Verfasser behandelt die Aufgabe: Welches ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, in welcher sich n Kugeln befinden, eine grade oder ungrade Anzahl derselben herauszuziehen, und zeigt, dass die Lösung derselben von Laurent in seinem „traité du calcul des probabilités“ eine irrige ist. Er dehnt sodann seine Betrachtungen auf die, auch von Laplace behandelte Aufgabe aus, bei welcher angenommen wird, dass die Anzahl der Kugeln, welche sich in der Urne befinden, unbekannt ist, dass diese Anzahl jedoch die Zahl p nicht überschreitet, und dass die Anzahl p und jede kleinere Anzahl die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Ls.

A. Stern. Some formulae respecting the game of mousetrap. Quart. J. XV. 230-242.

Ueber das Wesen dieses Spieles ist nach einem Aufsatze von Cayley bereits im vorigen Jahrgang berichtet worden; in Frankreich kennt man ein ähnliches, aber verwickelteres, unter dem Namen „treize“. Verfasser legt dar, dass die mathematische Theorie des Spieles sich mit der Discussion der Functional-

gleichung

$$a_{n,x} = a_{n,x-1} - a_{n-1,x-1}$$

decke, und lehrt aus derselben $a_{n,x}$ durch Ausdrücke von der Form $a_{i,0}$ darstellen. Gr.

Fernere Aufgaben über Combinationen, Wahrscheinlichkeit und mittlere Werthe, mit Lösungen von D. Thomas, Hugh Mc Coll, S. Tebay, W. J. C. Miller, W. S. B. Woolhouse, J. Hammond, F. Wertsch, J. L. Kitchin u. a., finden sich Educ. Times XXIX. 25-26, 66-68; XXX. 58-59, 60, 61, 62, 89-90, 101.

M.

E. Catalan. Remarques sur la théorie des nombres carrés. Mém. de Belg. XLIII.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLV 156-158.

Mehrere Vereinfachungen der Methode von Gauss zur Bildung normaler Gleichungen. Die hauptsächlichste Bemerkung des Verfassers ist folgende: Wenn man aus m linearen Gleichungen zwischen n Unbekannten ($m \lesseqgtr n$) n lineare Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate herleitet, indem man zwischen der ersten dieser Gleichungen und den andern eine der Unbekannten eliminirt, so erhält man immer dasselbe Resultat, wie wenn man diese Unbekannte auf alle möglichen Arten zwischen den m ursprünglichen Gleichungen eliminirt, wenn man von den $\frac{1}{2}m(m-1)$ resultirenden Gleichungen $(n-1)$ lineare Gleichungen zwischen den andern Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate bildet. Mn. (O.)

J. Jevnewitsch. Ueber den Ersatz des Ausdruckes $\sqrt{X^2+Y^2}$ durch einen Ausdruck von der Form $\alpha X+\beta Y$. Nachr. des St Petersb. Techn. Inst. 1878. (Russisch.)

Die Coefficienten α und β werden nach der Methode der

kleinsten Quadrate bestimmt und diese Bestimmung mit der bekannten Poncelet'schen verglichen. (Siehe Poncelet, Cours de Mécanique, appliquée aux machines p. 409). P.

T. N. Thiele. Bemärkninger om skjäve Fejlkurver.
Zeuthen Tidskr. (4) II. 54-57.

Wenn eine Reihe Beobachtungen zur Bestimmung einer unbekannten Grösse sich nach einem nichtsymmetrischen Fehlergesetze vertheilt, so entsteht die Frage, wie man dann den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten bestimmt. In vielen Fällen wird der Mangel an Symmetrie davon herrühren, dass man recht eigentlich nicht die Unbekannten selbst, sondern eine Function derselben beobachtet. Ist das Fehlergesetz für die Grösse x das exponentiale, so wird das, welches einer Function y von x entspricht, von der Form

$$\varphi y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{dx}{dy}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Liegt also eine unsymmetrische Fehlerfunction vor, so kann man diese als entsprechend einer Function y von x auffassen und dadurch das gegebene Fehlergesetz auf eine symmetrische Function zurückführen. Bei der Annahme $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ lässt sich dies leicht ausführen mit Benutzung der Summen Σy^0, Σy^1, Σy^2, Σy^3, wo die y die verschiedenen Resultate der Beobachtungen bezeichnen. Gm.

E. L. de Forest. On the grouping of signs of residuals. Analyst V. 1-6.

Wenn eine Reihe von äquidistanten Gliedern, mit Beobachtungsfehlern behaftet, ausgeglichen wird mit Hülfe von solchen Formeln, wie

$$u_0' = l_0 u_0 + l_1(u_1 + u_{-1}) + l_2(u_2 + u_{-2}) + \cdots + l_m(u_m + u_{-m}),$$

so kann die Ausdehnung, bis zu der das Ausgleichungsverfahren getrieben werden kann, oft bestimmt werden durch Beobachtung

der zufälligen Vertheilung der Zeichen der Reste, die aus der Subtraction jedes ausgeglichenen Gliedes von dem entsprechenden beobachteten Gliede entstehen. Diese Methode der Prüfung einer Ausgleichung setzt voraus, dass die Fehler aufeinander folgender Glieder ganz unabhängig von einander sind, so dass die Thatsache, dass ein specielles beobachtetes Glied nicht mit dem normalen Werthe übereinstimmt, keinen Grund zu der Annahme giebt, dass das nächste Glied sich ebenso verhalten wird, und umgekehrt. Die Methode kann z. B. nicht angewandt werden in einem Fall, wie die Bestimmung der normalen Curve der jährlichen Temperatur aus einer Reihe von Tagesmitteln bei nur einem Jahr, aber sie kann bei manchen Arten physikalischer und statistischer Reihen Anwendung finden, so z. B. bei Herstellung einer Sterblichkeitstafel. In einer früheren Arbeit hat der Verfasser die wahrscheinliche Vertheilung der Zeichen bestimmt unter der Annahme, dass die ausgeglichene Reihe die allein richtige sei. Die Zeichenvertheilung im Allgemeinen hängt manchmal ab von dem Verhältniss zwischen den wahrscheinlichen Fehlern ε' und ε der ausgeglichenen und der beobachteten Glieder. In der vorliegenden Arbeit will nun der Verfasser als wahrscheinlich feststellen, was aus der wahrscheinlichen Vertheilung der Zeichen für einen gegebenen Werth von $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ wird, der

$$= \sqrt{\{l_0^2 + 2(l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_m^2)\}}.$$

Am Schlusse der Arbeit finden sich einige allgemeine Bemerkungen über die Verfahrungsarten zu einer guten Ausgleichung.

Glr. (O.)

E. L. de Forest. On repeated adjustment, and on signs of residuals. Analyst V. 65-72.

Der Verfasser betrachtet die Wirkung der Ausgleichung der Glieder einer Reihe durch eine Formel, wie

$$u_0' = l_0 u_0 + l_1(u_1 + u_{-1}) + l_2(u_2 + u_{-2}) + l_3(u_3 + u_{-3})$$

und der weiteren Ausgleichung der Glieder der so ausgeglichenen Reihe durch eine andere Formel, wie:

$$u'_0 = L_0 u_0 + L_1(u_1 + u_{-1}) + L_2(u_2 + u_{-2}),$$

und bemerkt, dass das Resultat dasselbe ist, wie wenn eine gewisse einzelne Ausgleichungsformel benutzt wäre, sowie dass das Resultat unabhängig ist von der Reihenfolge, in der die beiden ersten Formeln angewandt werden. Er betrachtet sodann die Wirkung einer mehrmaligen Anwendung derselben Formel und giebt eine Tafel für die Coefficienten einer einzelnen Formel, die äquivalent ist einer 2-, 3-, ... 6-, 8-, 12-, 16- und 32fachen Anwendung der Formel

$$u'_0 = \tfrac{1}{35}\{17u_0 + 12(u_1 + u_{-1}) - 3(u_2 + u_{-2})\},$$

sowie für die Verhältnisse der Fehler und Unregelmässigkeiten in der ursprünglichen und in der ausgeglichenen Reihe. Die Coefficienten in der letzten Colonne dieser Tafel sind die einer Ausgleichungsformel, die so beschaffen ist, dass, wenn eine gegebene Reihe auf einmal ausgeglichen ist, das Resultat dasselbe ist, wie wenn die Ausgleichung durch die obige Formel 32 Mal wiederholt wäre. Die 32fache Formel würde, wenn genau, 129 Glieder enthalten mit 65 verschiedenen Coefficienten, aber schon 12 Coefficienten reichen aus für die dritte Decimalstelle (soviel Stellen enthält die Tafel) und für die vierte Stelle wären nur 4 weitere nöthig. Der Verfasser giebt ähnlich, aber in kürzerer Weise, Tafeln, welche sich auf die Wiederholung der Formeln

$$u'_0 = \tfrac{1}{231}\{111u_0 + 56(u_1 + u_{-1}) - 14(u_2 + u_{-2})\},$$

$$u'_0 = \tfrac{1}{10}\{4(u_0 + u_1 + u_{-1}) - (u_2 + u_{-2})\}$$

beziehen, und er findet, dass eine Formel, welche, wenn die vorausgesetzten Bedingungen erfüllt sind, eine genauere Ausgleichung als eine andere Formel giebt, nicht nothwendig grade die ist, welche die grösste Genauigkeit giebt, wenn die Ausgleichung mehrere Male oder wenn sie nur einmal wiederholt wird.

Es finden sich auch Bemerkungen über die Zeichen der Residuen als Fortsetzung der obigen Arbeit. Glr. (O.)

E. L. de Forest. On the limits of repeated adjustment. Analyst V. 129-140.

Durch die Untersuchungen der obigen Arbeit ist der Ver-

fasser dazu geführt, die Curve zu untersuchen, die aus unendlich oft wiederholter Anwendung einer Ausgleichungsformel entsteht. In dem Fall, wo die Ausgleichungsformel das arithmetische Mittel von $2m+1$ Gliedern der ursprünglichen Reihe ist, findet er die Curve als die Fehler-Curve

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

Im Allgemeinen genügt die Curve der Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = axy,$$

wo n eine ungrade Zahl ist und die Werthe 1, 3, 5, ... hat, je nachdem die ursprüngliche Ausgleichungsformel genau ist für den Fall von Reihen der ersten, dritten, fünften ... Ordnung. Die Fälle $n=3$ und $n=5$ werden speciell besprochen.

Glr. (O.)

W. Lazarus. Die Bestimmung und Ausgleichung der aus Beobachtungen abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten. Hamb. math. Ges. 1878. 7-27.

In der Einleitung dieses interessanten Aufsatzes wird zunächst betont, dass es unzulässig sei, die Unregelmässigkeiten statistischer Ergebnisse ohne weiteres als Beobachtungsfehler anzusehen und demgemäss nach den für letztere geltenden Methoden auszugleichen. Sodann wird nach Vorausschickung der erforderlichen Hülfssätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine strenge Behandlung der folgenden Aufgabe entwickelt: Gegeben sind die beobachteten Häufigkeiten des Eintretens gewisser Ereignisse; die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten des Eintretens sind von einander in der Weise abhängig, dass sie sich als eine bekannte oder hypothetisch gegebene Function einer Variabeln darstellen lassen, die correspondirenden Werthe dieser Variabeln sind ebenfalls gegeben: gesucht werden diejenigen Werthe der in der Function auftretenden Parameter, für welche die Beobachtungen am besten dargestellt werden. Die sich ergebenden Bedingungsgleichungen sind im Allgemeinen der Art, dass sie eine directe

Auflösung nicht zulassen; ihre Auflösung mittelst successiver Annäherung wird durch Zurückführung auf das Schema der Methode der kleinsten Quadrate erledigt. Zugleich ergiebt sich dabei ein Kriterium zur Beurtheilung der Brauchbarkeit jener zu Grunde gelegten Function für die Darstellung der Wahrscheinlichkeiten. Die Bedeutung der behandelten Aufgabe wird durch das Beispiel der Sterblichkeitstafeln erläutert, und am Schlusse eine Kritik mehrerer der bisher zur Ausgleichung benutzten Methoden gegeben. B.

BARTL. Beitrag zum Interpolationsproblem. Grunert Arch. LXII. 202-211.

Der Verfasser zeigt an einem der Ingenieurwissenschaft entlehnten Beispiele, dass die Lagrange'sche Interpolationsformel, wenigstens in der Gestalt, wie sie gewöhnlich angewandt wird, zuweilen zu einer Lösung führt, welche unbrauchbar ist, weil sie anderweitigen, von der zu interpolirenden Curve zu erfüllenden Bedingungen widerspricht. Das Verfahren des Verfassers besteht nun darin, dass er den gesuchten Curvenzug aus Kegelschnittsegmenten zusammensetzt, bei deren Auswahl die anderweitigen Bedingungen der Aufgabe mit berücksichtigt werden.

B.

TH. V. OPPOLZER. Methoden zur Bestimmung der Bahnelemente gleicher Wahrscheinlichkeit bei den kleinen Planeten. Berl. Monatsber. 1878. 583-602.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

CHARLES S. PEIRCE. Esposizione del metodo dei minimi quadrati. Per Annibale Ferrero. Am. J. I. 59-64.

Referat über das im Titel genannte Ferrero'sche Werk.

B.

E. Czuber. Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen. Grunert Arch. LXII. 267-285.

Ausgehend von der Forderung: Die moralische Bedeutung einer Summe muss sich kleiner ergeben, wenn sie Gewinn, als wenn sie Verlust bedeutet, und sie muss um so kleiner ausfallen, je höher der Betrag des physischen Vermögens der Person ist, macht der Verfasser die Annahme, dass man die moralische Bedeutung einer Vermögensänderung proportional setzen kann dem Verhältniss ihres absoluten Betrages zu dem durch sie geänderten ursprünglichen Vermögen. Diese Annahme wird verglichen mit der bekannten Bernoulli'schen Annahme, der sich auch Laplace angeschlossen hat, und es wird an einer grösseren Zahl von Anwendungen gezeigt, dass die beiden Annahmen, zwar in den numerischen Ergebnissen von einander abweichend, doch hinsichtlich aller allgemeinen Resultate, welche aus dem Begriffe der moralischen Bedeutung einer Geldsumme und der moralischen Hoffnung abgeleitet werden können, vollkommen mit einander übereinstimmen, so dass diese allgemeinen Resultate auch aus der hier gemachten Annahme, für welche der Verfasser den Vorzug des einfacheren Rechnungsmechanismus in Anspruch nimmt, zu entwickeln sind. Diese allgemeinen Resultate hält der Verfasser, und wohl nicht mit Unrecht, für die Hauptsache, auch weist er darauf hin, dass seine Annahme bei der plötzlichen Vermögensänderung die Verhältnisse strenger beurtheilt, den Gewinn weniger wichtig, dagegen den Verlust bedeutender erscheinen lässt, als Bernoulli's Hypothese, welche sich auf die continuirlichen Vermögensänderungen gründet. Ls.

E. Dormoy. Théorie mathématique des assurances sur la vie. 2 Bände. Paris.

Das vorliegende Werk bildet einen besonderen Abdruck der in den vorhergehenden Jahrgängen des Journal des actuaires français veröffentlichten Arbeit des Herrn Emil Dormoy. Dasselbe enthält eine ziemlich vollständige Sammlung derjenigen

Formeln, die der Lebensversicherungstechniker anzuwenden hat, und eine Reihe nützlicher Tafeln. Zu bedauern ist es, dass der Verfasser, der in den einleitenden Capiteln zeigt, dass ihm die höheren Rechnungsarten vollständig geläufig sind, später, wenn er die eigentliche Lebensversicherungstechnik behandelt, von denselben keinen weiteren Gebrauch macht. Dadurch wird er verhindert, die Sätze, welche er vorträgt, von einem allgemeineren Gesichtspunkt zu betrachten. Die elementare Entwickelung der Formeln zwingt ihn von Voraussetzungen auszugehen, welche nur annähernd richtig sind, während eine theoretisch-mathematische Betrachtung ihn auf allgemeinere und strengere Formeln geführt haben würde. Eine näherungsweise Auswerthung dieser Formeln würde dann die einfachen, auch elementar abzuleitenden Formeln ergeben haben, jedoch nicht ohne die jetzt fehlenden Correctionen, welche durch die strengere Grundlage bedingt sind. Wenn die beiden ersten Capitel gewissermassen als eine Art von Einleitung einige der Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung erläutern sollen, so dürfte doch die Zweckmässigkeit dieser freilich sehr häufig vorkommenden Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr zu bezweifeln sein. Die Theorie der Lebensversicherungstechnik muss die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und zwar im ganzen Umfange, als bekannt voraussetzen; man kann die letztere nicht auf wenigen Seiten behandeln, und es muss daher wenig rathsam erscheinen, derselben einige kurze Sätze zu widmen. Kann und will man sich nicht auf eine eingehende Darstellung auch der Theorie der Wahrscheinlichkeit einlassen, so sollte man davon ausgehen, dass derjenige, der ein wissenschaftliches Lehrbuch der Lebensversicherungstechnik benutzen will, sich mit der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits vertraut gemacht hat und sich damit begnügen, die specielleren Anwendungen derselben auf die Lebensversicherungstechnik zu zeigen. Dies geschieht in einer bestimmten Richtung im dritten Capitel, in welchem der Verfasser die Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Fall des Eintretens der Ereignisse bei einer grösseren Reihe von Versuchen ableitet. Die Capitel IV. bis VII. beschäftigen sich mit den Sterblichkeitstafeln, der Art und Weise

ihrer Herstellung, mit der Ausgleichungsmethode von Woolhouse und den Sterblichkeitsformeln von Gompertz, Edmonds und Makeham. Im Capitel VIII. zeigt der Verfasser, dass die Formeln, welche man für die Berechnung amortisirbarer Obligationen benutzt, gewisse Aehnlichkeiten haben mit denjenigen, die in der Populationistik vorkommen.

Mit dem Capitel IX., Berechnung der Prämien, kommt der Verfasser zur eigentlichen Lebensversicherungstechnik. Er theilt diesen sehr umfangreichen Abschnitt in vier Theile, I. Theorie der Leibrenten, II. Berechnung der einmaligen Prämien für die hauptsächlichsten Arten der Lebensversicherung, III. Umwandlung der einmaligen in jährlich zahlbare Prämien, IV. Berechnung der Prämien für verschiedene Lebensversicherungen.

Der zweite Band behandelt in dem Capitel X. die Berechnung der Reserven, Capitel XI. die Rückkäufe, Capitel XII. das Rechnungswesen der Lebensversicherungsanstalten, Capitel XIII. die Gewinnbetheiligung der Versicherten, und es folgen dann Seite 139 bis 327 Mortalitäts-, Commutations-, Renten-, Tarif- und Reservetafeln.

Sollen wir unser Urtheil über das Buch zusammenfassen, so würden wir dasselbe als eine gute und fleissige Arbeit bezeichnen; dasselbe enthält viel Material und eignet sich daher gut zum Nachschlagen. Als Lehrbuch würden wir es weniger empfehlen, weil es zu sehr in die Breite geht, anstatt aus wenigen Sätzen das ganze Gebäude der Formeln übersichtlich zu entwickeln. Die Bezeichnungsweise ist zu loben. Ls.

J. Dienger. Zur Berechnung des Deckungskapitals bei der Lebensversicherung. Rundsch. d. Vers. XXVIII. 74. 131.

Es werden Formeln abgeleitet für das Deckungskapital (die Reserve) von Lebensversicherungen auf den Todesfall unter der Voraussetzung, dass die Zahlung der versicherten Summe erfolgen soll 1) sofort nach erfolgtem Tode, 2) am Ende des Versicherungsjahres, in welchem der Tod erfolgte. Auch werden Zahlenbeispiele gegeben. Ls.

J. DIENGER. Berechnung des Deckungskapitals bei der Lebensversicherung. Oesterr. Vers. Ztg. 1878 No. 17 u. 18.

Der Verfasser geht von der Annahme aus, dass das Absterben nicht stetig erfolge, sondern nur gleichmässig im Laufe eines Jahres. Sterben im Laufe eines Jahres n Personen, so wird das Jahr in n gleiche Theile getheilt und angenommen, dass je eine Person in der Mitte eines solchen Zeitintervalls sterbe. Die Anwendung der Differentialrechnung bleibt selbstverständlich bei der Ableitung der Formeln ausgeschlossen. Ls.

J. DIENGER. Zur Zillmer'schen Methode bei der Lebensversicherung. Rundsch d. Vers. XXVIII. 255.

Die Zillmer'sche Methode der Reserveberechnung bei Lebensversicherungs-Anstalten wird einer Kritik unterzogen. Ls.

J. DIENGER. Aenderung des Zinsfusses bei der Lebensversicherung. Rundsch. d. Vers. XXVIII. 455.

Es wird gezeigt, dass durch die Annahme eines höheren Zinsfusses bei der Berechnung der Reserven einer Lebensversicherungs-Gesellschaft die Reserve herabgedrückt wird, und dass auch die Nettoprämien mit dem wachsenden Zinsfuss kleiner werden.

Ls.

T. B. SPRAGUE. How does an increased mortality affect policy values. Journ. of Act. XXI. II.

Der Verfasser erinnert daran, dass es eine sehr verbreitete Ansicht sei, dass die Reserve, welche eine Lebensversicherungs-Anstalt zur Deckung ihrer im Laufe befindlichen Versicherungen bestellen muss, um so höher ausfallen werde, je grösser die Sterblichkeit der Mortalitätstafel ist, deren sie sich bei der Berechnung ihrer Reserven bedient. Dies sei aber ein Irrthum, und es sei auch schon von verschiedenen Autoren auf denselben hingewiesen worden. Es fehle aber an einer eingehenden Unter-

suchung über die Bedingungen, unter welchen die Zunahme der angenommenen Sterblichkeit eine Zunahme der Reserve nach sich ziehe.

Der Reservewerth Res einer Todesfallversicherung, welche seit n Jahren bestanden hat, stellt sich auf $1 - \frac{R(x+n)}{R(x)}$, wo $R(x)$ der Werth der vorschussweisen Leibrente für das Alter x ist. Ist nun $Res' = 1 - \frac{R'(x+n)}{R'(x)}$ der Reservewerth nach einer andern Sterblichkeitstafel, so ist

$$Res' \gtreqless Res, \quad \text{je nachdem} \quad \frac{R'(x)}{R(x)} \gtreqless \frac{R'(x+n)}{R(x+n)}.$$

Diese Formeln werden nach verschiedenen Richtungen untersucht und an Beispielen erläutert. Insbesondere geht der Verfasser näher auf den Fall $n = 1$ ein. Zwei verschiedene Mortalitätstafeln geben gleiche Reservewerthe, wenn

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{R'(x+1)}{R(x+1)}.$$

Setzt man diesen Werth $= c$, und bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, ein Jahr zu leben, für das Alter x in den beiden Mortalitätstafeln mit

$$\frac{L(x+1)}{L(x)} \quad \text{und} \quad \frac{L'(x+1)}{L'(x)},$$

den Discontirungsfactor mit ϱ und ϱ', so folgt, da

$$R'(x) = 1 + \varrho' \frac{L'(x+1)}{L'(x)} R'(x+1),$$

$$R(x) = 1 + \varrho \frac{L(x+1)}{L(x)} R(x+1),$$

also

$$\frac{1}{R'(x+1)} + \varrho' \frac{L'(x+1)}{L'(x)} = \frac{1}{R(x+1)} + \varrho \frac{L(x+1)}{L(x)},$$

$$\varrho' \frac{L'(x+1)}{L'(x)} - \varrho \frac{L(x+1)}{L(x)}$$

$$= \frac{1}{R(x+1)} - \frac{1}{R'(x+1)} = \left(1 - \frac{1}{c}\right) \frac{1}{R(x+1)}.$$

Schliesslich wird an Beispielen gezeigt, wie man zu jeder gegebenen Mortalitätstafel hypothetisch andere Mortalitätstafeln construiren kann, welche, eine grössere Sterblichkeit zeigend, geringere Reservewerthe ergeben und umgekehrt. Der Verfasser zieht aus seiner Untersuchung die wohlberechtigte Schlussfolgerung, dass keineswegs die absolute Höhe der Sterblichkeitsverhältnisse über die Grösse der Reservewerthe in erster Reihe entscheidet, sondern, dass diese vielmehr abhängen von dem Grade der mit dem Alter zunehmenden Sterblichkeit; je rascher und plötzlicher diese Zunahme, um so grösser müssen die Reservewerthe sein.

Ls.

J. Dienger. Kapitalversicherung auf den Erlebungsfall, mit Rückgewähr der Nettoprämien bei erfolgendem Tode. Oesterr. Vers. Ztg. 1878. No. 49.

Der Verfasser leitet die Formeln ab für die Berechnung der einmaligen und jährlichen Prämie, sowie des Deckungskapitals.

Ls.

A. Pánek. Ueber die mathematische und moralische Hoffnung. Casopis VII. 78-91. (Böhmisch).

Enthält den zweiten Theil dieser gelungenen Publikation, welcher dem ersten, über welchen im Jahrbuch IX. pag. 150 referirt wurde, an Gediegenheit gleichkommt. Dabei werde bemerkt, dass die ganze verdienstliche Arbeit auch in Separatabdrücken erschienen ist.

Std.

Théorie des opérations financières et viagères. J. d. act. fr. VII. 31-107, 109-180.

W. J. C. Miller. Notes on random chords. Educ. Times XXIX. 17-20, 40, 62-63.

Bemerkungen zu der Lösung der Question 5461 (siehe F. d. M. IX. 164) von Col. Clarke, Prof. Crofton, Miss Blackwood und

W. S. B. Woolhouse. Letzterer beantwortet die Frage dahin: „Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei in einem Kreise willkürlich gezogene Sehnen sich schneiden, ist $= \frac{1}{3}$; aber die Wahrscheinlichkeit, dass zwei willkürlich gezogene Linien sich in einem Kreise schneiden, ist $= \frac{1}{2}$". Miss Blackwood und Miss Helen Thomson lassen sich in Versen über den Begriff „random chord" aus. M.

H. S. Monck, W. S. B. Woolhouse, E. Blackwood, Art. Martin. Solution of the question 5502. Educ. Times XXIX. 58-62, 106; XXX. 46-48, 60, 63-64.

Es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei in einem Kreise sich schneidende oder nicht schneidende Sehnen von einer dritten Sehne geschnitten werden. M.

L. Lalanne. De l'emploi de la géométrie pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. C. R. LXXXVII. 355-358.

M.

R. Hoppe. Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe. Grunert Arch. LXI. 410-417.

Die Aufgabe lautet: Auf einer begrenzten Linie liegen n Punkte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stück der Linie von gegebener Länge frei von Punkten ist. Dieselbe wird hier nach drei verschiedenen Methoden, für welche die betreffenden Hülfssätze der Behandlung der Aufgabe vorangestellt werden, gelöst. Es wird vorausgesetzt, dass das leere Intervall nicht kleiner als die Hälfte der ganzen Linie sei. Die Länge derselben wird $= 1$, die leere Strecke $= 1 - x$ gesetzt, und der Verfasser findet die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach jeder der drei Methoden $= (n+1)x^n$.

Auch wird darauf mit Recht hingewiesen, dass die Aufgabe Anwendungen in sehr mannigfaltiger Form zulasse. Ls.

E. B. Seitz. Solution of a question (5466). Educ. Times XXIX. 35-37.

Zwei Punkte werden willkürlich 1) auf den Bogen oder 2) in den Flächen der beiden Halbkreise eines ganzen Kreises gewählt. Es wird in beiden Fällen gesucht, α) die mittlere Entfernung zwischen den beiden Punkten, β) die Wahrscheinlichkeit, dass diese kleiner ist als der Radius des Kreises. Es ergiebt sich durch Auswerthung der Integrale:

$$1{:}\ \alpha) = \frac{1}{\pi^2 r^2}\int_0^\pi\int_0^\pi 2r\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\varphi)\, r d\theta d\varphi = \frac{16r}{\pi^2};$$

$$\beta) = \frac{2}{\pi^2 r^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tfrac{1}{3}\pi-\theta) r^2 d\theta = \tfrac{1}{9};$$

$$2{:}\alpha) = \frac{4}{\pi^2 r^4}\int_0^\pi\int_{-r}^r\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} (y+z)^2 \sin\theta d\theta\, dx\, dy\, dz = \frac{1472r}{135\pi^2};$$

$$\beta) = \frac{16}{\pi^2 r^4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\theta}\int_0^{y_1}\int_0^{r_1} r(y+z) d\theta \cos\varphi d\varphi\, dy\, dz$$

$$= \tfrac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

O.

E. B. Seitz. Solution of a problem (198). Analyst V. 89.

Die mittlere Entfernung zwischen zwei Punkten, die willkürlich in der Fläche eines Rechtecks mit den Seiten a und b angenommen sind, ist

$$\frac{1}{15}\left\{\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}+c\left(3-\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{5a^2}{2b}\log\frac{b+c}{a}+\frac{5b^2}{2a}\log\frac{a+c}{b}\right\}.$$

Glr. (O.)

E. B. Seitz, A. Martin. Solutions of a question (5548). Educ. Times XXIX. 97-98.

Bezeichnet man mit p, q, r die Entfernungen dreier willkürlich in einem Kreise angenommenen Punkte P, Q, R vom Mittel-

punkte desselben, so ist die Wahrscheinlichkeit reeller Wurzeln für die Gleichung $px^2 - qx + r = 0$ gleich

$$\frac{5}{144} + \tfrac{1}{12}\log 2.$$

O.

E. B. Seitz. Solution of a question (5496). Educ. Times XXIX. 54.

Der mittlere Werth des reciproken Werthes der Entfernung zweier beliebiger Punkte in einem Kreise mit dem Radius r ist gleich $\frac{16}{3\pi r}$.

O.

E. B. Seitz. Solution of a question (5263). Educ. Times XXIX. 84.

In der Fläche eines Kreises mit dem Radius $2r$ sind zwei gleiche Kreise mit dem Radius r gezogen. Der Mittelwerth des beiden gemeinsamen Theiles derselben ist gleich

$$\left(1 - \frac{16}{3\pi^2}\right)\cdot r^2.$$

O.

E. B. Elliott. Solution of a question (5478). Educ. Times XXIX. 54-55.

Drei gerade Linien werden willkürlich mitten durch ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Flächeninhalt Δ gezogen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede dieser Linien ein anderes Seitenpaar schneidet, gleich $\frac{16\Delta^2}{(a+b+c)^4}$.

O.

E. B. Seitz and H. Heaton. Solution of a problem (207). Analyst V. 123.

Wenn M, N, P, Q 4 willkürlich in der Fläche eines Kreises angenommene Punkte sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass E,

der Schnitt der Geraden durch M, N und P, Q zwischen MN und PQ liegt, gleich $\frac{1}{8} - \frac{35}{36\pi^2}$.

Glr. (O.)

H. J. L. Ludwick. Solution of a problem (192).
Analyst V. 60.

Der Mittelwerth der Flächen aller Kreise, die einem Halbkreis von Radius a eingeschrieben sind, ist

$$\frac{\pi a^2}{96}\left(\frac{39\log(1+\sqrt{2})-5\sqrt{2}}{\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}}\right).$$

Glr. (O.)

W. W. Johnson, J. E. Hendricks. Solutions of a problem (226.) Analyst V. 158-159.

Durch einen gegebenen Punkt in der Fläche eines Kreises wird willkürlich eine Sehne gezogen. Zieht man nun eine andere Sehne rechtwinklig dazu, welches ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Sehnen einander schneiden.

Glr. (O.)

Lösungen weiterer Aufgaben über Gegenstände der geometrischen Wahrscheinlichkeit von A. Martin, E. Blackwood, G. S. Carr, Monck, E. B. Seitz, A. R. Clarke finden sich Educ. Times XXIX. 39, 45, 85, 106, 111; XXX. 20, 27, 32, 50, 95, 99.

O.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

M. Labronico. Teoria delle serie esposta secondo i metodi più recenti. Napoli. Voglio.

A. Minime. Ueber numerische Reihen. (Russisch.) Mosk. Math. Samml. IX.

P.

K. Zahradnik. Ueber den Zusammenhang der Kriterien der Convergenz unendlicher Reihen. Casopis VII. 91-102. (Böhmisch.)

Ausgehend von Cauchy's Kriterien stellt der Verfasser die fundamentale Bedingung

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}<\left(\frac{n}{1+n}\right)^r,\quad r>1,$$

fest und leitet aus derselben die Kriterien von Raabe, Gauss, Schlömilch, Stern und Olivier ab. Std.

A. Harnack. Ueber eine Eigenschaft der Coefficienten der Taylor'schen Reihe. Clebsch Ann. XIII. 555-559.

Anlässlich eines Aufsatzes des Herrn Toepler über die periodischen Reihen (Wien. Anz. 1876 p. 205 und Königsberger Rep.

I. p. 402, siehe F. d. M. VIII. 133) stellt sich der Verfasser die Aufgabe, eine Function $f(z)$, welche innerhalb eines mit dem Radius R um den Punkt a beschriebenen Kreises eindeutig und stetig ist, mit grösstmöglicher Annäherung durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe von $n+1$ Gliedern darzustellen, derart, dass die Summe der Quadrate der absoluten Beträge von

$$f(z)-\sum_{k=0}^{k=n}\alpha_k(z-a)^k$$

für alle Werthe von z, welche sich auf einem Kreise mit einem Radius $r<R$ befinden, ein Minimum werde. Setzt man

$$z-a=re^{\varphi i},\ f(z)=u+iv,\ \text{und}\ \alpha_k=a_k+ib_k,$$

so soll hiernach

$$\int_0^{2\pi}\left\{u+iv-\sum_{k=0}^{k=n}(a_k+ib_k)\,r^k e^{k\varphi i}\right\}\left\{u-iv-\sum_{k=0}^{k=n}(a_k-ib_k)\,r^k e^{-k\varphi i}\right\}\cdot d\varphi$$

für jedes r ein Minimum werden. Man findet für den Werth von α_l, unabhängig von n und dem Modul r, den Coefficienten der Taylor'schen Entwickelung

$$\alpha_l=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-a)^{l+1}}\,dz.$$

Das allgemeinere Problem $f(z)$ mit möglichst grosser Annäherung durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $\psi(z)$ fortschreitende Reihe von $n+1$ Gliedern darzustellen, ergiebt für den Coefficienten von $\psi(z)^l$, ebenfalls den von n unabhängigen Werth

$$\alpha_l=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{\psi(z)^{l+1}}\,\psi'(z)\,dz,$$

und führt zu der Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe.

Hr.

P. Mansion. Elementary demonstration of Taylor's theorem to functions of an imaginary variable.
Messenger (2) VIII. 17-20.

Elementarer Beweis des Taylor'schen Satzes für den Fall einer complexen Variablen von der Form $x+iy$. Es ergeben sich zwei Formen für den Rest, von denen die eine von Darboux

und die andere von Falk herrührt. Eine besondere Herleitung wird für die letztere gegeben. Es wird ferner gezeigt, dass die vollständige Theorie der elementaren Functionen, (Functionen, die sich durch Wurzeln, einfach periodische transcendente Functionen und ihre Inversen ausdrücken lassen) auch, wenn die Variable reell oder imaginair ist, herleiten lässt aus dem geometrischen Lemma: „Wenn eine ebene Curve AJB zwischen den Punkten A und B continuirlich ist, und deren Tangenten sich continuirlich zwischen diesen beiden Punkten verändern, von der Secante AB geschnitten wird, so giebt es einen Punkt J zwischen A und B, in dem die Tangente AB parallel ist."

Glr. (O.)

O. Callandreau. Sur la formule sommatoire de Maclaurin. C. R. LXXXVI. 589-592.

Es wird gezeigt, wie man die Maclaurin'sche Formel aus der Formel für die theilweise Integration herleiten kann, indem man in der Gleichung

$$\int UV^{(2n)}dz = UV^{(2n-1)} - U'V^{(2n-2)} + \cdots + \int VU^{(2n)}dz,$$

$$U = f'(x+h-z), \quad V = \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \frac{H_1 hz^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots + \frac{H_{2n-1}h^{2n-1}z}{1},$$

setzt, wo die H_i mit den Bernoulli'schen Zahlen in einfacher Weise zusammenhängen, und die Integration von 0 bis h erstreckt; die hierzu erforderlichen Eigenschaften der Bernoulli'schen Zahlen und der Function V werden in einfacher Weise abgeleitet.

T.

A. Genocchi. Sur la formule sommatoire de Maclaurin et les fonctions interpolaires. C. R. LXXXVI. 466-469.

Der Verfasser reproducirt folgende Ableitung der Maclaurin'schen Formel und des Malmsten'schen Theorems, die er schon im Jahre 1855 (Ann. di Tortolini) gegeben hat. Nach dem Taylor'schen Satze ist

$$f(x+\alpha h) = f(x)+\frac{\alpha h}{1}f'(x)+\frac{\alpha^2h^2}{1.2}f''(x)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\alpha^n h^n}{n!}f^n(x)+\int_0^{\alpha h}\frac{(\alpha h-z)^n}{n!}f^{n+1}(x+z)\,dz;$$

summirt man auf beiden Seiten über α, so findet man, da für $f(x)=F(x+h)-F(x)$ sich $\sum\limits_\alpha f(x+\alpha h)$ von $F(x+\alpha h)$ nur um einen von α unabhängigen Theil unterscheidet,

$$hF(x) = f(x)+B_0\frac{h}{1}f'(x)+B_1\frac{h^2}{1.2}f''(x)+B_3\frac{h^4}{4!}f^{IV}(x)+\cdots$$
$$\cdots+B_{n-1}\frac{h^n}{n!}f^n(x)+R_n,$$

wo R_n der Coefficient von α in

$$\sum_\alpha\int_0^{\alpha h}\frac{(\alpha h-z)^n}{n!}f^{n+1}(x+z)\,dz$$

ist. Hieraus geht die Maclaurin'sche Formel hervor, wenn man $f(x)$ durch $\int f(x)dx$ ersetzt. Nimmt man auf beiden Seiten der letzten Gleichung die Differenz bezüglich x ($\Delta x = h$), so erhält man die von Malmsten benutzte Form; die beiden letzten Terme der rechten Seite liefern einen Ausdruck, den man als den Coefficienten von α in

$$-\int_0^h\left[\sum_\alpha\frac{(\alpha h+h-z)^n-\alpha^n h^n}{n!}\right]f^{n+1}(x+z)\,dz$$

erkennt, so dass die Malmsten'sche Function $\varphi(z)$ sich als Coefficient von α in

$$\sum_\alpha\frac{(\alpha h+z)^n-\alpha^n h^n}{n!}\text{ für } n=2m$$

ergiebt. Es wird gezeigt, wie man hieraus in einfacher Weise die von Herrn Malmsten angegebenen Eigenschaften von $\varphi(z)$ herleiten kann.

Ferner bemerkt Herr Genocchi, veranlasst durch den Aufsatz von Herrn Hermite: Sur la formule d'interpolation de Lagrange (Borchardt J. LXXXIV. p. 70 ff. cf. F. d. M. IX. p. 312 ff.), dass er, nachdem er schon in Grunert Arch. t. IL. 3. H. zu der Formel gelangt war:

$$\Delta^n f(x) = hh_1 \dots h_{n-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 f^n(x + th + t_1 h_1 + \cdots$$
$$\cdots + t_{n-1} h_{n-1}) dt\, dt_1 \dots dt_{n-1},$$

($h, h_1, \dots, h_{n-1}$ die successiven Zunahmen von x) weiter zu folgender Darstellung der Ampère-Cauchy'schen interpolatorischen Functionen durch vielfache Integrale gelangt ist:

$$f(a,b) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \int_0^1 f'[a+(b-a)t]\,dt,$$

$$f(a,b,c) = \frac{f(a,b)-f(a,c)}{b-c} = \int_0^1 \int_0^1 t f''[a+(b-a)t+(c-b)tu]\,dt\,du$$

. . . .

$$f(a_1 \dots a_n) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 t_1^{n-2} t_2^{n-3} \dots t_{n-2} f^{n-1}(a_1 + h_1 t_1 + h_2 t_1 t_2 + \cdots$$
$$\cdots + h_{n-1} t_1 t_2 \dots t_{n-1}) . dt_1 \dots dt_{n-1}$$
$$(h_\alpha = a_{\alpha-1} - a_\alpha).$$

Diese vielfachen Integrale sind denen ganz ähnlich, welche Herr Hermite betrachtet hat. T.

J. C. Glashan. An extension of Taylor's theorem. Am. J. I. 287-288.

Der Verfasser leitet die Formel ab

$$f(x+a+b+c+e+\cdots) = f(x+b+c+e+\cdots)$$
$$+\int_0^a da\, f'(x+c+e+\cdots) + \int_0^a da \int_0^{a+b} d(a+b) f''(x+e+\cdots)$$
$$+\int_0^a da \int_0^{a+b} d(a+b) \int_0^{a+b+c} d(a+b+c) f'''(x+\cdots) + \cdots,$$

welche er auch auf die Form bringt:

$$f(x) = f(x-a) + C_1 f'(x-a-b) + \frac{C_2}{2!} f''(x-a-b-c)$$
$$+ \frac{C_3}{3!} f'''(x-a-b-c-d) + \cdots.$$

Die C werden durch recurrirende Formeln bestimmt, und zwar ist

$$C_1 = a, \quad C_2 = a^2+2ab, \quad C_3 = a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc)\cdots.$$

Für $b = c = d \dots = 0$ erhält man das Taylor'sche Theorem für

$b=c=d=$ einer von Null verschiedenen Grösse die Abel'sche Reihe (Bertrand, Traité de calcul différentiel p. 324.)

Hr.

D. André. Sur la sommation des séries. C. R. LXXXVII. 973-975.

Es bezeichne u_n das allgemeine Glied einer recurrenten Reihe, welches durch die Form

$$u_n = \Sigma\varphi_\alpha(n)a^n$$

dargestellt werden kann, wo a eine Wurzel der erzeugenden Gleichung für u_n, α der Grad ihrer Vielfachheit ist, $\varphi_\alpha(n)$ ein ganzes Polynom in n vom Grade $\alpha-1$ bedeutet, und die Summe sich über alle Wurzeln a erstreckt. Es handelt sich nun um die Summirung einer convergenten Reihe, deren allgemeines Glied

$$U_n = \frac{u_n}{n(n+1)\dots(n+p-1)}x^n$$

ist, unter der Voraussetzung, dass u_n weder durch

$$n(n+1)\dots(n+p-1)$$

noch durch n, noch durch $n+p-1$ theilbar ist. Das ohne Herleitung mitgetheilte Resultat lautet:

$$S=\sum_a\sum_1^{p-1}{}_t\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!t!}\frac{\varphi_a^{(-t)}}{a_t x_t}\left(\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{2}+\dots+\frac{a^tx^t}{t}\right)$$
$$+\sum_a\sum_0^{p-1}{}_t\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!t!}\frac{\varphi_a^{(-t)}}{a^tx^t}\log(1-ax).$$

Hr.

D. André. Terme général d'une série quelconque déterminée à la façon des séries récurrentes. Ann. de l'Ec. N. (2) VII. 375-409.

Die Arbeit enthält die Ausführung der in Darb. Bull. (2) I. 350ff. erschienenen Note des Verfassers, worüber in den Fortschritten IX. p. 170 berichtet ist. Die in der Note ohne Beweis mitgetheilte Formel für das allgemeine Glied einer Reihe, in welcher jedes Glied mit den vorhergehenden durch eine lineare

Relation verbunden ist, wird hier entwickelt, und für jede der dabei unterschiedenen 8 Formen, die das Gesetz der Reihe annehmen kann (s. das erwähnte Referat) an einem Beispiele die Rechnung ausgeführt. Hr.

D. André. Sommation de certaines séries. C. R. LXXXVI. 1017-1019.

Summation der Reihen, deren allgemeines Glied V_n durch die Formel

$$V_n = v_n \frac{x^{\alpha n+\beta}}{(\alpha n+\beta)!}$$

gegeben ist, wo α und β ganze Zahlen vorstellen, $\alpha > 0$, $0 \leqq \beta < \alpha$, und v_n das allgemeine Glied einer recurrenten Reihe bedeutet. Zu diesen Reihen gehören u. A. die Coefficienten, die man erhält, wenn man die Weierstrass'schen Functionen nach Potenzen des Modul entwickelt. Sie haben alle die merkwürdige Eigenschaft in endlicher Form summirbar zu sein. Der hier nicht wiederzugebende Ausdruck der Summe, den der Verfasser ohne Beweis mittheilt, ist eine ganze Function von x und von Exponentialgrössen von der Form e^{mx}. Hr.

D. André. Sur les équations génératrices des séries récurrentes. Bull. S. M. F. VI. 166-170.

Siehe oben p. 181. M.

Laguerre. Sur le développement de $(x-z)^m$ suivant les puissances croissantes de z^2-1. C. R. LXXXVI. 956-959.

I. Ist $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ der n^{te} Näherungsversuch von $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m$, so ist der Coefficient von $z(z^2-1)^n$ in der Entwickelung von $(x-z)^m$ nach steigenden Potenzen von z^2-1 gleich der n^{ten} Ableitung von

$$(x+1)^m f(x)-(x-1)^m \varphi(x).$$

II. Der Coefficient von $z^m F^n(z)$ in der Entwickelung von $\log(x-z)$ nach steigenden Potenzen von $F(z)$ ($F(z)$ ein Polynom vom Grade $m+1$) ist gleich der n^{ten} Ableitung des Ausdrucks

$$P_1\log\left(\frac{x-z_1}{x-z_0}\right)+P_2\log\left(\frac{x-z_2}{x-z_0}\right)+\cdots+P_m\log\left(\frac{x-z_m}{x-z_0}\right)-P,$$

wo P, P_1, $P_2 \ldots P_m$ ganze Polynome vom Grade n sind, welche bewirken, dass der vorstehende Ausdruck von der höchstmöglichen Ordnung in $\frac{1}{x}$ d. h. von der Ordnung $\frac{1}{x^{mn+m}}$ ist.

Hr.

L. Kronecker. Ueber Potenzreihen. Berl. Monatsber. 1878. 53-58.

Es sei

$$\sum_0^\infty {}_n\, c_n e^{-\lambda_n \zeta} = F(\zeta)$$

für $\zeta = \xi + \eta i$ bei positivem ξ (und $\zeta = 0$) eine convergente Reihe, in welcher die reellen Exponenten λ_n mit n beständig und in's Unendliche wachsen. Ist dieselbe auf dem Wege ($\mathfrak{w}$)

$$z = x + yi$$

(x positiv und fest) von $y = -\infty$ bis $+\infty$ gliedweise integrabel, so folgt

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{w}} \frac{F(z)}{z} e^{wz} dz = \sum_0^n {}_k\, c_k,$$

wenn w zwischen λ_n und λ_{n+1} liegt. Dieses Integral stellt demnach eine Function des reellen w dar, welche für $w < \lambda_0$ verschwindet und in den einzelnen Intervallen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werthen von λ constant bleibt. Aus (B) ergiebt sich die bemerkenswerthe Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_w^\infty e^{-w\zeta} dw \int_{\mathfrak{w}} \frac{f(z)}{z} e^{wz} dz = \frac{f(\zeta)}{\zeta},$$

worin die untere Grenze $w \leqq \lambda_0$ zu nehmen ist. Setzt man $x < \xi$ voraus, so hat auch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_w \frac{f(z)}{z}\,dz\int_w^\infty e^{w(z-\zeta)}dw$$

den Werth $f(\zeta):\zeta$.

Durch das analoge Verfahren ergiebt sich die Fourier'sche Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dw\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(v)}{v}\cos(u-v)w\,dv = 2\pi\frac{F(u)}{u},$$

wenn die Reihe

$$F(v) = \sum_0^\infty{}_n a_n \cos\mu_n v + \sum_0^\infty{}_n b_n \sin\nu_n v$$

$$(0 \leqq \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 \ldots,\quad 0 < \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 \ldots)$$

im Intervalle $v = -\infty \cdots +\infty$ gliedweise integrirbar, die μ_n, ν_n in's Unendliche wachsen und $f(0) = 0$ ist.

Bei der Ableitung der Formel (B) giebt der Herr Verfasser die nothwendige und hinreichende Bedingung an, damit eine unendliche Reihe von der Art, dass der Rest derselben im Integrationsintervalle seinem absoluten Werthe nach unter einer bestimmten Zahl bleibt, gliedweise integrirbar sei. St.

Appell. Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable. C. R. LXXXVII. 690-692.

Die Betrachtung bezieht sich auf eine Potenzreihe

$$S(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots,$$

deren Coefficienten von einem bestimmten Gliede an positiv bleiben und der Bedingung genügen:

$$\lim_{n=\infty} n^{1-p} u_n = A \quad (p > 0,\ A > 0 \text{ und endlich}).$$

Dieselbe convergirt für $x < 1$, divergirt aber für $x = 1$. Dann nähert sich, wie gezeigt wird, die durch die Reihe dargestellte Function mit $(1-x)^p$ multiplicirt, wenn sich x wachsend der Eins nähert, dem Werthe $A\Gamma(p)$. Ist $p = 0$ d. h.

$$\lim_{n=\infty} n u_n = A,$$

so nähert sich ebenso $-\dfrac{S(x)}{\lg(1-x)}$ dem Werthe A.

Diese Regel auf die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und die Reihe

$$\varphi(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \cdots$$

angewendet, ergiebt

$$\lim(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, \text{ wenn } \alpha+\beta-\gamma \text{ positiv,}$$

und

$$\lim(1-x)^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = \sqrt{\pi}.$$

T.

Y. VILLARCEAU. Sur le développement en séries des racines réelles des équations. Liouville J. (3) IV. 119-125.

Der Verfasser giebt eine einfache Herleitung der Formel, durch welche die Wurzel x der Gleichung $f(x) = 0$ nach steigenden Potenzen von $f(a)$ entwickelt werden kann, wo a eine beliebige innerhalb der Grenzen des Convergenzbereiches der Entwickelung befindliche Grösse bedeutet. Setzt man

$$x = a - A_1 f(a) + A_2 \frac{f(a)^2}{1.2} - \frac{A_3 f(a)^3}{1.2.3} + \cdots,$$

so muss $\frac{dx}{da} = 0$ sein wegen der Unabhängigkeit der Wurzel x von a. Dies führt auf die zur Bestimmung der Coefficienten A dienenden Gleichungen

$$A_1 \frac{df}{da} = 1, \quad A_2 \frac{df}{da} = \frac{dA_1}{da}, \quad A_3 \frac{df}{da} = \frac{dA_2}{da}, \ldots,$$

woraus man nach einer leichten Rechnung die A direkt durch die Derivirten von f allein ausgedrückt erhält. Führt man ein

$$\alpha_1 = 1 : \frac{df}{da}, \quad \alpha_2 = \frac{d^2 f}{da^2} : \frac{df^2}{da^2}, \quad \alpha_3 = \frac{d^3 f}{da^3} : \frac{df^3}{da^3}, \ldots,$$

so lautet die Reihe bis zu den 4 ersten Gliedern fortgeführt

$$x = a - \alpha_1 f(a) - \alpha_1 \alpha_2 \frac{f(a)^2}{1.2} + \alpha_1(\alpha_3 - 3\alpha_2^2)\frac{f(a)^3}{1.2.3} + \cdots$$

Es folgen einige numerische Anwendungen dieser Formel.

Hr.

F. Buchwald. Summation af Räkker. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 76-93.

Die Aufgabe ist, eine Annäherungsformel zur Berechnung der Summe $\sum_{\nu=s}^{\nu=\infty} y_\nu$ zu ermitteln, wenn $y_x = f(x)$ eine solche Function ist, dass nicht nur y_ν, sondern auch $y_\nu^{(p)} = \frac{\partial^p y_\nu}{\partial \nu^p}$ für wachsende ν stetig abnimmt. Um dies zu erreichen, vergleicht der Verfasser die Fläche der Curve $f(x) = 0$ mit denjenigen Flächen, welche durch verschiedene gebrochene Linien begrenzt werden. Diese ergeben sich, theils indem man die Endpunkte der den Gliedern der Reihe entsprechenden Ordinaten y_ν durch Gerade verbindet, theils indem man wieder die Mittelpunkte der soeben erhaltenen Polygone verbindet und auf gleiche Weise fortfährt. Aus einer einfachen geometrischen Betrachtung geht dann die folgende Ungleichheit hervor: ($y^{(-1)}$ bezeichnet das Integral $\int y dx$)

$$y_\infty^{(-1)} - \tfrac{1}{4} y_{s-1}^{(-1)} - \tfrac{1}{2} y_s^{(-1)} - \tfrac{1}{4} y_{s+1}^{(-1)} + \tfrac{1}{2} y_s > \sum_{\nu=s}^{\nu=\infty} y_\nu > y_\infty^{(-1)} - y_s^{(-1)} + \tfrac{1}{2} y_s.$$

Durch Ueberlegungen, welche hier nicht wiedergegeben werden können, wird hieraus die Formel abgeleitet

$$\sum_{\nu=s}^{\nu=\infty} y_\nu = y_\infty^{(-1)} - \tfrac{1}{2}(y_{s-1}^{(-1)} + y_s^{(-1)}) - \tfrac{1}{6}(y_{s-1} - y_s) - \tfrac{1}{180} y_s^{(3)} + \tfrac{1}{360} y_s^{(4)} \pm \varepsilon,$$

wo

$$\varepsilon < -\tfrac{1}{960}(y_{s-2}^{(5)} + y_{s-2}^{(5)}) + \tfrac{1}{2880}(y_{s-1}^{(6)} + y_{s+1}^{(6)}).$$

Diese Summenformel wird insbesondere bei der Berechnung gewisser langsam convergirender Reihen von Nutzen sein, indem man zuerst eine passende Anzahl der ersten Glieder direct summirt und dann die Summe der übrigen mittelst der Formel findet. So wird z. B.

$$\log 2 = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}) \cdots$$

nach directer Summation der 12 ersten Glieder und Anwendung der Formel auf 7 Ziffern richtig bestimmt. Der Verfasser zeigt ferner die Anwendbarkeit seiner Formel zur Summation der Reihen

$\Sigma \frac{1}{(c+br)^{s}}$ und endlich zur Berechnung der Function $\Gamma(a)$, für welche er die Reihenentwickelung

$$\log \Gamma(a) = C + \Gamma'_{(1)} a + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{a-1}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \log(a+\nu-1).$$

benutzt. Gm.

R. Lipschitz. Sur la fonction de Jacob Bernoulli et sur l'interpolation. C. R. LXXXVI. 119-121.

In seiner Abhandlung über die Maclaurin'sche Formel (Borchardt J. LXXXIV. 64ff., vgl. F. d. M. IX. 182ff.) hat Herr Hermite die durch die Gleichung

$$\frac{e^{\lambda x}-1}{e^{\lambda}-1} = S(x)_0 + \frac{\lambda}{1} S(x)_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} S(x)_2 + \cdots$$

definirten Bernoulli'schen Functionen $S(x)_n$ durch die Functionen

$$X_m = 1 - x^{2m} - (1-x)^{2m} \quad \text{und} \quad X_m^0 = 1-(2x-1)^{2m}$$

ausgedrückt. Der Herr Verfasser legt sich die Frage vor, ob nicht zwischen diesen beiden Arten von Functionen elementare Beziehungen beständen. Unter Hinweis auf Staudt: „De numeris Bernoullianis" (Erlangen 1845 Universitätsschrift) findet er

$$-\tfrac{1}{2} X_m = \binom{2m}{1} S(x)_{2m-1} + \binom{2m}{3} S(x)_{2m-3} + \cdots$$

und

$$-\frac{2x-1}{2} X_m^0 = \binom{2m+1}{1} 2^{2m} S(x)_{2m} + \binom{2m+1}{2} 2^{2m-2} S(x)_{2m-2} + \cdots,$$

wo die einzelnen Glieder der rechten Seite der letzten Gleichung durch $2x-1$ theilbar sind.

Ferner giebt der Herr Verfasser eine rein algebraische Quelle für die Beziehung an, in welche Herr Hermite (Borchardt J. LXXXIV. p. 70ff. F. d. M. IX. p. 312f.) den Taylor'schen Satz zu dem Lagrange'schen Interpolationstheorem gesetzt hat. Das letztere kann — unter $f(x)$ eine ganze Function vom Grade $n-1$ und unter $a, b, c, \dots n$ von einander verschiedene Constanten verstanden — durch folgende Formel ersetzt werden:

$$f(x) = f(a) + \left[\frac{f(a)}{a-b} + \frac{f(b)}{b-a}\right](x-a)$$

$$+\left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right](x-a)(x-b) + \cdots$$

Der allgemeinere Fall, dass mehrere der Argumentwerthe einander gleich sind, lässt sich dann durch einen Grenzübergang erledigen; sind etwa von den Grössen a, b, c, ... α gleich a, β gleich b, u. s. w., so erhält man eine Darstellung von $f(x)$, geordnet nach

$$(x-a)^0,\ (x-a)^1, \ldots, (x-a)^{\alpha-1},\ (x-a)^\alpha,\ (x-b)^0, \ldots,$$
$$(x-a)^\alpha (x-b)^1, \ldots, (x-a)^\alpha (x-\beta)^{\beta-1},\ (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^0, \ldots,$$
$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-b)^{\lambda-1},$$

während die Coefficienten linear in

$$f(a),\ f'(a), \ldots, f^{(\alpha-1)}(a);\quad f(b),\ f'(b), \ldots, f^{(\beta-1)}(b); \ldots$$

sind; und diese Darstellung führt in dem einfachsten Falle auf den Taylor'schen Satz. T.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

RAUSCH. Die wichtigsten Reihen nebst einer Einleitung über das Zahlengebiet und über Functionen für die Prima höherer Lehranstalten. Pr. Giessen.

Die behandelten Reihen sind die Binomial- und die Exponentialreihe, die Sinus- und Cosinus- und die logarithmische Reihe. Schl.

F. STUDNIČKA. Ueber die Ableitung neuer Eigenschaften der Binomialcoefficienten aus einem verallgemeinerten Satze der Lehre von den complexen Zahlen. Prag. Ber. 1877. 92-94.

Von den in der Abhandlung mitgetheilten Eigenschaften der Binomialcoefficienten heben wir als die wichtigste folgende

hervor:

$$[(n)_i]_2 = \sum_1^i {}^k (-1)^{k+1} (n)_{i-k} (n)_{i+k}.$$

In dieser Formel bedeutet $(n)_k$ den k^{ten} Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz. Der Verfasser hat seine Resultate aus dem bekannten Satze hergeleitet, dass die n^{te} Potenz der Norm einer complexen Zahl gleich der Norm der n^{ten} Potenz derselben Zahl ist. Schl.

G. de Longchamps. Sur le binôme de Newton.
Nouv. Ann. (2) XVII. 101-104.

Beweis des binomischen Lehrsatzes für ganzzahlige Exponenten. Schl.

V. Schlegel. Zur Lehre von den Binomialcoefficienten.
Schlömilch Z. XXIII. 263-264.

Mit Hülfe der Formel

$$S = an^{\cdot 1} + bn^{\cdot 2} + cn^{\cdot 3} + \cdots$$

für die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Reihe p^{ter} Ordnung (s. H. Grassmann, Lehrb. d. Math. I. 1860. No. 364) wird für jeden ganzzahligen Werth von k (> 0) die Formel hergeleitet:

$$n^k - k^1 . n^{\cdot(k+1)} + (k+1)^2 . n^{\cdot(k+2)} - (k+2)^3 . n^{\cdot(k+3)} + \cdots = 1.$$

M.

Al. Zdrahal. Beweis einer Relation zwischen Binomialcoefficienten mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Casopis VII. 175-176. (Böhmisch.)

Betrifft die Ableitung von

$$\binom{a+b}{r} = \binom{a}{0}\binom{b}{r} + \binom{a}{1}\binom{b}{r-1} + \cdots + \binom{a}{r}\binom{b}{0}.$$

Std.

Ch. Ladd. The polynomial theorem. Analyst V. 145-147.

Beweis des Satzes. Glr. (O.)

G. Moreno. Dimostrazione di un teorema di Eisenstein. Battaglini G. XVI. 174-177.

Ableitung des Coefficienten von x^n in der Entwickelung von

$$(1+a_1x+a_2x^2+\cdots)^m$$

aus den Coefficienten von x^n in den Entwickelungen der n ersten Potenzen des Polynoms mit Hülfe von Determinantenbeziehungen.

No.

J. W. L. Glaisher. Generalised form of certain series. Proc. L. M. S. IX. 197-202.

Specielle Fälle und Folgerungen aus der Gleichung:

$$\left(1+\frac{p}{p}x+\frac{p(p+2)}{p(p+1)}\frac{x^2}{2!}+\frac{p(p+2)(p+4)}{p(p+1)(p+2)}\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\cdot e^{-x}$$
$$=1+\frac{1}{p+1}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{(p+1)(p+3)}\frac{x^4}{2^2.2!}$$
$$+\frac{1}{(p+1)(p+3)(p+5)}\frac{x^6}{2^3.3!}+\cdots.$$

Schl.

W. Ligowski. Zur Summirung der Reihe $\sum_0^\infty \frac{n^m}{n!}$. Grunert Arch. LXII. 334-336.

Diese Reihe ist der Coefficient des Gliedes t^m in der Entwickelung von e^{e^t} nach Potenzen von t. Ihre Summe wird für die Werthe $m=1$ bis $m=8$ angegeben. Schl.

Genocchi. Eclaircissements sur une note relative à la fonction $\log \Gamma x$ Grunert Arch. LXI. 366-385.

Detaillirte Darstellung der Resultate der Arbeit, welche der Verfasser 1873 der Akademie zu Brüssel eingereicht, und Entgegnung auf die Einwürfe von de Tilly und Ph. Gilbert (s. F. d. M. V. 167). M.

E. Lucas. Sur les développements en séries. Bull. S. M. F. VI. 57-68.

Es seien die Zahlen B_p, P_p, R_p, E_p gegeben durch

$$\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^p = e^{B_p.x}, \quad \left(\frac{-2x}{e^x+1}\right)^p = e^{P_p.x},$$

$$\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}\right)^p = e^{R_p.x}, \quad \left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^p = e^{E_p.x};$$

dann definirt Herr Lucas Zahlen $B_{p,q}$, $P_{p,q}$, ... derart, dass in der Entwickelung der rechten Seiten die Potenzen der B_p, P_p, ... als zweite Indices geschrieben werden; die $B_{1,q}$, $E_{1,q}$ stimmen mit den Bernoulli'schen, bez. Euler'schen Zahlen überein. Mannigfache Arten der Entwickelung auf den linken Seiten liefern dann symbolische Beziehungen und Recursionsformeln. No.

E. Lucas. On eulerian numbers. Messenger (2) VII. 139-141.

1) Ausdruck für die n^{te} Euler'sche Zahl als Determinante und als bestimmtes Integral. 2) Beweise dafür, dass die Euler'schen Zahlen ungrade Zahlen sind und abwechselnd mit 1 oder 5 enden (Scherk's Satz), ferner dass die Reste der Euler'schen Zahlen nach einem Primzahlmodul die Euler'schen Zahlen selbst in derselben Reihenfolge periodisch ebenso wieder ergeben, wie die Reste der Potenzen. Glr. (O.)

J. C. Adams. Note on the value of Euler's constant likewise on the values of the napierian logarithms of 2, 3, 5, 7 and 10 and of the modulus of common logarithms, all carried to 260 places of decimals. Proc. of London XXVII. 88-94.

Der Verfasser berichtet über die Resultate, die Herr Glaisher und Herr Shanks (Proc. of London XIX. und XX.) erhalten hatten, und bemerkt, dass in Verbindung mit seiner Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen B_{32} bis B_{64} er die Annäherung auf eine grössere Ausdehnung bringen könne als vorher möglich gewesen. Cly. (O.)

J. C. ADAMS. Table of the values of the first sixty-two numbers of Bernoulli. Borchardt J. LXXXV. 269-272.

In Crelle's J. XX. hat Ohm die Werthe der 31 ersten Bernoulli'schen Zahlen angegeben. Mit Hülfe des Staudt'schen Theorems hat der Verfasser noch die folgenden 31 Zahlen berechnet. Die vorliegende Note enthält nun eine Tafel der Werthe der 62 ersten Bernoulli'schen Zahlen. Für die Rechnungsmethode, die hier nicht angegeben wird, verweist der Verfasser auf einen demnächst erscheinenden Anhang zum 22ten Bande der Cambridge Observations. Hr.

W. FUHRMANN. Entwickelung von $\log(1+x)$. Grunert Arch. LXII. 230.

Durch ein geschicktes Verfahren der Coefficientenbestimmung findet der Verfasser ohne den binomischen Lehrsatz zu verwenden, dass in der Entwickelung von

$$l(1+x) = \sum_0^\infty a_h x^h, \quad a_h = \frac{(-1)^{h-1} a_1}{h}$$

sein muss. Schl.

A. CAYLEY. A formula by Gauss for the calculation of log 2 and certain other logarithms. Messenger (2) VIII. 125-126.

Bezieht sich auf die Formel von Gauss (Werke II. 501.), welche heisst:

$$2^{196} = 10^{59}.\left(\frac{1025}{1024}\right)^5\left(\frac{1048576}{1048575}\right)^8\left(\frac{6560}{6561}\right)^3\left(\frac{15624}{15625}\right)^8\left(\frac{9801}{9800}\right)^4.$$

Diese wird verificirt, und die Bemerkung hinzugefügt, dass, der Werth von log2, berechnet aus $2^{196} = 10^{59}$ gleich 0,301020 ist, also eine Grösse, die mit einem Fehler von einer Einheit in der fünften Stelle behaftet ist. Ist log2 berechnet, so kann man daraus die Logarithmen von 41, 3, $\frac{11}{7}$, 11.31 und 7.31 herleiten. Glr. (O.)

O. SCHLÖMILCH. Ueber einige unendliche Reihen. Schlömilch Z. XXIII. 132-135.

Abdruck aus Leipz. Ber. 1877 (s. F. d. M. IX. 194). M.

R. HOPPE. Summation einiger Reihen. Grunert Arch. LXII. 165-174.

Summation einer Doppelreihe von der Form:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n(n!)^2}{(2n+1)!}u^n x^{2n+1}\sum_{m=0}^{n}2^{-m}(n+m)_m\left(\frac{v}{u}\right)^m.$$

M.

A. SÝKORA. Summation zweier Reihen. Grunert Arch. LXI. 445-446.

Die Summe von $\sum_0^{n-1}\lambda_h\sin(\varphi+ha)$ und $\sum_0^{n-1}\lambda_h\cos(\varphi+ha)$ wird berechnet. Schl.

G. DOBINSKI. Producte einiger Factorenreihen. Grunert Arch. LXI. 434-438.

Ausgehend von der Gleichung

$$\sum_{x=1}^{n}[f(x)-f(x-1)] = f(n)-f(0),$$

gelangt der Herr Verfasser, indem er für $f(x)$ den Logarithmus der Functionen

$$\frac{\sin 2^x\alpha}{2^x},\quad 2^x\sin\frac{\alpha}{2^x},\quad (2\sin 2^x\alpha)^{2^{1-x}}$$

setzt, zu Ausdrücken für

$$\prod_x \cos 2^{x-1}\alpha,\quad \prod_x\cos\frac{\alpha}{2^x},\quad \prod_x(\operatorname{tg}2^{x-1}\alpha)^{2^{1-x}}$$

für eine endliche und unendliche Anzahl von Factoren. Speciell ist

$$\frac{\pi}{2} = \sec\frac{\pi}{4}.\sec\frac{\pi}{8}.\sec\frac{\pi}{16}\cdots.$$

T.

A. STERN. Om Beregning of Potenstallenes Sum. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 183-188.

Um die Summe der Potenzzahlen zu finden, benutzt der Verfasser eine Gleichung von der Form

$$n^p = (n)_p + a(n+1)_p + b(n+2)_p + \cdots (n+p-1)_p,$$

wo die $(n)_p$, $(n+1)_p$ etc. Binominalcoefficienten bedeuten. Die Coefficienten $a, b \ldots$ bestimmt er durch ein recurrentes Verfahren.

Gm.

J. W. L. Glaisher. Value of a series. Messenger (2) VIII. 127-128.

Die Reihe heisst:

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{5.6.7.8} + \frac{1}{9.10.11.12} + \frac{1}{13.14.15.16} + \cdots$$

Ihr Werth ergiebt sich gleich $\frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{24}\pi$. Auch wird ein Beweis für die Formel:

$$\frac{1}{1.3.5.7} + \frac{1}{9.11.13.15} + \frac{1}{17.19.21.23} + \cdots = \frac{\pi}{96(2+\sqrt{2})}$$

gegeben.

Glr. (O.)

J. J. Walker, R. E. Riley, J. Hammond, G. Battaglini, R. Rawson, A. Mannheim a. o. Solutions of two questions (5492 and 5544). Educ. Times XXIX. 76-79, 109-111.

Beweis des von Hermite gegebenen Satzes: „Ist

$$F(x) = 1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots,$$

so ist

$$\frac{F(x)F(-x)}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{x^2}{n(n+1)^2(n+2)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)^2(n+3)(n+4)} + \cdots\text{“}.$$

Wenn ferner

$$f(x) = \frac{1}{n} - \frac{x}{(n+1).1} - \frac{x^2}{(n+2)1.2} - \frac{x^3}{(n+3)1.2.3} - \cdots,$$

so ist

$$\frac{F(x)}{f(x)} = e^x.$$

M.

D. TROWBRIDGE. Summation of two series. Analyst V. 168-170.

Der Verfasser erhält die Summe der Reihen

$$(a+r)^n+(a+2r)^n+\cdots+(a+xr)^n$$
$$(a+r)^n+(a+3r)^n+\cdots+(a+2xr-r)^n.$$

Glr. (O).

J. W. L. GLAISHER. Numerical value of a series. Messenger (2) VII. 192.

Der Werth der Reihe

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots,$$

wo die Nenner die Quadrate der Primzahlen sind, ist auf 24 Stellen berechnet

$$0{,}452\,247\,420\,041\,065\,498\,506\,546\ldots,$$

wo die letzte Stelle unsicher ist. Euler giebt in der Introd. in Anal. Inf. I. § 282 den Werth auf 15 Stellen, von denen jedoch die 3 letzten Stellen falsch sind. Glr. (O.)

J. L. KITCHIN u. A. Solutions of a question (5173). Educ. Times XXIX. 39.

Summation der Reihen

$$\frac{x^0}{2}+\frac{x^6}{5}+\frac{x^{12}}{8}+\frac{x^{18}}{11}+ \text{ in inf.},$$

und

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{3.5}+\frac{x^7}{5.7}-\frac{x^9}{7.9}+ \text{ in inf.}$$

M.

J. SCHEFFER. Solution of a problem (199.) Analyst V. 90-91.

Es wird eine unendliche Reihe bestimmt, die die Eigenschaft hat, dass ihre Summe ein Quadrat ist, die Summe von n ihrer

Glieder ein Quadrat ist und die Summe der übrigen, auf die n folgenden Glieder, ebenfalls ein Quadrat ist. Glr. (O.)

B. BONCOMPAGNI. Soluzione della Question 391 della Nouvelle Correspondance Mathématique. Boncompagni Bull. XI. 487.

Beweis, dass

$$\sum_1^n (4n-1)^2 - \sum_1^n (4n-3)^2 = 8n^2$$

ist. Schl.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. Hoüel. Cours de calcul infinitésimal. I. Paris. Gauthier-Villars.

Neue Ausgabe der 1871-1872 autographirt erschienenen Vorlesungen (s. F. d. M. III. 115). M.

Ph. Gilbert. Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire. 2. édition. Paris, Gauthier-Villars. Louvain, Peeters.

Da die zweite Auflage sich von der ersten vornehmlich nur durch eine Note über die Existenz der Ableitung bei stetigen Functionen, welche einen Auszug von Darboux' Abhandlung über die unstetigen Functionen enthält, unterscheidet, so genügt es auf das Referat über diese (s. F. d. M. IV. p. 118) zu verweisen. Ref. erlaubt sich hierzu die Bemerkung, dass das vorliegende Lehrbuch die Principien der Infinitesimalrechnung nach Cauchy und Duhamel vorträgt und demnach die Existenz des bestimmten Integrales auf den geometrischen Satz gründet, dass jedes begrenzte Flächenstück eine Zahl sei. Siehe auch Darboux Bull. (2) II.

St.

F. J. STUDNIČKA. Differentialrechnung. 2te veränderte Auflage. Prag. (Böhmisch.)

Ein vorzugsweise für Lehramtskandidaten zusammengestelltes Compendium, das sich von ähnlichen durch Anwendung von Determinanten unterscheidet. Viele vom Verfasser einzeln veröffentlichte neue Ableitungen, wie z. B. die höheren Differentialquotienten von tg, cot, sec, cosec finden hier die natürliche Stellung. Std.

J. FICKLIN. To find the differential of a variable quantity without the use of infinitesimals or limits. Analyst V. 177-178.

Das Differential dx wird definirt als der Theil, um den x variirt. Glr. (O.)

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

J. J. THOMSON. An extension of Arbogast's method of derivations. Messenger (2) VII. 142-143.

A. CAYLEY. Note on Arbogast's method of derivation. Messenger (2) VII. 150.

Ausdehnung der ersten Arbogast'schen Methode zur Entwickelung von $\varphi(u)$ auf den Fall, wenn u eine Reihe mit mehr als einer Variablen ist. In der Note bemerkt Herr Cayley, dass die allgemein nach Arbogast benannte Methode seine zweite ist. Glr. (O.)

F. J. Studnička. Ueber die independente Darstellung der n^{ten} Derivation einer Potenz, deren Basis und Exponent verschiedene Functionen einer Variabeln bilden. Prag. Ber. 1877. 368-373.

Die Arbeit bedarf einer Correction, welche die Bedeutung des Resultats wesentlich abändert. Es wird die Formel entwickelt:

$$\frac{\partial^n u^v}{\partial x^n} = u^v \begin{vmatrix} \varphi' & -1 & 0 & \dots 0 \\ \varphi'' & \varphi' & -1 & \dots 0 \\ \varphi''' & 2\varphi'' & \varphi' & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi^{(n)} & (n-1)_1\varphi^{(n-1)} & (n-1)_2\varphi^{(n-2)} & \dots \varphi' \end{vmatrix}.$$

Setzt man hier e^φ für u^v, so hat man die für jede Function φ von x geltende Entwickelung, welche die Derivationen von e^φ auf die von φ reducirt. Soll nun aber die vorliegende Aufgabe gelöst sein, so bedarf es der Darstellung von $\varphi^{(n)}$ in Derivationen von u und v für $\varphi = v \log u$. Diese ist hier unrichtig durch eine einfache Reihe angegeben, welche nur für $u = x$ gilt. Wollte man sie nach der Methode des Verfassers (s. F. d. M. VII. 140) herstellen, so würden die Terme jener Reihe theils Determinanten theils Logarithmen werden, und die Form des Resultats äusserst complicirt ausfallen. H.

F. J. Studnička. Weitere Beiträge zur Differentialrechnung. Prag. Ber. 1877. 393-399.

Der Verfasser hat in den Prag. Ber. 1875. 1—2 die n^{te} Derivation eines Bruches $\frac{u}{v}$, in Derivationen von u und v, durch eine Determinante dargestellt mit dem Divisor v^{n+1}. Aus jener Formel ergeben sich jetzt speciell die n^{te} Derivation von $\operatorname{tg} x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ nach x, und bei verschwindendem x die Coefficienten der Reihenentwickelung derselben Functionen. Ferner wird darauf hingewiesen, dass jene Darstellung bei den Kriterien der Maxima und Minima in Anwendung komme (s. p. 198). H.

W. Walton. Two demonstrations of a theorem due to Rodrigues. Quart. J. XV. 335-338.

Es wird die Formel bewiesen:

$$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i-n}(x^2-1)^i}{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i+n}(x^2-1)^i} = \frac{(i-n)!}{(i+n)!}(x^2-1)^n,$$

zuerst mit specieller Anwendung der von Lagrange (Mém. de Berlin 1772, p. 213) gegebenen Entwickelung von

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r (a+bx+cx^2)^n$$

auf den Zähler und der binomischen Entwickelung des Nenners der Linken; zweitens durch den Schluss von n auf $n+1$.

H.

Ch. Hermite. Note sur une formule de Jacobi. Mém. de Liège (2) VI. 1877.

Beweis der Formel

$$(n+1)D^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} = (-1)^n.1.3.5\ldots(2n+1)\sin[(n+1)\arccos x]$$

vermittelst der elementaren Theorie der algebraischen Kettenbrüche. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. Theorem of an exponential symbolical operator. Quart. J. XV. 266-272.

J. W. L. Glaisher. Theorems involving certain exponential symbolic operators. Quart. J. XV. 335-338.

Der Verfasser leitet Analoga und Erweiterungen des bekannten Satzes

$$\exp\left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\exp(-kx^2) = (1+4ak)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{kx^2}{1+4ak}\right),$$

wo $\exp x = e^x$, nach 2 verschiedenen Methoden her. Zwei derselben findet er durch Multiplication aus der Urgleichung. Die

andere Methode, hier die Crofton'sche genannt, welche darin besteht, dass man durch partielle Differentiation nach a und k eine Differentialgleichung gewinnt und die im Integral enthaltene willkürliche Function durch Specialbestimmung von a ermittelt, liefert ausser dem neuen Beweise der gefundenen Sätze allgemeinere Resultate und eine grössere Zahl ähnlicher. Allgemeiner ist z. B.

$$\exp\left(\frac{a}{x^{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\exp kx^n = (1-n^2ak)^{-\frac{n-1}{n}}\exp\frac{kx^n}{1-n^2ak};$$

allgemeiner als das erste Resultat der ersten Methode

$$\exp\left\{a\left(\frac{1}{x^{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{p}{x^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\exp kx^n$$
$$= 1-n^2ak^{-\frac{n+p-1}{n}}\exp\frac{kx^n}{1-n^2ak};$$

ein allgemeineres als das zweite ist enthalten in

$$\exp\left\{a\frac{1}{x^{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{p}{x^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\exp kx^n$$
$$= (1-n^2ak)^{-\frac{p}{n}}\exp\left(\frac{a}{x^{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\exp kx^n,$$

wenn man die Entwickelungscoefficienten nach Potenzen von a identificirt. Analog der Urgleichung ist ferner

$$\exp\left(\frac{a}{x}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\exp kx^2 = (1-16ak^2)^{-\frac{1}{4}}\exp\frac{kx^2}{\sqrt{(1-16ak^2)}}.$$

H.

J. Hammond a. o. Solution of a question (5686). Educ. Times XXX. 31-32.

Wenn $y = \cos^n x$, so ist für ein grades n:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+n^2\right)\left\{\frac{d^2}{dx^2}+(n-2)^2\right\}\left\{\frac{d^2}{dx^2}+(n-4)^2\right\}\cdots\left\{\frac{d^2}{dx^2}+2^2\right\}y = n!,$$

und für ein ungrades n:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+n^2\right)\left\{\frac{d^2}{dx^2}+(n-2)^2\right\}\cdots\left\{\frac{d^2}{dx^2}+3^2\right\}y = n.\cos x.$$

M.

O. Stolz. Ueber die Grenzwerthe der Quotienten. Clebsch Ann. XIV. 231-240.

Es werden zureichende Bedingungen zur Gültigkeit des Satzes

$$\lim .\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim .\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad (\lim . x = a \pm 0, \ \pm\infty)$$

aufgestellt. Sie ergeben sich mittelst zweier Sätze über die Existenz eines Grenzwerthes für den Quotienten $F(x):\varphi(x)$, welche die Verallgemeinerung des Satzes von Cauchy (Cours d'Analyse p. 48) bilden. St.

A. S. Hathaway. A problem with solution. Analyst V. 86-87.

Das Problem heisst: „$u', u'', \dots v', v'', \dots$ seien solche Functionen von x, dass jede für $x = a$ verschwindet und auch die Derivirten jeder von ihnen von den Ordnungen $s', s'', \dots t', t'', \dots$: zu finden die Grenze von $\frac{u'u''\dots}{v'v''\dots}$, wenn sich x dem a nähert."

Glr. (O.)

A. Lorsch. Ueber eine Maximumaufgabe. Schlömilch Z. XXIII. Hl. A. 120.

Im 19. Bande derselben Zeitschrift hatte M. Cantor aus einem Briefe Regiomontan's eine Problemstellung mitgetheilt, welcher zufolge auf einer horizontalen Geraden eine Distanz $CX = x$ so gefunden werden sollte, dass eine in ihrer Verlängerung durch C hindurchgehende vertikale Strecke $AB = a$ unter einem möglichst grossen Winkel erschiene. Die analytische Fassung wäre sonach, wenn noch $CA = b$ gesetzt wird, diese:

$$\operatorname{arctang}\frac{a+b}{x} - \operatorname{arctang}\frac{b}{x} = \text{Max.}$$

Verfasser beweist geometrisch, dass $CX = \sqrt{b(a+b)}$ ist. Seine Betrachtungsweise ist eine so einfache, dass wir eine ähnliche auch beim Problemsteller selbst voraussetzen dürfen. Gr.

P. Cassani. Intorno ad un modo di considerare la dottrina del massimo e del minimo nelle funzioni algebriche. Atti d. Ven. (5) I. 54-61.

Zwei, dann 3 Variabele werden durch eine Gleichung 2ten Grades in Abhängigkeit gebracht, daraus die Gleichung abgeleitet, welche die Maxima und Minima bestimmt, und discutirt.

H.

Capitel 3.

Integralrechnung.

J. Worpitzky. Ueber die Verallgemeinerung der partiellen Integration. Schlömilch Z. XXIII. 407-408.

Indem man vorläufig beliebige variable Bestandtheile einer Function als constant ansieht und die Integration partiell auf x bezieht, ergiebt sich die Verallgemeinerung der partiellen Integration in der Form:

$$\int f(u_1, u_2, \dots u_n, x)dx = \int f(u_1, u_2, \dots u_n, x)dx$$

$$-\sum_{p=1}^{p=n} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial u_p} \int f(u_1, u_2, \dots u_n, x)\partial x \right\} \frac{du_p}{dx} dx.$$

M.

Andréiewsky. Sur les réductions des intégrales indéfinies. Darboux Bull. (2) II. 246-261.

Die Reduction des Integrals

$$y = \int \frac{Mdx}{N^{p+1}} \quad \text{auf} \quad y_1 = \int \frac{M_1 dx}{N^p}$$

hat Euler in der Form aufgestellt:

$$M - pRN' = NT; \quad M_1 = R' + T$$

$$y = y_1 - \frac{R}{N^p}.$$

Der Verfasser setzt nun

$$pR = -MA; \quad T = MB;$$

dann bleibt nur die Gleichung

$$BN - AN' = 1$$

durch A und B zu erfüllen, deren Werthe sich auf

$$A - \frac{K}{M}N, \quad B - \frac{K}{M}N'$$

erweitern lassen. Er zeigt dann an vielen Beispielen die Verwendung der willkürlichen Function K zur Vereinfachung der Reductionsformeln. H.

U. Dainelli. Relazione fra l'area e il perimetro, fra il volume e la superficie, fra i momenti, fra le coordinate dei centri di gravità per gli spazi limitati da linee e superficie che hanno l'equidistante della loro stessa natura. Battaglini G. XVI. 279-298.

Der Aufsatz besteht aus Beweis und specieller Anwendung des bekannten Satzes, dass eine ebene Linie, eine Fläche etc. der Grenzwerth ist des zwischen der Linie, bezw. der Fläche und einer unendlich nahen äquidistanten enthaltenen Raumes dividirt durch den normalen Abstand — mit Einmischung einer unklaren Verkehrung. Der Verfasser fügt die räthselhafte Bedingung hinzu, dass die Aequidistante von gleicher Natur sei. In den angeführten Fällen, wo der Satz nicht genau zutreffen soll, hat er nicht die Aequidistante von verschiedener Natur angewandt, sondern die Linie gleicher Natur untergeschoben, welche nicht äquidistant ist. H.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

C. F. Lindman. Anteckningar till Dr. Bierens de Haan's Tables d'intégrales définies. Amsterdam 1858. Fortsättning. Öfv. kngl. Svenska Vet. Ak. Förh. 1878. No. 1.

Enthält Bemerkungen und Correctionen zu der bekannten Arbeit Bierens de Haan's „Tables d'intégrales définies".

M. L.

J. W. L. GLAISHER. Note on certain theorems in definite integration. Messenger (2) VIII. 63-74.

Die Arbeit bezieht sich auf die Abhandlung von Boole: „On the comparison of transcendents" (Phil. Trans. 1857, 745—803) und zwei Arbeiten des Verfassers: „On a theorem in definite integration" (Quart. J. X. 347—356, s. F. d. M. II. p. 151) und „On the reduction of functional transcendents" (Messenger (2) I. 153—162. s. F. d. M. IV. p. 133) und enthält Transformationen und Beispiele, die sich auf den Inhalt dieser Arbeiten beziehen. Derartige Transformationen sind:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x-\operatorname{tang} x}{x^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v)}{v^2}\, dv,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{\operatorname{tang}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, dv,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x}\operatorname{tang}\sqrt{x})\frac{dx}{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v)}{v^2}\, dv,$$

$$b\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(X)}{x^2+b^2}\, dx = B\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v)}{v^2+B^2}\, dv,$$

wo f irgend eine Function bezeichnet und in der letzten Gleichung

$$X = x-\frac{a^2}{x}, \quad B = b+\frac{a^2}{b}.$$

Ein specieller Fall dieses Resultates ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(cX)}{x^2+b^2}\, dx = \frac{\pi}{2b}\, e^{-cB}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(c\cot X)}{x^2+b^2}\, dx = \frac{\pi}{2b}\, e^{-c\coth B},$$

wo $\coth B$ die hyperbolische Cotangente $\frac{e^{+B}+e^{-B}}{e^{+B}-e^{-B}}$ bezeichnet;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(X)}{x^4+b^4}\,dx = \int \frac{a^2v^2+a^4+b^4}{b^4(v^2+2a^2)^2+(a^4-b^4)^2}\,dv.$$

Andere Beispiele derselben Art folgen. Glr. (O.)

Appell. Sur quelques applications de la fonction $\Gamma(x)$ et d'une autre fonction transcendante. C. R. LXXXVI 953-956.

Ist das allgemeine Glied u_n einer convergenten Reihe

$$u_1+u_2+\cdots$$

eine rationale Function seines Index, so kann man, ausgehend von der Partialbruchzerlegung von u_n, ihre Summe darstellen mit Hülfe von Functionen, die für reelle oder complexe Werthe von x mit positivem reellen Theil mit den Ableitungen von $\log\Gamma(x)$ identisch sind. Dies vorausgeschickt, betrachtet der Verfasser die convergente Reihe $v_1+v_2+\ldots$, deren allgemeines Glied eine rationale Function von $\sin 2an$ und $\cos 2an$ ist, wo man den imaginären Theil von a positiv annehmen kann. Ausgehend von einer Zerlegung von v_n analog der Partialbruchzerlegung der rationalen Functionen (cf. Hermite Analyse p. 321), zeigt er, dass man ihre Summe vermittelst einer einzigen Function

$$C(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{cotg} a(n+x)+\sqrt{-1}\right]$$

und ihrer Ableitungen nach x darstellen kann. Es werden einige Eigenschaften dieser Function angegeben. Die Function

$$G(x) = e^{a\int_0^x C(x)\,dx}$$

ist dann der Γ-Function analog, und man kann ebenso, wie jedes convergente Product, dessen allgemeiner Term eine rationale Function von n ist, mit Hülfe der Γ-Function, jedes solches, dessen allgemeiner Term eine rationale Function von $\sin 2an$ und $\cos 2an$ ist, mit Hülfe der Function G darstellen. Ferner wird angeführt: Ist $\varphi(x)$ eine rationale Function von $\sin 2ax$ und $\cos 2ax$, so kann man durch Anwendung der Functionen $C(x)$ und $G(x)$ die Functionalgleichungen $\Phi(x) = \Phi(x-1)+\varphi(x)$ und $F(x) = F(x-1)\,\varphi(x)$ lösen. T.

APPELL. Évaluation d'une intégrale définie. C. R. LXXXVII. 874-876.

Durch Combination der Differentialgleichungen 2ter Ordnung, welchen die hypergeometrische Reihe $F = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und die Function $F_n = F(\alpha+n, \beta-n, \gamma, x)$ genügen, gelangt man zu einer ebensolchen für die Function $FF'_n - F_n F'$, durch deren gliedweise Integration der Verfasser mit Hülfe einer Formel, die er C. R. LXXXVII. 692 (siehe diesen Band p. 184) abgeleitet hat, den Werth des Integrals

$$n(\beta-\alpha-n)\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}F.F_n dx \text{ für } \gamma>0, 1>\gamma-\alpha-\beta>0$$

$$= \frac{\pi\Gamma(\gamma).\Gamma(\gamma)}{\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi}\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta-n)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-n)\Gamma(\gamma-\beta-n)}\Big]$$

ermittelt; für n kann jede beliebige Zahl genommen werden. Für $n = 0$ und $n = \beta-\alpha$ ergiebt sich hieraus der Werth des Integrals

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}F.Fdx$$

zunächst in der Form $\frac{0}{0}$, nach der üblichen Methode aber sofort der wahre Werth:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\,\frac{\pi\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma)}{\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$
$$\times\Big[\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma'(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} - \frac{\Gamma'(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\Big].$$

Als specielle Fälle enthält die obige Formel die Reduction des Euler'schen Integrals $B(p, q)$ auf Γ-Functionen und die von Jacobi Borchardt J. LVI. betrachteten Formeln. T.

F. J. STIELTJES. Een en ander over de integraal

$$\int_0^1 l\Gamma(x+u)\,du.$$

Nieuw Arch. IV. 100-104.

Neue Herleitung des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 l\Gamma(x+u)du = \tfrac{1}{2}l2\pi + xlx - x,$$

woran sich einige Betrachtungen über damit verwandte Functionen knüpfen. Gm.

S. Spitzer. Ermittelung eines bestimmten Integrals. Grunert Arch. LXII. 221-222.

Das Integral

$$J = \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\varphi(u)\,\partial u;$$

(der Factor $(-1)^{B-1}$ ist unnöthigerweise darin), wo A und B positiv, $\varphi(u)$ ganze Function, wird nach Substitution

$$u = \alpha+(\beta-\alpha)\omega$$

durch Entwickelung von $\varphi(u)$ nach Potenzen von ω in Euler'schen Integralen dargestellt, dann als ein Product ausgedrückt, wovon ein Factor dasselbe Integral J für $\varphi(u) = 1$ ist.

H.

D. Bierens de Haan. Bydragen tot de theorie der bepaalde integralen. No. XIV. Over integralen van den vorm

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2x\cos^2x} \text{ en } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{xF(x)\,dx}{1+p\sin^2x\cos^2x},$$

waarin F eene goniometrische functie is. Versl. en Mededeel. XII. 325-370.

D. Bierens de Haan. Notice sur les intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2x\cos^2x} \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{xF(x)\,dx}{1+p\sin^2x\cos^2x},$$

où F est une fonction goniométrique. Arch. Néerl. XIII. 389-417.

Eine lange Reihe bestimmter Integrale, zu oben genannten Formen gehörend, werden abgeleitet nach der Methode des Ver-

fassers, welche auseinandergesetzt ist in seinem: „Exposé de la théorie des propriétés des intégrales définies.“ G.

E. B. ELLIOTT, WOLSTENHOLME a. o. Solutions of a question (5692). Educ. Times XXX. 33-36.

Es werden die Zahlencoefficienten E_n in den Werthen für

$$U_n \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \operatorname{tg} x)^{2n}\, dx = E_n(\tfrac{1}{2}\pi)^{2n+1}$$

ermittelt. M.

J. HAMMOND a. o. Solution of a question (5598). Educ. Times XXX. 43-44.

Wenn $1+x\sin\alpha$ positiv und n eine ganze Zahl ist, so ist:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin^{n-2}\vartheta(n-1-n\sin^2\vartheta-x\sin\vartheta)d\vartheta}{(1+x\sin\vartheta)^{n+1}} = \frac{\cos\alpha.\sin^{n-1}\alpha}{(1+x\sin\alpha)^n}.$$

M.

W. H. RUSSELL. On certain definite integrals. Proc. of London XXVII. 129-132.

Fortsetzung früherer Arbeiten (s. F. d. M. IX. p. 214). Die Integrale (63—85), welche ohne Herleitung gegeben werden, erfordern grösstentheils andere Methoden, als dort angewendet wurden. Cly. (O.)

Auswerthung specieller bestimmter Integrale, von WOLSTENHOLME, TUCKER, R. KNOWLES, J. HAMMOND, R. RAWSON, E. B. ELLIOTT u. a. finden sich Educ. Times XXIX. 79-80; XXX. 19, 40, 43, 74-75, 104, 107, 111-112.

M.

P. G. TAIT. On some definite integrals. Proc. of Edinb. IX. 594-595.

Die Integrale treten auf in Verbindung mit Anwendungen der Methode der elektrischen Bilder. Es sind Doppelintegrale,

deren Werthe sich als unabhängig ergeben von dem Werthe eines Parameters der Functionen unter dem Integralzeichen.

Cly. (O.)

Anonymus. Proof of the theorem, that the surface-integral of a flux is equal to the line-integral of a flow, the line-integral being taken round the closed line which bounds the surface. Educ. Times XXX. 51-52.

Durch Betrachtung der parallelen Flächen von unendlich kleinem Abstand wird die Relation

$$\iint\left[l\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right)+m\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)+n\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)\right]d\sigma$$
$$=\int(udx+vdy+wdz)$$

erwiesen.

M.

J. Thomae. Ueber bestimmte Integrale. Schlömilch Z. XXIII. 67-68.

An einem Beispiel wird gezeigt, dass der Satz: „Wenn zwei aufeinanderfolgende Integrationen in vorgeschriebener Reihenfolge ausführbar sind, so lässt sich die Reihenfolge vertauschen, wenn die Function unter dem Integral immer positiv ist" (s. Borchardt J. LXIII. 364) nicht richtig ist. Ferner wird ein Beispiel gegeben zu der Bemerkung von Du Bois Reymond, dass es keine nothwendige Bedingung für die Ausführbarkeit der Integration

$$\int_0^\infty \varphi(x)\partial x \quad (\varphi(\infty)=\infty)$$

sei, dass die Function $\varphi(x)$ unendlich oft ihr Zeichen wechsle.

M.

C. Leudesdorf. On certain extensions of Frullani's theorem. Proc. L. M. S. IX. 118-122.

Das hier behandelte Theorem lautet: Bezeichnet man die Summen der homogenen Producte 1ter, 2ter, ... n^{ter} Ordnung der n Grössen

$$\log\frac{r}{a_1},\ \log\frac{r}{a_2},\dots\log\frac{r}{a_n} \text{ durch } \Sigma_1,\ \Sigma_2,\dots\Sigma_n$$

und die der n Grössen

$$\log\frac{r}{a'_1},\ \log\frac{r}{a'_2},\dots\log\frac{r}{a'_n}\ \text{durch}\ \Sigma'_1,\ \Sigma'_2,\dots\Sigma'_n,$$

so ist

$$(-1)^n\{[a_1a_2\dots a_n]-[a'_1a'_2\dots a'_n]\}=(\Sigma_n-\Sigma'_n)S(\infty-0)^n$$
$$-(\Sigma_{n-1}-\Sigma'_{n-1})[\overline{r\infty-0^{n-1}}]+(\Sigma_{n-2}-\Sigma'_{n-2})[\overline{r^2\infty-0^{n-2}}]$$
$$-\text{etc.}\dots+(-1)^n(\Sigma_1-\Sigma'_1)[r^{n-1}\overline{\infty-0}],$$

wo zur Abkürzung

$$[a]=\int_0^\infty\frac{\varphi(ax)}{x}dx;\quad [ab]=\int_0^\infty\int_0^\infty S(ax,by)\frac{dx\,dy}{xy};$$
$$[abc]=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty S(ax,by,cz)\frac{dx\,dy\,dz}{xyz};\ \text{etc.}$$

gesetzt ist, und $S(p,q,r,\dots)$ eine beliebige symmetrische Function von $p,q,r,\dots$ ausdrückt, die für keine positiven Werthe von $p,q,r\dots$ unendlich wird. Ferner wird erklärt:

$$[a\bar{b}]=\int_0^\infty S(ax,b)\frac{dx}{x};\ [a\overline{bc}]=\int_0^\infty S(ax,b,c);\ \text{etc.}$$

und die symbolischen Ausdrücke sind zu deuten nach

$$S(\infty-0)^3=S(\infty,\infty,\infty)-3S(\infty,\infty,0)+3S(\infty,0,0)-S(0,0,0).$$

In obiger Form stellt der Verfasser das Theorem auf, welches Elliott in den Proceeding's No. 106 und 113 bis zur 6[ten] Ordnung entwickelt, und ohne Beweis für beliebige Ordnung gegeben hatte. An dessen Formulirung vermisst der Verfasser die Erkennbarkeit der Bedingungen, welche nur speciell und unsymmetrisch dargestellt waren. Die gegenwärtige Herleitung beruht auf wiederholter successiver Anwendung des Satzes für niedere Ordnung.

H.

R. Pictet et G. Cellérier. Méthode générale d'intégration continue d'une fonction numérique quelconque. Bibl. univ. LXIV. 185-188.

L. Gegenbauer. Zur Theorie der mechanischen Quadraturen. Wien. Ber. LXXVIII.

Der Verfasser stellt sich folgende Aufgabe: Es ist der Werth

des Integrales

$$\int_a^b X(x)\,F(x)\,dx,$$

wo $F(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelbare Function ist, mit Hülfe der Werthe, welche die Function $F(x)$ für die n Werthe des Arguments $x = x_1, x_2, \dots x_n$ annimmt, näherungsweise zu berechnen. Hierbei sollen die r Grössen $x_1, x_2, \dots x_r$ gegeben sein, die übrigen $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_{r+n}$ aber so bestimmt werden, dass der Fehler, welcher bei Benutzung der gefundenen Näherungsformel gemacht wird, für Functionen von möglichst hohem Grade verschwindet. Er löst dieselbe. Die Art der Lösung möchte sich kaum kürzer angeben lassen als durch Mittheilung der ganzen Arbeit. H.

A. Genocchi. Intorno alle funzioni interpolari. Atti di Torino XIII. 716-730.

Die genannten, von Ampère eingeführten Functionen entstehen durch folgenden Algorithmus: $f(x)$ sei eine Function von x; man bildet

$$f(a, b) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}, \qquad f(a, b, c) = \frac{f(a, b)-f(a, c)}{b-c}.$$

$$f(a, b, c, d) = \frac{f(a, b, c)-f(a, b, d)}{c-d} \quad \text{etc.}$$

Der Verfasser zeigt zunächst, dass

$$f(a_1, a_2, \dots a_n)$$
$$= \iint \dots \int f^{n-1}(a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_{n-1},$$

wo sich die Integration über alle $t \geqq 0$ erstreckt, welche der Bedingung $\Sigma t = 1$ genügen. Die weiteren Entwickelungen beschäftigen sich dann hauptsächlich mit den Folgerungen, welche sich aus dem gefundenen Resultat betreffs der Darstellung des Fehlers verschiedener Interpolationsformeln durch bestimmte Integrale ergeben. B.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

N. Alexéieff. Integration der Differentialgleichungen. 1. Lieferung. Moscau. (Russisch).

Dieses Werk ist der zweite Theil des Lehrbuches der Integralrechnung, dessen erster Theil im Jahre 1862 in der ersten Auflage und 1874 in der zweiten Auflage erschienen ist. Die zweite Lieferung wird die Integration durch Reihen und die partiellen Differentialgleichungen enthalten. Eine ausführliche Uebersicht des vorliegenden Werkes gab der Verfasser selbst im Bulletin des sciences math. et astronom. par Darboux et Hoüel. (T. II. 2me série 1878). P.

A. Wassilieff. Ueber die singulären Lösungen im Zusammenhange mit den neuen Ansichten über das Problem der Integration der Differentialgleichungen 1ter Ordnung. Kazan. (Russisch).

Dieser Aufsatz enthält eine elementare Auseinandersetzung der auf die Theorie der singulären Lösungen sich beziehenden Untersuchungen von Clebsch (Siehe Vorlesungen über Geometrie von Clebsch II. Band. Siebente Abtheilung). P.

H. Léauté. Étude géométrique du problème de l'intégration des équations différentielles. Mém. de Toul. (7) VII. 1-48.

D. Bierens de Haan. Iets over zamenstelling van differentiaalvergelijkingen uit eene aangenomene integraalvergelijking. Verh. v. Amst. XVIII. 1-37.

Ausführlich wird die Methode auseinandergesetzt, deren Zweck ist, aus einer angenommenen Integralgleichung die

dazu gehörenden Differentialgleichungen zu finden. Einige dieser Integrale, welche zusammengesetzt sind aus dem Producte von Potenzen vielgliedriger algebraischer Formen, werden behandelt. Die Beispiele führen zu sehr langen Rechnungen und Formeln, aus welchen dann wieder einfachere und besondere Fälle abgeleitet werden. G.

G. Darboux. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. Darboux Bull. (2) II. 60-96, 123-144, 151-200.

G. Darboux. Sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré. C. R. LXXXVI. 533-536.

G. Darboux. De l'emploi des solutions particulières d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré dans la recherche de l'intégrale générale. C. R. LXXXVI. 584-586.

G. Darboux. De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques. C. R. LXXXVI. 1012-1014.

Gemäss der im Wesentlichen rein algebraischen Natur der Untersuchungen, die der Herr Verfasser über die Differentialgleichungen 1ter Ordnung und 1ten Grades anstellt, geht er von der in homogenen Variabeln geschriebenen Form derselben

$$(a)\quad L(ydz-zdy)+M(zdx-xdz)+N(xdy-ydx)=0$$

aus, wo L, M, N ganze homogene Functionen desselben Grades m sind und zeigt in der Einleitung zu der ersten, ausführlicheren der obigen Arbeiten den Zusammenhang zwischen dieser Form und anderen bekannten Formen der Differentialgleichungen 1ter Ordnung und 1ten Grades. Man kann dieselben auf unendlich viele Weisen auf die Form (a) bringen; unter allen diesen wird eine als Normalform hervorgehoben, nämlich diejenige, welche die invariante Bedingung

$$H\equiv\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0$$

erfüllt, und auf welche sich jede Differentialgleichung nur auf eine Weise bringen lässt; hieraus schliesst man, dass sich die in (a) auftretenden wesentlichen Constanten auf m^2+4m+2 reduciren lassen.

Die eigentliche Arbeit zerfällt in zwei Abschnitte. Im ersten handelt es sich um die Entwickelung einer neuen Integrationsmethode. Der Multiplicator μ von (a), d. i. diejenige Function, welche den Ausdruck (a) zu einem exacten Differential einer homogenen Function vom Grade 0 macht und nothwendiger Weise vom Grade $-(m+2)$ ist, wird durch die partielle Differentialgleichung $\Delta(\mu)+\mu H = 0$ (unter Δ die Operation

$$L\frac{\partial}{\partial x}+M\frac{\partial}{\partial y}+N\frac{\partial}{\partial z}$$

verstanden) definirt, deren Integration auf die des Systems

$$\frac{dx}{L}=\frac{dy}{M}=\frac{dz}{N}$$

hinauskommt. Die Integration dieses Systems und die der Gleichung (a) sind daher äquivalente Probleme. Diese Bemerkung ist schon längst für die Integration der Jacobi'schen Gleichung verwerthet worden. Damit $\varphi(x, y, z) = l$ das allgemeine Integral sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $\Delta\varphi = 0$ und μ eine homogene Function von der Ordnung 0 ist.

Zunächst handelt es sich nun um die Auffindung von particulären algebraischen Integralen $f(x, y, z) = 0$ von (a); zu diesem Zwecke hat man nur die Coefficienten von f so zu bestimmen, dass die Gleichung $\Delta(f) = K.f$, wo K eine unbestimmte Function vom Grade $m-1$ ist, identisch erfüllt wird. Hat man dann eine Anzahl p solcher Integrale $u_1, \ldots, u_p$, von dem resp. Grade $h_1, \ldots, h_p$, bestimmt, so ist

$$\Delta(u_1) = K_1 u_1, \ldots, \Delta(u_p) = K_p u_p$$

und

$$\Delta(u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}) = (\alpha_1 K_1+\cdots+\alpha_p K_p) u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}.$$

Kann man daher die p Constanten α so bestimmen, dass

$$\text{(b)} \quad \sum_i \alpha_i K_i = 0, \quad \sum_i \alpha_i h_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, p)$$

ist, so besitzt man in $u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p} = l$ das allgemeine Integral von (a). Im ungünstigsten Falle reicht die Kenntniss von

$$q = \frac{m(m+1)}{2} + 2$$

Integralen aus, um den Gleichungen (b) zu genügen. Als Beispiel ergiebt sich eine sehr einfache Integration der Jacobi'schen Gleichung (L, M, N lineare Functionen). Die particulären Integrale können noch auf eine zweite Weise zur Integration verwendet werden. Kann man nämlich die p Constanten α so bestimmen, dass

$$(c) \quad \sum_i \alpha_i K_i = -H \quad \text{und} \quad \sum \alpha_i h_i = -(m+2)$$

ist, und dies kann immer geschehen, wenn $p = q-1$ ist, d. h. wenn man $q-1$ particuläre Integrale kennt, so ist

$$\Delta\,(u_1^{\alpha_1} \dots u_p^{\alpha_p}) + H u_1^{\alpha_1} \dots u_p^{\alpha_p} = 0,$$

und man hat also in $\mu = u_1^{\alpha_1} \dots u_p^{\alpha_p}$ einen Multiplicator von (a). Sollte die Determinante des Gleichungssystems (c) verschwinden, so wird diese Bestimmung des Multiplicators zwar illusorisch, aber man befindet sich in dem noch günstigeren Falle, sofort das allgemeine Integral von (a) angeben zu können, nämlich $\mu = l$. Ferner sei hervorgehoben, dass umgekehrt jeder rationale Factor eines Multiplicators ein particuläres Integral liefert.

Die Anzahl der particulären Integrale, deren Kenntniss für den in Rede stehenden Zweck nothwendig ist, braucht in vielen Fällen die angegebene Grösse gar nicht zu erreichen; der eigentliche Grund hierfür wird durch eine eingehende Betrachtung der singulären Punkte der Differentialgleichung aufgedeckt. Singuläre Punkte heissen nämlich diejenigen, für deren Coordinaten die Differentialgleichung identisch verschwindet, d. h.

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$$

ist (geometrisch ausgedrückt: zu denen durch die Differentialgleichung keine bestimmte Tangente definirt wird, wie es sonst der Fall ist). Ihre Anzahl ist m^2+m+1 und, was ihre Lage betrifft, so können höchstens $m+1$ in einer Geraden, aber $(m+1)p$ für $p > 1$ niemals auf einer nicht zerfallenden Curve p^{ter} Ordnung liegen. Auf jeder Curve p^{ter} Ordnung, die durch ein particuläres Integral $f = 0$ dargestellt ist, liegen wenigstens

$$p(m-p+2)+h'$$

singuläre Punkte, wo h' die Anzahl der gemeinschaftlichen Lösungen von

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \cdots \frac{\partial f}{\partial z}=0$$

ist. Jeder singuläre Punkt der Curve $f=0$ ist ein singulärer Punkt der Differentialgleichung, ebenso jeder Schnittpunkt der durch zwei particuläre Integrale dargestellten Curven. Was nun die obige Frage nach der Reduction der Anzahl der particulären Lösungen, deren Kenntniss nothwendig ist, betrifft, so ergiebt sich der Satz: Hat man

$$p=\frac{m(m+1)}{2}+2-q$$

particuläre Integrale $u_1 \ldots u_p$, und giebt es q singuläre Punkte, durch welche die durch jene repräsentirten Curven nicht gehen, so ist $u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}=l$ das allgemeine Integral. Vorausgesetzt ist hierbei, dass die q Punkte nicht so liegen, dass jede Curve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche eine gewisse Anzahl von ihnen enthält, durch einige der übrigen Punkte geht. Mit einem Artikel über die Transformation der betrachteten Differentialgleichung schliesst der erste Abschnitt.

Der zweite Abschnitt enthält die Anwendung der entwickelten Methoden auf den, nach der Jacobi'schen Gleichung einfachsten speciellen Fall der Differentialgleichung (a), wo L, M, N von der 2ten Ordnung sind. Aus der Discussion des Verhaltens der singulären Punkte ergeben sich Anhaltspunkte für die Aufstellung particulärer Lösungen. Dies vorausgeschickt, zeigt der Verfasser in sehr eingehender Weise, von der sehr grossen Reihe von möglichen Arten von particulären Integralen ausgehend, wie man von diesen zu dem allgemeinem Integrale gelangt. Es sei hervorgehoben, dass, während die Jacobi'sche Gleichung eigentlich nur eine einzige Form für das allgemeine Integral liefert, sich in dem vorliegenden Falle schon eine grosse Anzahl verschiedener Typen hierfür ergeben. Schliesslich giebt der Verfasser noch eine synthetische Methode, vermittelst deren man die Resultate dieses Abschnitts theils verificiren, theils noch vermehren kann.

Geht man nämlich von der allgemeinsten Form eines algebraischen Integrals $u_1^{\alpha_1} \dots u_p^{\alpha_p} = l$ zu der Differentialgleichung

$$\left(\alpha_1 \frac{du_1}{u_1} + \dots + \alpha_p \frac{du_p}{u_p}\right) u_1^{\alpha_1} \dots u_p^{\alpha_p} = L(ydz - zdy) + \dots = 0$$

über, so sieht man leicht, dass jede algebraische Differentialgleichung allgemeine Integrale dieser Gestalt wird zulassen können, wenn die α und h den Gleichungen

$$\Sigma h\alpha = 0, \quad \Sigma h = m+2$$

genügen. Aber — und dies ist sehr wesentlich — man braucht auf diese Weise nicht sämmtliche Typen des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung zu erhalten; es kann nämlich die Differentialgleichung ursprünglich in der Gestalt

$$\lambda^k \lambda'^{k'} \dots (Pdx + Qdy + Rdz) = 0$$

auftreten, und dann wird durch Unterdrückung des Factors $\lambda^k \lambda'^{k'} \dots$ der Grad der Gleichung erniedrigt, die Zahl m also verändert. Hierfür leitet nun der Verfasser folgenden Satz her: In der Differentialgleichung der Curven des Büschels

$$u_1^{\alpha_1} \dots u_q^{\alpha_q} - C u_{q+1}^{\alpha_{q+1}} \dots u_p^{\alpha_p} = 0,$$

(die α sämmtlich positiv angenommen) ist der Grad der Polynome L, M, N gleich

$$h_1 + \dots + h_p - 2 - m_2 - 2m_3 - 3m_4 - \dots,$$

wo h_i der Grad von u_i, m_2 die Summe der Grade der doppelten Curven und allgemein m_p die Summe der Grade der vielfachen Curven von der Ordnung p ist, die in dem Büschel enthalten und von den Curven $u_i = 0$ verschieden sind. Es heisst nämlich eine nicht zerfallende Curve $U = 0$ eine vielfache Curve des Büschels $f - C\varphi = 0$ von der Ordnung p_1, wenn sich C_1 so bestimmen lässt, dass $f - C_1 f_1 \equiv U^p . \varphi$ ist. Eine grosse Anzahl von Büscheln mit mehrfachen Curven liefert die Theorie der algebraischen Formen; umgekehrt führt jedes algebraische Integral einer Differentialgleichung, welches für verschiedene Werthe von C mehrfache Curven darstellt, auf eine algebraische Identität.

In dem zweiten und dritten der oben angeführten Aufsätze finden wir eine kurze Zusammenstellung der hauptsächlichsten Resultate der eben besprochenen. In der letzten endlich giebt

Herr Darboux an, wie sich seine Methode auch auf das allgemeinste System von algebraischen Differentialgleichungen irgend welcher Ordnung unmittelbar ausdehnen lässt. T.

Laguerre. Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre.

Bull. S. M. F. VI. 124-129.

Es handelt sich um die Aufstellung von Differentialgleichungen 1ter Ordnung $V(xyy') = \alpha$, deren Multiplicator angebbar ist. Liegt eine Differentialgleichung $dy - zdx = 0$ vor, wo z aus der Gleichung $V(x, y, z) = \alpha$ zu bestimmen ist, und ist M ein Multiplicator derselben, so führt der Verfasser in M an Stelle von α ebenfalls z aus $V = \alpha$ ein, so dass $M = M(x, y, z)$ wird und stellt sich das Problem: die allgemeinste Function $F(x, y, z)$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck $M(dy - zdx)$ ein totales Differential werde, wenn man hieraus z mit Hülfe von $F = \alpha$ eliminirt. Zur Lösung dieses Problems integrire man das System

$$dx:dy:dz = \frac{\partial M}{\partial z} : M + z\frac{\partial M}{\partial z} : -\left(\frac{\partial M}{\partial x} + z\frac{\partial M}{\partial y}\right);$$

ein erstes Integral ist $V(x, y, z) = \alpha$, ein Jacobi'scher Multiplicator die Einheit; das Princip des letzten Multiplicators liefert dann ein zweites Integral $W = \beta$, wo W durch Quadratur aus dem totalen Differential

$$\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial z}}\left[\left(M + z\frac{\partial M}{\partial z}\right)dx - \frac{\partial M}{\partial z}\,dy\right],$$

woraus zuvor z mit Hülfe von $V = \alpha$ zu eliminiren ist, erhalten wird. Alsdann ist eine willkürliche Function von V und W, worin noch α durch V zu ersetzen ist, die gesuchte Function $F(x, y, z)$.

Indem der Verfasser an Stelle von $V = \alpha$ die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

nimmt, wo f eine beliebige Function von x, y, α ist, ergiebt sich hieraus unmittelbar, dass man die Integration der Differentialgleichung

$$\Phi(\alpha)F'[f+\mu(\alpha)].\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\mu'(\alpha)\right)+\Psi(\alpha)F[f+\mu(\alpha)]+\theta(\alpha) = 0,$$

worin F, Φ, Ψ, θ und μ beliebige Functionen sind und α durch seinen Werth aus

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

zu ersetzen ist, auf Quadraturen reduciren kann. T.

F. CASORATI. Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e di primo grado per mezzo di funzioni lineari. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 804-807.

Wenn die Differentialgleichung 1ter Ordnung

$$(1) \qquad \alpha(xy)dx+\beta(xy)dy = 0,$$

wo α und β ganze rationale Functionen n^{ten} Grades von x, y sind, in algebraischer Form allgemein integrirbar ist, so kann das Integral stets auf die Form

$$a(xy)+\omega b(xy) = 0$$

gebracht werden, wo a und b ebenfalls ganze rationale Functionen sind, (ω eine Constante). Der Verfasser stellt sich nun die allgemeinere Aufgabe, die Bedingungen zu erforschen, unter welchen das allgemeine Integral von (1) die Form

$$(2) \qquad \psi_1^{m_1}\psi_2^{m_2}\dots\psi_r^{m_r} = \text{Const.}$$

annehmen kann, worin ψ_1, ψ_2 ... ganze rationale Functionen von x, y und m_1, m_2 ... beliebige, auch incommensurable Zahlen bezeichnen. Es gilt dann für jedes ψ die Identität:

$$\alpha\frac{\partial\psi_s}{\partial y}-\beta\frac{\partial\psi_s}{\partial x} = \psi_s\varphi_s,$$

wo φ_s eine ganze Function $(n-1)^{ten}$ Grades von x, y bedeutet. In dem einfachen Fall, dass alle ψ linear sind, auf den sich die vorliegende Untersuchung beschränkt, erhält man die Zerlegung

$$(3) \qquad \alpha(xy).\lambda-\beta(xy) = (x+\lambda y+\mu)\varphi(xy),$$

wo λ und μ constant sind.

Die $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Gleichungen, in welche die vorstehende Identität zerfällt, führen zunächst zu einer Gleichung $(n+1)^{ten}$

Grades für λ, die Coefficienten in φ sowie μ lassen sich rational durch λ ausdrücken, und die Elimination dieser Grössen ergiebt $n-1$ Bedingungsgleichungen für jede Wurzel λ, welche die Coefficienten in α und β erfüllen müssen, damit die Zerlegung (3) möglich sei. Umgekehrt wird gezeigt, dass, wenn diese Zerlegung auf $n+1$ Arten Statt hat, das allgemeine Integral von (1.) die Form (2.) annimmt. Für den Fall $n=2$, den der Verfasser besonders betrachtet, wird bemerkt, dass die Jacobi'sche Gleichung

$$A(xdy-ydx)+Bdx+Cdy=0,$$

wo A, B, C ganze Functionen ersten Grades von x, y sind, einen Ausnahmefall darstellt, indem die cubische Gleichung für λ wegen des Verschwindens sämmtlicher Coefficienten zur Bestimmung von λ unbrauchbar wird. Doch wird diese Besonderheit nicht näher discutirt. Literarisch sei hier beigefügt, dass eine derartige Untersuchung über die Integrirbarkeit algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form (2.) bereits von Herrn Rosanes (Clebsch Ann. III. 535, s. F. d. M. III. 140) und für den Fall $n=2$ in ausführlicher Weise von Herrn Winckler (Wien. Ber. LXIV. p. 247, s. F. d. M. III. 146) angestellt ist, welcher letztere nicht nur die Jacobi'sche Gleichung, sondern alle bemerkenswerthen Specialfälle einer eingehenden Betrachtung unterzogen hat. Hr.

F. Casorati. Ricerche sulle equazioni algebrico-differenziali. Brioschi Ann. (2) IX. 41-54, 106-119.

Es handelt sich um die Bedingungen, welche eine Integralgleichung

$$f(\omega)=a\omega^m+b\omega^{m-1}+\cdots+s\omega+t=0,$$

worin ω eine Constante und $a, b\ldots s, t$ ganze Functionen n^{ten} Grades von u und v bezeichnen, erfüllen muss, damit der Grad der resultirenden Differentialgleichung 1ter Ordnung, der im Allgemeinen $m(2n-1)$ sein wird, sich erniedrige. Den Gang der Untersuchung sowie einen Theil der Resultate hat der Verfasser bereits in den Rend. Ist. Lomb. (2) X. 770-775, (vgl. F. d. M. IX. 229) mitgetheilt. Unter Bezugnahme auf das bezügliche Re-

ferat bemerken wir, dass in der vorliegenden Arbeit noch die beiden Fälle ausführlich discutirt werden, in denen die Gleichung

$$\overset{n}{a}x^m+\overset{n}{b}x^{m-1}+\overset{n}{s}x+\cdots+\overset{n}{t}=0$$

lauter einfache oder auch doppelte Wurzeln hat. Hr.

N. Alexéieff. Sur l'intégration de l'équation
$$Ay'^2+Byy'+Cy^2+Dy'+Ey+F=0.$$
C. R. LXXXVII. 641-643.

Vorstehende Gleichung, in welcher die Coefficienten Functionen von x sind, wird durch die Substitutionen $y=e^{\int p_1 dx}.u$, wo p_1 eine Wurzel der Gleichung $Ap^2+Bp+C=0$ bedeutet, in die Gleichung $u=f(x,u')$ umgeformt, in welcher f eine rationale gebrochene Function 2ten Grades in u' ist. Ihre Differentiation ergiebt

$$(1)\qquad \left(u'-\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx-\frac{\partial f}{\partial u'}du'=0,$$

also eine Gleichung 1ten Grades und 1ter Ordnung in rationaler Form in Beziehung auf u'. Ist das allgemeine Integral derselben $F(x,u')=C$, so findet man u durch Elimination von u' zwischen dieser Gleichung und $u=f(x,u')$ und hieraus die der Wurzel p_1 entsprechende Lösung y der vorgelegten Gleichung. Im Falle dass

$$f=\frac{X}{u'}\pm\frac{u'}{X},$$

(X beliebige Function von x) erhält man als Integral von (1)

$$2\int Xdx=\frac{X^2}{u'^2}\mp\log\frac{X^2}{u'^2}+C.$$

Hr.

Halphén. Sur la réduction de certaines équations différentielles du premier ordre à la forme linéaire par rapport à la dérivée de la fonction inconnue.
C. R. LXXXVII. 741.

Die merkwürdige Eigenschaft der von Herrn Alexéieff (S. vorstehendes Referat) untersuchten Differentialgleichung, in ein

Gleichung 1ten Grades in u', mit Beibehaltung der rationalen Form in Beziehung auf u transformirbar zu sein, gehört, wie der Verfasser zeigt, allen Gleichungen zwischen x, y, y' an, welche sich in der Form darstellen lassen

$$x = u(\xi, \eta), \quad y = v(\xi, \eta), \quad y' = w(\xi, \eta),$$

wo u, v, w in Beziehung auf η rational sind. Die ursprüngliche Differentialgleichung geht nämlich alsdann über in die Gleichung

$$w\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + w\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$

welche in $\frac{\partial \eta}{\partial \xi}$ linear und in η rational ist. Betrachtet man x, y, y' als Coordinaten eines Punktes im Raume, so dass die Differentialgleichung eine Oberfläche darstellt, so enthält in dem vorliegenden Falle diese Fläche eine Schaar unicursaler Curven. Sind u, v, w nicht blos in Beziehung auf η, sondern auch in Beziehung auf ξ rational, dann ist die betrachtete Fläche auf der Ebene darstellbar, und die entsprechende Differentialgleichung ist nicht blos in η, sondern auch in ξ rational. Da nun jede Oberfläche 3ten Grades auf einer Ebene darstellbar ist, so folgt, dass jede Differentialgleichung 3ten Grades in x, y, y' auf eine Gleichung 1ten Grades in Beziehung auf die Derivirte der unbekannten Function mit Beibehaltung der rationalen Form in Beziehung auf die unbekannte Function und die unabhängige Variable reducirbar ist. Hr.

H. Poincaré. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. J. de l'Ec. Polyt. XXVIII. 19-26.

Die Herren Briot und Bouquet haben in ihren berühmten Untersuchungen über die Eigenschaften der Functionen, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen definirt sind, gezeigt, dass, wenn der Differentialquotient aufhört, eine holomorphe Function von x und y zu sein, zwei Fälle auftreten können: 1) y ist eine holomorphe Function von x oder $x^{\frac{1}{n}}$ (n eine ganze Zahl), 2) y bietet complicirtere Singularitäten dar. Im letzteren Falle lässt sich die Differentialgleichung auf 3 verschiedene Formen zurück-

führen, unter denen die genannten Mathematiker besonders eingehend die folgende betrachten:

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0 \quad \text{für } x = 0, \quad y = 0,$$

wo $f(xy)$ holomorph in x und y ist. Sie beschränken sich jedoch darauf, die Bedingungen anzugeben, unter welchen auch hier noch holomorphe Integrale existiren, ohne sich auf das Studium der nicht holomorphen Integrale einzulassen. Herr Poincaré sucht nun diese Lücke zu ergänzen, indem er folgende Sätze beweist:

I. Wenn für $x = 0$, $y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda,$$

wo λ nicht eine positive ganze Zahl, und der reelle Theil von λ positiv ist, dann lässt sich jede durch die Differentialgleichung (1) definirte Function y, die mit x verschwindet, in der Umgebung von $x = 0$ nach ganzen positiven Potenzen von x und x^λ entwickeln. Der Convergenzbezirk ist durch einen Kreis und eine logarithmische Spirale gleichzeitig begrenzt und es ist bemerkenswerth, dass die Reihe für einen der Werthe, die x^λ für einen bestimmten Werth von x annimmt, convergent sein kann, ohne es für die anderen Werthe von x^λ zu sein. Die Reihe enthält noch als willkürlichen Parameter den Coefficienten von x^λ, von welchem alle Glieder der Reihe ganze Functionen sind.

II. Ist für $x = 0$, $y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1,$$

auf welchen Fall der, wo $\frac{\partial f}{\partial y}$ gleich einer positiven ganzen Zahl ist, leicht zurückgeführt werden kann, dann existirt in der Umgebung von $x = 0$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x und $x\log x$ fortschreitende Reihe für y, die der Differentialgleichung (1) genügt und für $x = 0$ verschwindet. Der Convergenzbereich ist durch die Bedingungen gegeben:

$$\operatorname{mod} x < \varphi, \quad \operatorname{mod}(x\log x) < \varphi_1.$$

Der willkürliche Parameter ist hier der Coeficient von x, von dem ebenfalls alle Glieder der Reihe ganze Functionen sind.

Hr.

E. Picard. Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques. C. R. LXXXVII. 430-432, 743-745.

Anschliessend an die Untersuchungen der Herren Briot und Bouquet, über die Form der Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung, in der Umgebung der Werthe der Variablen, für welche der Differentialquotient unbestimmt wird, stellt sich der Verfasser die analoge Aufgabe für die Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$zv'' = f(v\, v'\, z),$$

wo $f(v, v', z)$ für $z = 0$, $v = 0$, $v' = 0$ verschwindet, und in der Umgebung dieser Werthe in eine Reihe der Form

$$av + bv' + cz + \cdots$$

sich entwickeln lässt. Es wird gezeigt, dass wenn b nicht eine positive ganze Zahl ist, diese Gleichung ein holomorphes Integral in der Umgebung von $z = 0$ hat, welches nebst seiner Ableitung für $z = 0$ verschwindet. Ist ferner der reelle Theil von b positiv, so lässt diese Gleichung noch unendlich viele nicht holomorphe Integrale zu, die nebst ihren Derivirten für $z = 0$ verschwinden. Ist hingegen der reelle Theil von b negativ, so hat die Gleichung kein Integral der vorerwähnten Beschaffenheit. Endlich wird noch der Fall $b = 0$ behandelt. Ist $c = 0$, so lässt die Gleichung unendlich viele holomorphe Integrale zu, die nebst ihrer Derivirten für $z = 0$ verschwinden. Ist c von Null verschieden, so erhält man ein System von Integralen in der Form von Reihen, die nach wachsenden Potenzen von $z' \log z'$ und $\frac{1}{\log z'}$. $(z' = \sqrt{z})$ fortschreiten.

Hr.

A. Starkoff. Zur Frage über die Integration linearer Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Odessa. H. Ulrich.

Es wird zunächst gezeigt, wie jede lineare Differentialgleichung von der Form

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0$$

in das System von n simultanen Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{dy}{dz} + Q_1 z = 0, \quad \frac{dz}{dx} + Q_2 v = 0 \cdots \frac{dt}{dx} + Q_n y = 0$$

zerlegt werden kann; die Coefficienten Q_1 $Q_2 \ldots$ werden durch successive Integration von linearen Differentialgleichungen $(n-1)^{ter}$, $(n-2)^{ter}$ Ordnung etc. gefunden. Das allgemeine Integral von (1) wird dann durch

$$\varphi = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x)$$

gegeben, wo

$$f_s(x) = \int Q_1\, dx \int Q_2\, dx \ldots \int Q_{s-2}\, dx \int Q_{s-1}\, dx$$

$$+ (-1)^n \int Q_1\, dx \int Q_2\, dx \ldots \int Q_n\, dx \int Q_1\, dx \int Q_2\, dx \ldots \int Q_{s-2}\, dx \int Q_{s-1}\, dx$$

$$+ (-1)^{2n} \int Q_1\, dx \ldots \int Q_n\, dx \int Q_1\, dx \ldots \int Q_n\, dx \int Q_1\, dx \ldots \int Q_{s-1}\, dx + \text{in inf.}$$

Die Convergenz dieser unendlichen Reihen, deren Glieder aus vielfachen Integralen mit immer wachsender Anzahl derselben gebildet sind, besteht für alle Werthe von x, für welche keines von den Q unendlich wird. Bedenkt man, dass die Q selbst aus linearen Differentialgleichungen, wenn auch niederer Ordnung zu bestimmen sind, also nach dem Verfasser durch ähnliche unendliche Reihen darzustellen sind, so ersieht man, dass eine unmittelbare Anwendung dieses Integrationsverfahrens nur bei den Differentialgleichungen 2ter Ordnung thunlich ist, wo die Q als von einer Differentialgleichung erster Ordnung abhängig, durch blosse Quadraturen bestimmt werden können. Die Beispiele jedoch, an denen der Herr Verfasser die Rechnung ausführt, sind derartig gewählt, dass man zu den Resultaten viel einfacher durch die Methode der Reihenentwickelung nach steigenden Potenzen von x gelangt. Hierbei findet sich die seltsame Bemerkung, dass die Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - x^2 y = 0$$

nur ein particuläres Integral besitze (p. 56).

Sind die Q einander gleich, dann führt die Substitution $u = \int Q dx$ auf die einfache Gleichung $\frac{d^n y}{du^n} + (-1)^{n-1}\, y = 0$.

Für Gleichungen mit constanten Coefficienten werden die Q von der Form

$$Q_1 = e^{a_{n-1}x}, \quad Q_2 = e^{a_{n-2}x} \ldots,$$

worin a_{n-1}, a_{n-2}, etc. Wurzeln von Gleichungen resp. $n-1^{\text{ten}}$, $n-2^{\text{ten}}$ etc. Grades sind. Da andererseits die Integrale einer solchen Differentialgleichung als Exponentialgrössen e^{zx} bekannt sind, worin z eine Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades ist, so erhält man durch Anwendung der Integrationsmethode des Herrn Verfassers die Wurzel einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades, ausgedrückt als Function der Wurzeln eines Systems algebraischer Gleichungen niedrigerer Grade in Form einer aus vielfachen Integralen mit wachsender Zahl von Integralzeichen bestehenden unendlichen Reihe.

Zum Schluss wird der Ausdruck für das allgemeine Integral einer Differentialgleichung mit zweitem Gliede entwickelt.

Hr.

E. Sabinine. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. Darboux Bull. (2) II. 284-292.

Die im Vorhergehenden besprochene Arbeit des Herrn Starkoff giebt dem Verfasser Veranlassung die Cauchy'sche Methode der Integration eines Systems von Differentialgleichungen durch Reihen vermittelst successiver Substitutionen zu reproduciren, um daran zu zeigen, dass die erwähnte Arbeit nur eine Anwendung der Cauchy'schen Methode enthält. Zugleich rügt er die mangelhafte Strenge in einigen Beweisen; unter Anderen vermisst er den Beweis, dass die im Ausdruck des allgemeinen Integrals y auftretenden particulären Integrale von einander unabhängig sind.

Hr.

E. Sabinine. Zu dem Mémoire von Cauchy: Sur l'intégration des équations différentielles. (Russisch). Mosk. Math. Samml. IX.

P.

Pepin. Sur les équations différentielles du second ordre. Brioschi Ann. (2) IX. 1-11.

Zweck dieser Arbeit ist die Berichtigung einiger Irrthümer, welche sich in der vom Herrn Verfasser im Jahre 1863 in den Tortolini Ann. V. p. 185 veröffentlichten Arbeit befinden und zu falschen Resultaten geführt hatten. Vgl. Fuchs, Sur les équations linéaires du second ordre C. R. LXXXII. u. LXXXIII. (F. d. M. VIII. 188.) Sie betreffen die Theoreme 14, 15 und 16, welche durch andere mit Hinzufügung der erforderlichen Beweise ersetzt.

Hr.

L. Fuchs. Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen. Borchardt J. LXXXV. 1-26.

Die Frage, unter welchen Umständen eine lineare Differentialgleichung 2[ter] Ordnung algebraische Integrale besitze, ist vom Verfasser in der wichtigen in Borchardt's J. LXXXI. p. 97, (vgl. F. d. M. VII. 172) erschienenen Arbeit, die der Ausgangspunkt einer Reihe, seitdem von den Herren Klein, Jordan, Brioschi. Gordan veröffentlichten Abhandlungen geworden ist, zum ersten Male gelöst worden. Es gelang dies durch Einführung des Begriffs der Primformen, unter welchen ganze Functionen zweier unabhängiger Particularlösungen y_1, y_2 verstanden werden, die Wurzeln einer rationalen Function der unabhängigen Variablen sind und nicht weiter in Formen derselben Eigenschaft zerlegt werden können. Es zeigte sich, dass die Primformen niedrigsten Grades den 12[ten] Grad nicht überschreiten können, und dass nur eine begrenzte Zahl derselben vorhanden sei. Der Verfasser stellte die niedrigsten Primformen in einer Tabelle zusammen, die inzwischen von Herrn Klein einer Reduction unterworfen worden ist. In der vorliegenden Arbeit giebt nun der Verfasser eine vollständige Theorie der Primformen, indem er nicht blos die Primformen niedrigsten Grades, sondern die Gesammtheit derselben in Betracht zieht, und gewinnt dadurch eine natürliche Grundlage für alle auf die hier untersuchten Differential-

gleichungen bezüglichen Fragen. Zunächst wird gezeigt, dass der Grad N der niedrigsten Primformen, wenn derselbe grösser als 4 ist, nur die Zahlen 6 und 12 annehmen kann.

Im Falle $N = 6$ genügen die Integrale y einer Gleichung 48ten Grades, in der nur 8te Potenzen von y vorkommen, und wenn die Form $y_1 y_2 (y_1^4 + y_2^4)$ mit f_6, ihre Hesse'sche Covariante mit $H(f_6)$ und die Functionaldeterminante (f_6, H) mit φ_{12} bezeichnet wird, so giebt es ausser f_6, $H(f_6)$, φ_{12} und den unendlich vielen Primformen 24ten Grades, die in der Form $H(f_6)^3 + \lambda f_6^4$ enthalten sind, keine anderen Primformen. Für $N = 12$ genügen die Integrale y einer Gleichung 120ten Grades, die nur 10te Potenzen von y enthält, und sämmtliche Primformen werden dargestellt durch

$$f_{12}, \quad H(f_{12}), \quad (f_{12}, H) = \varphi_{30}$$

und die unendlich vielen Primformen 60ten Grades, die in der Form $H(f_{12})^3 + \lambda f_{12}^5$ enthalten sind, wo

$$f_{12} = y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10}).$$

Ist ferner $N = 4$, so wird die Differentialgleichung entweder durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, oder man erhält als einzige Primformen 4ten Grades: $f_4 = y_1(y_1^3 + y_2^3)$ und $H(f_4)$; ausser diesen giebt es noch eine Primform 6ten Grades (f_4, H) und unendlich viele Primformen 12ten Grades, dargestellt durch die Form $H(f_4)^3 + \lambda f_4^3$; die Integrale y genügen einer Gleichung 24ten Grades, die nur 6te Potenzen von y enthält. Die Coefficienten der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln der Differentialgleichung genügen, werden vermittelst einer Function χ ausgedrückt, die für $N = 6$ die Quadratwurzel, für $N = 4$ die Cubikwurzel einer rationalen Function, für $N = 12$ eine rationale Function der unabhängigen Variablen x ist; ihre Bestimmung erfolgt dadurch, dass sie einer linearen homogenen Differentialgleichung resp. der 5ten, 7ten oder 13ten Ordnung zu genügen hat. Endlich werden 3 verschiedene Beweise des vom Verfasser in seiner früheren Arbeit bewiesenen Satzes gegeben, dass die Nenner der Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen, wenn $N > 2$, kleiner als 10 sein müssen, mit der näheren Bestimmung, dass

dieser Nenner für $N = 4$ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6; für $N = 6$ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 8 und für $N = 12$ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 sein müsse. Hr.

L. Fuchs. Sur les équations différentielles linéaires, qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques. Liouville J. (3) IV. 125-141.

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung habe ein Fundamentalsystem von eindeutigen Integralen

$$y_i = f_i(x) \quad i = 1, \dots n,$$

die den Gleichungen

$$f_i(x+2K) = \mu_i f_i(x), \quad f_i(x+2K'i) = \mu'_i f_i(x)$$

genügen, so ist leicht zu zeigen, dass die Coefficienten der Differentialgleichung eindeutige doppeltperiodische Functionen von x sein müssen. Handelt es sich insbesondere um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche unbeschadet der Allgemeinheit auf die Form $y'' = Py$ gebracht werden kann, so findet sich für die Existenz eines Integrales $\mathfrak{F}(x)$ derselben von obiger Beschaffenheit mit der näheren Bestimmung, dass dasselbe in den singulären Punkten nur von einer endlichen Ordnung unendlich werden soll, folgende nothwendige und hinreichende Bedingung

$$P = s + \sum_i A_i D_x \log H(x-a_i) + B_i D_x^2 \log H(x-a_i)$$

$$A_i = 2r_i R_i \quad B_i = r_i - r_i^2,$$

wo r_i eine ganze Zahl, s eine Constante und

$$R_i = \sum_l{}' r_l D_x \log H(x-a_l)_{x=a_i},$$

das Zeichen Σ ferner auf alle singulären Punkte a_i, $\sum\limits_l{}'$ sich auf alle a_l ausser a_i erstreckt. Man hat alsdann

$$y_1 = \mathfrak{F}(x) = e^{\delta x+\delta'} \prod_i H(x-a_i)^{r_i}$$

(δ und δ' Constante); eine zweite Lösung ist

$$y_2 = \mathfrak{F}(x) \int \frac{dx}{F(x)^2}.$$

Soll die letztere auch eindeutig sein, so muss der Coefficient von $(x-a)^{-1}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{F(x)^2}$ nach steigenden Potenzen von $x-a$ gleich Null sein.

Von diesen allgemeineren Ergebnissen wird eine Anwendung auf die Lamé'sche Gleichung

$$y'' = (n(n+1)k^2\sin^2\mathrm{am}\,x+h)y$$

gemacht. Für den besonderen Fall $n=1$ werden vom Verfasser bei dieser Gelegenheit die Rechnungen angegeben, die zu den in einem Briefe an Herrn Hermite vom 30. October (C. R. LXXXV. 947, s. F. d. M. IX. p. 348) veröffentlichten Resultaten betreffs der Werthermittelung des 2ten Integrals führen. Den Schluss der Arbeit bildet ein kurzer Auszug der oben besprochenen zuerst in den Gött. Nachr. 1877 erschienenen Arbeit des Verfassers.

Hr.

L. Fuchs. Ueber eine Klasse von Differentialgleichungen, welche durch Abel'sche oder elliptische Functionen integrirbar sind. Gött. Nachr. 1878. 19-33; Brioschi Ann. (2) IX. 25-35.

Herr Hermite hat in einer Folge von Abhandlungen, die 1877. C. R. LXXXV. (s. F. d. M. IX. 349) erschienen sind, die Lamé'sche Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = (n(n+1)k^2\sin^2\mathrm{am}\,x+h)y$$

für beliebige Werthe von h zu integriren gelehrt, während Lamé selbst und später Herr Heine, der die Lamé'schen Functionen zum Gegenstande eingehender Untersuchungen machte (Borchardt's J. LX. 252), sich darauf beschränkt hatten, nur solche Werthe von h in Betracht zu ziehen, für welche die Differentialgleichung durch doppeltperiodische Functionen integrirbar ist. Transformirt man die Gleichung (1) durch die Substitution

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{R(z)},\quad R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

so erhält man

$$(2)\qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2}+\tfrac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz}-[n(n+1)k^2z^2+h]u = 0.$$

Herr Fuchs weist nun darauf hin, dass er in seiner in Borchardt's J. LXXXI. erschienenen Arbeit „Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen" (s. F. d. M. VII. 172) eine Klasse von linearen Differentialgleichungen durch Abel'sche oder elliptische Functionen integrirt hat, wovon nicht nur die Gleichung (2), sondern auch diejenigen Differentialgleichungen, welche Herr Heine den Lamé'schen Functionen höherer Ordnung zu Grunde gelegt hat, besondere Fälle sind. Die hier zu betrachtende, der erwähnten Klasse angehörige Gleichung ist:

$$(3)\qquad R(z)\frac{d^2u}{dz^2}+\tfrac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz}+H(z)u=0,$$

wo $R(z)$ und $H(z)$ ganze Polynome von den Graden m und $m-2$ sind, und ausserdem $H(z)$ so bestimmt ist, dass die Differentialgleichung 3[ter] Ordnung

$$(4)\qquad R\frac{d^3w}{dz^3}+\tfrac{3}{2}R'\frac{d^2w}{dz^2}+\tfrac{1}{2}(R''+4H)\frac{dw}{dz}+2H'(w)=0,$$

der das Product zweier Lösungen von (3) genügt, durch eine ganze rationale Function $G(z)$ vom Grade $2n$ befriedigt wird; die Coefficienten von $H(z)$ ergeben sich hierdurch sämmtlich als Functionen eines derselben, welcher willkürlich bleibt und man erhält als Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (3)

$$u_1=G^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},\quad u_2=G^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},$$

wo λ eine Constante, die dadurch bestimmt ist, dass für jeden Nullwerth b von G

$$G'(b)^2R(b)=-\lambda$$

ist. Durch Einführung der Abel'schen Functionen lassen sich daher u_1, u_2 durch Thetafunctionen mit ϱ Argumenten darstellen, wenn $m=2\varrho+1$ oder $2\varrho+2$ ist. Wenn $\lambda=0$ ist, dann genügt $\sqrt{G}$ der Differentialgleichung (3), und die Bedingung dafür ergiebt eine algebraische Gleichung für den einen im allgemeinen Falle noch willkürlich verbleibenden Coefficienten in $H(z)$. In dem besonderen Falle der Gleichung (2), für den die Rechnungen ausgeführt werden, zeigt sich der bemerkenswerthe Umstand, dass

der Gleichung (4) für jeden Werth von h eine ganze rationale Function $G(s)$ $2n^{ten}$ Grades genügt, und es ergeben sich für die Integrale der Lamé'schen Gleichung (1) Ausdrücke in Thetafunctionen, die für $n=1$ mit den von Herrn Hermite gegebenen (l. c. p. 826) übereinstimmen. Hr.

F. Brioschi. Sur l'équation de Lamé. C. R. LXXXVII. 313-315.

F. Brioschi. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Brioschi Ann. (2) IX. 11-21.

Sind y_1, y_2 zwei particuläre Lösungen der Differentialgleichung

$$y''+py'+qy=0$$

und $f(y_1, y_2)$ eine binäre Form der Ordnung m mit constanten Coefficienten, dann ist, wenn

$$f(y_1, y_2)=F(x)$$

gesetzt wird, die Hesse'sche Covariante

$$h(y_1 y_2)=\frac{e^{2\int p\,dx}}{m^2(m-1)C^2}\,[mFF''-(m-1)F'^2+mpFF'+m^2qF^2],$$

wo C die durch die Gleichung

$$y_2y_1'-y_1y_2'=Ce^{-\int p\,dx}$$

bestimmte Constante bedeutet. In dem besonderen Falle

$$f(y_1 y_2)=y_1y_2$$

und wenn man setzt

$$p=\frac{\varphi'(x)}{2\varphi(x)},\quad q=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

(φ und ψ Polynome in x von den Graden s, $s-2$) geht diese Gleichung über in

$$(1)\qquad 0=C^2+\varphi(x)(2FF''-F'^2)+\varphi'(x)FF'+4\psi(x)F^2,$$

deren Ableitung nach x auf die auch von den Herren Fuchs und Hermite (s. die vorhergehenden Referate), behandelte Differentialgleichung 3ter Ordnung für y_1y_2 führt. Die Gleichung (1) wird,

wie in der Hermite'schen Arbeit zur Bestimmung von C benutzt. Die Bedingung, dass F eine ganze Function n^{ten} Grades sein soll, bestimmt, wenn φ gegeben ist, die Coefficienten von ψ als Functionen eines derselben. Es werden nun die besonderen Fälle betrachtet:

$$\varphi(x) = x(1-x) \quad \text{und} \quad \varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

Im ersten Falle wird die betreffende Differentialgleichung eine Gauss'sche, in der

$$\alpha = \frac{n}{2}, \quad \beta = -\frac{n}{2}, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}$$

ist; ihre Integrale sind algebraisch. Im 2ten Falle erhält man die Lamé'sche Gleichung. Der Verfasser betrachtet hierauf den allgemeinen Fall, dass $(y_1 y_2)^r$ eine ganze Function n^{ten} Grades ist und setzt demgemäss in (1)

$$m = 2r \quad f(y_1 y_2) = (y_1 y_2)^r.$$

Wie aus einem Satze des Herrn Fuchs (Borchardt's J. LXXXII. p. 117, s. F. d. M. VII. 172) a priori hätte ersehen werden können, ergiebt sich, dass alsdann bereits $(y_1 y_2)^2$ eine ganze Function sein muss, und zwar ist, wenn n ungrade ist,

$$y_1 y_2 = P(x)\sqrt{x-\xi},$$

(ξ eine Wurzel von $\varphi(x)=0$, $P(x)$ ein Polynom vom Grade $\frac{n-1}{2}$), während ein grades n auf den zu Anfang betrachteten Fall zurückführt. Für

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

wird

$$\psi(x) = -\frac{n(n+2)}{4}\,x + \frac{n-1}{2}\,a,$$

und die betreffende Differentialgleichung hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass ihre Integrale algebraisch sind. Setzt man $n=1$, so gelangt man zu einer Gleichung, von der die von Herrn Schwarz in Borchardt's J. LXXV. 325 (s. F. d. M. V. p. 249) discutirte ein specieller Fall ist.

Zum Schluss wird folgender Satz bewiesen: Es sei

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad \varphi(t) = 4t^3 - G_2 t - G_3$$

und t eine Function, welche der Transformationsgleichung der

elliptischen Functionen

$$\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} = \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

genügt, dann geht die Gleichung

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y' + \frac{\alpha(t)x+\beta}{\varphi(x)}y = 0$$

über in die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\frac{dy}{dt} + \frac{\alpha t+\beta}{\varphi(t)}y = 0,$$

welche, wenn α und β passend gewählt sind, zu der oben behandelten Klasse gehört. Jeder Ordnung der Transformation entspricht daher eine Differentialgleichung, deren Integration auf die der Gleichung (2) zurückgeführt werden kann. Hr.

F. Brioschi. Sur une équation différentielle du troisième ordre. Proc. of London XXVII. 126-128.

Die Gleichung entsteht aus der folgenden von der 2[ten] Ordnung:

$$\frac{d^2y}{du^2} = [\frac{1}{4}n(n+2)k^2\sin^2u + h]y_2.$$

Setzt man nämlich η für die Quotienten zweier particulärer Integrale, so heisst die Gleichung der 3[ten] Ordnung:

$$\{\eta, u\} + 2[\frac{1}{4}n(n+2)k^2\sin^2u + h] = 0,$$

wo $\{\eta, u\}$ die Schwarz'sche Derivirte:

$$\frac{d^2}{du^2}\log\frac{d\eta}{du} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{du}\log\frac{d\eta}{du}\right)^2$$

bezeichnet. Das Integral ergiebt sich mit Hülfe einer hypergeometrischen Reihe. Cly. (O.)

Ch. Hermite. Sur l'équation de Lamé. Brioschi Ann. (2) IX. 21-24.

Setzt man in der Lamé'schen Differentialgleichung (s. p. 233) $m^2x = t$, so geht sie über in

$$(1) \qquad 2Ay'' + A'y' = By,$$

wo

$$A = t(1-t)(1-k^2t), \quad 2B = n(n+1)k^2t+h.$$

zu setzen ist. Das Product zweier particulärer Lösungen derselben genügt der Differentialgleichung 3ter Ordnung:

$$(2) \qquad 2Az'''+3A'z''+A''z' = 4Bz'+2B'z.$$

Differentiirt man dieselbe p mal nach x, so ergiebt sich sofort, dass $z^{(p)} = \text{Const.}$ für $p = n$ ein Integral der neuen Gleichung ist. Die Gleichung (2) hat somit eine ganze Function n^{ten} Grades $F(t)$ zum Integral. Aus den beiden Gleichungen $y_1 y_2 = F(t)$ und

$$y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_2}{dt} = \frac{C}{\sqrt{A}}$$

(C eine Constante) erhält man leicht als particuläre Lösungen von (1)

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{C}{\sqrt{A}.F(t)}\right]dt},$$

$$y_2 = e^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{C}{\sqrt{A}.(Ft)}\right]dt}.$$

Diese Ausdrücke sind eine Verallgemeinerung der von Herrn Brioschi (C. R. LXXXV. 1160, s. F. d. M. IX. 239) für den Fall $n = 1$ gegebenen Lösungen. Wir bemerken, dass gleichzeitig Herr Fuchs nicht nur zu demselben Resultat gelangt ist, sondern auch die wahre Quelle desselben entdeckt hat, indem er allgemein die Bedingungen, unter welchen die Gleichung (1) Lösungen obiger Form zulässt, ermittelte (S. oben). Für den Werth von C ergiebt sich in Uebereinstimmung mit dem von Herrn Fuchs für λ gegebenen Werthe $C = F'^2(\tau)A(\tau)$ für jeden Nullwerth τ von $F(t)$, wobei zu beachten, dass $C^2 = -\lambda$. Nach Einführung von $t = sn^2(x)$ erhält der Verfassser alsdann für die Integrale y_1, y_2 dieselben Ausdrücke durch Thetafunctionen, wie sie Herr Fuchs in der angeführten Arbeit entwickelt hat. Hr.

D. R. Rocy y Torrers. Algunas consideraciones sobre la ecuazione de Lamé. Cron. cient. I. 457-459.

J. Tannery. Sur l'équation différentielle linéaire qui relie au module de la fonction complète de première espèce. C. R. LXXXVI. 811-812.

J. Tannery. Sur quelques propriétés des fonctions complètes de première espèce. C. R. LXXXVI. 950-953.

Die Differentialgleichung, welche die vollständigen elliptischen Integrale als Functionen des Moduls darstellt, hat Herr Fuchs in seiner Abhandlung: „Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Functionen als Functionen eines Parameters aufgefasst" (Borchardt's J. LXXI. 91, siehe F. d. M. II. p. 248) untersucht und ihre Eigenschaften aus den allgemeinen Resultaten abgeleitet, die er in Betreff der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erhalten hatte. Der Verfasser beschränkt sich auf die Untersuchung der erwähnten speciellen Differentialgleichung, die er auf die Form bringt:

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}-(1-2x)\frac{dy}{dx}+\tfrac{1}{4}y=0.$$

Er bestimmt die Fundamentalsysteme der Integrale in einer grösseren Anzahl von Bereichen, die in einander übergreifen, und stellt die linearen Relationen auf, welche zwischen den verschiedenen Gruppen der Lösungen existiren. Hierdurch ist man im Stande für einen beliebig vorgeschriebenen Weg, der nicht durch die singulären Punkte 0 und 1 geht, den Endwerth der Lösung anzugeben, wenn der Werth im Anfange des Weges fixirt ist. Für den Fall, dass x reell ist, werden folgende Sätze festgestellt: Es sei:

$$\varphi(x)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}a_\mu x^\mu \qquad \psi(x)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}a_\mu b_\mu x^\mu,$$

wo

$$a_\mu=\left(\frac{1.3.5\ldots 2\mu-1}{2.4.6\ldots 2\mu}\right)^2,\quad a_0=1,$$

$$b_\mu=1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2\mu-1}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\cdots-\frac{1}{2\mu},$$

φ und ψ convergente Reihen innerhalb des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius 1 sind. Setzt man nun die Function $\varphi(x)$

für Werthe von $x < -1$ durch die Function

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

fort, so erhält man eine continuirliche Function, welche von 0 bis ∞ wächst, wenn x von $-\infty$ bis 1 zunimmt. Die Function $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ wächst in demselben Intervalle des Arguments beständig von $-\infty$ bis log2, falls $\psi(x)$ für Werthe von $x < -1$ durch

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[\psi\left(\frac{x}{x-1}\right)-\tfrac{1}{4}\log(1-x)\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$$

fortgesetzt gedacht wird. Wächst x von 0 bis 1, so wächst $\frac{Q}{P}$ von $-\infty$ bis 4log2, wo

$$P = \varphi(x), \quad Q = 4\psi(x)-\varphi(x)\log x$$

ein Lösungssystem der Differentialgleichung darstellen; die Wurzel der Gleichung $Q = 0$ liegt zwischen 0 und 1. Hr.

S. Spitzer. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Wien, Gerold.

Die Vorlesungen reihen sich dem Inhalte nach den in den Jahren 1860, 1861, 1862 und 1874 publicirten „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen" desselben Verfassers an. (Vgl. F. d. M. VI. 214.) Sie sind in 3 Abschnitte getheilt. Der erste ist der Integration der Differentialgleichung

$$(1) \qquad (a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = 0$$

gewidmet, in der 4 Specialfälle unterschieden werden, je nachdem die Zerlegung des Bruches

$$\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+b_1u+b_0}$$

in einer der folgenden Formen stattfindet:

$$1)\quad m+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta}, \qquad 2)\quad m+\frac{A}{(u-\alpha)^2}+\frac{B}{u-\alpha},$$

$$3)\quad m+nu+\frac{A}{u-\alpha}, \qquad 4)\quad a_2u^2+a_1u+a_0.$$

Jeder dieser 4 Fälle wird in einem besonderen Capitel behandelt.

Der 2[te] Abschnitt enthält eine Sammlung von Beispielen, die sich auf die Integration der Gleichung (1) zurückführen lassen; wir heben unter ihnen die Integration der Riccati'schen Differentialgleichung hervor. Der 3[te] Abschnitt ist „Aphorismen aus dem Gebiete der Differentialgleichungen" betitelt; es finden sich in demselben mehrere kleine Arbeiten des Verfassers zusammengestellt, die er bisher nicht veröffentlicht hat. Das Buch ist mit einer Vorrede und einem Anhang versehen. In ersterer giebt der Verfasser eine Geschichte der Integration der Gleichung (1) seit Laplace, der zuerst ein Integrationsverfahren derselben gelehrt hat, und sucht namentlich das Verhältniss klar zu legen, in welchem die Arbeit des Verfassers zu denen seiner Vorgänger steht. Der Anhang ist gegen die Herren Winckler und Igel gerichtet und ist eine Fortsetzung der Polemik, über die zur Zeit in diesem Jahrbuch (VIII, 190) berichtet ist. Hr.

D. André. Note sur les développements des puissances de certaines fonctions. Bull. S. M. F. VI. 120-121.

Der Verfasser bemerkt, dass sich die von ihm C. R. LXXXIV. 1018—1020 (s. F. d. M. IX. 231) ermittelten Eigenschaften des in der Form einer nach positiven, ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihe dargestellten Integrals einer linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten auf jede ganze, positive Potenz desselben übertragen.

T.

P. Mansion. New demonstration of the fundamental property of linear differential equations. Messenger (2) VII. 188-189.

Beweis, dass wenn

$$(1)\qquad D^n y + A_1 D^{n-1} y + A_2 D^{n-2} y + \cdots + A_n y = 0$$

eine lineare Differentialgleichung ist, deren Coefficienten beliebige

Functionen von x sind, und wenn z eine Lösung dieser Gleichung ist, dann

$$(2)\quad \begin{cases} D^n y + A_1 D^{n-1} y + \cdots + A_n y \\ \qquad = (D^{n-1} y + C_1 D^{n-2} y + \cdots + C_{n-1})(Dy - \alpha y), \end{cases}$$

wenn

$$Dz - \alpha z = 0,$$

und dass umgekehrt aus 2) folgt, dass z eine Lösung von 1) ist.

Glr. (O.)

P. Mansion. New demonstration of the fundamental property of linear differential equations. Messenger (2) VII. 188-189.

P. Mansion. Extrait d'une lettre sur le même sujet. N. C. M. IV. 154-155.

Eine lineare Gleichung n^{ter} Ordnung in x und y lässt sich auf eine andere lineare Gleichung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung zwischen t und x zurückführen, indem man setzt:

$$y = z\int t\,dx,$$

wo z eine particuläre Lösung der Gleichung n^{ter} Ordnung ist. Die Gleichung in t lässt sich in eine andere Gleichung in u transformiren, die linear und von der Ordnung $(n-1)$ ist, durch die Substitution

$$u = zt = y' - \frac{z'}{2}y.$$

(S. F. d. M. IV. p. 151, VI. p. 205, VII. p. 193.) Mn. (O.)

J. W. L. Glaisher. Example illustrative of a point in the solution of differential equations in series. Messenger (2) VIII. 20-23.

Es ist bekannt, dass wenn man eine Lösung

$$A\left(x^\alpha + \frac{a_1}{b_1}x^{\alpha+1} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}x^{\alpha+2} + \cdots\right)$$

hat, und einer der Factoren in einem Zähler, z. B. a_r, ver-

schwindet, man dann die Reihe bei dem vorhergehenden Gliede enden kann und die so erhaltene endliche Reihe ein particuläres Integral ist, aber dass wenn man die Reihe fortsetzt, was dieser verschwindende Factor nicht hindert, und ein Factor im Nenner, z. B. $b_s (s > r)$ verschwindet, dann die Reihe mit dem Gliede x^{a+s} wieder beginnt und man ein anderes particuläres Integral

$$A' \frac{0}{0} \left(x^{a+s} + \frac{a_{s+1}}{b_{s+1}} x^{a+s+1} + \dots \right)$$

hat, wo $A' \frac{0}{0}$ durch eine neue willkürliche Constante B ersetzt werden kann. Dieser Umstand wird erläutert an den Lösungen der Differentialgleichung

$$x(1-4x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{(4p-6)x - p + 1\}\frac{du}{dx} - p(p-1)u = 0$$

in Reihen. Diese Gleichung wird in der That befriedigt durch

$$u = P = \{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-4x)}\}^p \quad \text{und} \quad u = Q = \{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4x}\}^p.$$

Wenn p eine ganze Zahl ist, endet die Reihe für $P+Q$. Aber weder die Reihe für P noch die für Q endet und beginnt wieder nach einer gewissen Zahl von Null-Gliedern.

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On the solution of a differential equation allied to Riccati's. Rep. Brit. Ass. 1878.

Der Verfasser beweist, dass, wenn

$$\frac{d^2u}{dx^2} - a^2 = \frac{i(i+1)}{x^2}u,$$

das vollständige Integral

$$u = A.(\text{Coeff. von } h^{i+1} \text{ in } e^{a\sqrt{x^2+hx}})$$
$$+ B.(\text{Coeff. von } h^{i+1} \text{ in } e^{-a\sqrt{x^2+hx}})$$

ist. Csy. (O.)

R. Harley. On certain linear differential equations. Rep. Brit. Ass. 1878.

Durch Anwendung eines Satzes von Murphy hat Herr Rawson

bewiesen, dass, wenn

$$u_n = \frac{1}{n}\Sigma y^n,$$

wo die Summe über eine beliebige Zahl von Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(\alpha) \qquad y^m + ay^n + bx = 0$$

erstreckt ist, indem man y als Function von x betrachtet, dann

$$(\beta) \qquad \frac{du_{n+r}}{dx} = -\frac{bm}{a(m-r)}\left(x\frac{du_n}{dx} - \frac{n}{m}u_n\right),$$

$$(\gamma) \qquad \frac{du_{n+m}}{dx} = \frac{br}{a(m-r)}\left(x\frac{du_n}{dx} - \frac{n}{r}u_n\right).$$

Herr Rawson hat ferner gezeigt, dass die Differentialresolvente von α) mit Hülfe der Gleichungen β) und γ) berechnet werden kann, wenn man dem m und r besondere Werthe beilegt. Die vorliegende Arbeit zeigt nun, dass Herrn Rawson's Differentialgleichungen leicht aus der algebraischen Gleichung ohne Hülfe von Murphy's Satz hergeleitet werden können, und zweitens, dass seine Resultate sich verallgemeinern lassen.

Csy. (O.)

H. Molins. Sur l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} = ax^m y.$$

Mém. de Toul. (7) VIII. 167-189.

Laguerre. Sur l'intégration de l'équation

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6f(x),$$

f étant un polynôme du second degré. Bull. S. M. F. VI. 121-124.

Mit Hülfe des Princips des letzten Multiplicators zeigt sich, dass die vollständige Integration der obigen Differentialgleichung, welcher alle Polynome 3ten Grades genügen, deren Hesse'sche Determinante $f(x)$ ist, durch elliptische Functionen geliefert wird; und zwar ist:

$$\int \frac{dx}{f(x)} + \int \frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^4}} = \beta, \quad y = \left(\frac{f}{u}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wo Δ die Discriminante von f ist und α, β die Integrationsconstanten sind.

Damit die Lösung algebraisch sei, muss $\alpha = 0$ sein, und es ergiebt sich als die diesem Falle entsprechende particulare erste Integralgleichung die bekannte Cayley'sche Relation zwischen den Covarianten einer cubischen Form. T.

J. Farkas. Solution d'un système d'équations linéaires. C. R. LXXXVII. 523-526.

Ist $\varphi(a)$ eine ganze Function k^{ten} Grades von a und nach Potenzen von $\frac{a-u}{m} = \varepsilon$ entwickelt

$$\varphi(a) = \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu \varepsilon^\nu,$$

so handelt es sich um Auflösung des Systems

$$\varphi(a+h\Delta a) = \sum_\nu x_\nu (\varepsilon + h\Delta\varepsilon)^\nu$$

nach $x_0, x_1, \dots, x_k$. Mit Hülfe einfacher Determinantensätze werden diese Coefficienten durch die Differenzenquotienten von $\varphi(a)$ dargestellt; für $a = u$ ergeben sie interpolatorische Formeln für die Coefficienten der Entwickelung von $\varphi(u+\Delta u)$ nach Potenzen von Δu, und für unendlich kleine Incremente Δa und $k = \infty$ die Taylor'sche Reihe und ihre Differentialquotienten.

T.

L. Königsberger. Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen. Borchardt J. LXXXIV. 284-294.

Es wird folgender durch seine Allgemeinheit und Fruchtbarkeit höchst bemerkenswerther Satz bewiesen:

Es sei Z ein Integral der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(1) \qquad f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

wo f eine ganze Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet, und $Z_1, Z_2 \dots Z_\nu$ eine Reihe von ν Integralen der resp. ν Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1} + \varphi_1(x\, z_1, z_2 \dots z_\nu)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1-1} + \dots + \varphi_{k_1}(x, z, z_1 \dots z_\nu) = 0 \\ \left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2} + \psi_1(x\, z_1, z_2 \dots z_\nu)\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2-1} + \dots + \psi_{k_2}(x, z, z_1 \dots z_\nu) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{dz_\nu}{dx}\right)^{k_\nu} + \chi_1(x\, z_1, z_2 \dots z_\nu)\left(\frac{dz_\nu}{dx}\right)^{k_\nu-1} + \dots + \chi_{k_\nu}(x, z, z_1 \dots z_\nu) = 0, \end{cases}$$

wo die $\varphi, \psi, \dots$ rationale Functionen der Grössen $x\, z_1 \dots z_\nu$ bedeuten; es bestehe ferner zwischen den Integralen $Z, Z_1 \dots Z_\nu$ ein algebraischer Zusammenhang

$$(3)\qquad F(x, Z, Z_1 \dots Z_\nu) = 0.$$

Setzt man statt der Grössen $Z_1 \dots Z_\nu$ ν beliebige andere Integrale des als irreductibel vorausgesetzten Systems (2), so wird die algebraische Beziehung (3) fortbestehen, wenn für Z ein bestimmtes anderes Integral der Differentialgleichung (1) gesetzt wird. Der Verfasser bemerkt, dass man in vielen Fällen von diesem Satze Gebrauch machen kann, um die Form jener algebraischen Beziehung festzustellen, falls man nämlich das allgemeine Integral von (1) durch $Z_1 \dots Z_\nu$ und eine Reihe von willkürlichen Grössen auszudrücken im Stande ist. So beweist man mit Hülfe dieses Satzes, dass, wenn $y\, y_1 \dots y_\nu$ algebraische Functionen von x bezeichnen, die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen die Form

$$A\int y dx + A_1\int y_1 dx + \dots + A_\nu\int y_\nu dx + B = 0$$

haben muss, worin $A A_1 \dots A_\nu$ Constanten und B eine algebraische Function von x bedeutet, und dass ferner eine algebraische Relation zwischen Abel'schen Integralen nicht eindeutige Umkehrfunctionen solcher Integrale, wie die Exponentialfunctionen, die trigonometrischen Fnnctionen, die elliptischen Functionen etc., deren Argumente algebraische Functionen von x sind, enthalten kann.

Hr.

Capitel 6.
Partielle Differentialgleichungen.

M. Levy. Sur les conditions, pour qu'une forme quadratique de n différentielles puisse être transformée de façon que ses coefficients perdent une partie ou la totalité des variables qu'ils renferment. C. R. LXXXVI. 463-466.

Soll eine quadratische Form von n Differentialien dx_i, deren Coefficienten Functionen der Variabeln x_i sind, durch Transformation in eine andere solche Form übergehen können, deren Coefficienten nur noch $n-k$ Variable enthalten, so muss sich unter den unendlich vielen Systemen von $n-1$ Differentialgleichungen, die nach Jacobi zur Integration einer gewissen zu der gegebenen Form zugehörigen partiellen Differentialgleichung 1ter Ordnung dienen können, eines mit k linearen Gleichungen befinden. Bl.

H. W. L. Tanner. On the transformation of a linear differential expression. Quart. J. XVI. 45-65.

Die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit der Ausdruck

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \cdots + y_n dx_n,$$

worin $y_1 \dots y_n$ gegebene Functionen von $x_1 \dots x_n$ sind, auf die Form

$$v_1 du_1 + \cdots + v_r du_r,$$

wo $r < \frac{n}{2}$ und die v und u wiederum Functionen von x sind, reducirbar sei, werden in 2 verschiedenen Ausdrücken, einmal in den y und dann in den v und u gegeben. Beide Darstellungsformen der erwähnten Transformationsbedingungen finden sich übrigens bereits in den Abhandlungen von Natani (Borchardt J. LVIII.) und Clebsch (ibid. LX. und LXI.) entwickelt.

Hr.

I. Petersen. Beweis eines Lehrsatzes betreffend die Integration algebraischer Differentialausdrücke, beziehungsweise algebraischer Differentialgleichungen unter geschlossener Form. Gött. Nachr. 1878. 68-88.

Eine „algebraische“ Function eines oder mehrerer Argumente wird erklärt als Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Argumente sind. „Hyperalgebraische“ Functionen heissen solche, deren Abgeleitete algebraische Functionen der Argumente sind. Transcendente Function „1. Stufe“ wird jeder Ausdruck genannt, welcher nur algebraische Functionen einer oder mehrerer hyperalgebraischer Functionen und von deren Argumenten enthält. Hieraus geht eine transcendente Function „2. Stufe“ hervor, indem man an die Stelle der algebraischen Functionen eine transcendente 1. Stufe setzt und für die Argumente ebensolche Functionen neuer Argumente substituirt, u. s. f. Es wird dann folgender Satz bewiesen:

„Wenn die Differentialgleichung

$$dy = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \cdots P_k dx_k$$

mit einer abhängigen Variablen das Integral

$$u = F(x_1, x_2, \dots x_k, y, \omega) = c,$$

oder

$$\psi_1 + \psi_2 + \cdots + u_1 = c$$

hat, wo ω eine der Transcendenten höchster, beziehungsweise nächsthöchster Stufe, u_1 eine algebraische, ψ_1, $\psi_2, \dots$ hyperalgebraische Functionen sind, so ist

$$\frac{\delta u}{\delta \omega} = c\varphi$$

entweder eine Identität oder eine neue Form der Integralgleichung.“ (Hier steht δ statt ∂, sofern ω in F als unabhängig betrachtet wird.)

Aus diesem Satze wird der folgende hergeleitet:

„Wenn eine algebraische Differentialgleichung 1ter Ordnung mit einer abhängigen Variablen das Integral $u = c$ hat, wo u durch beliebige Superposition von Transcendenten der hier besprochenen Art ausdrückbar ist, so ist u in seiner einfachsten

Form gleich einer Summe von hyperalgebraischen Functionen 1. Stufe."

Desgleichen folgt noch speciell:

„Wenn es möglich ist ein Differential mittelst algebraischer Functionen und mittelst der elementaren Transcendenten

$$(\log x,\ a^x,\ \sin x,\ \arcsin x,\ \ldots)$$

in geschlossener Form zu integriren, so ist dies nur möglich, wenn

$$\int P dx = \Sigma c_\nu \log x_\nu + X,$$

wo x_ν, X algebraisch in x und P darstellbar sind." Bezüglich auf elliptische Transcendenten, aber ohne der inversen Functionen zu erwähnen, hat Abel in einem Briefe an Legendre (Oeuvres compl. II. 262.) den Satz ungefähr in dieser Form ausgesprochen.

H.

G. Frobenius. Ueber adjungirte lineare Differentialausdrücke. Borchardt J. LXXXV. 185-207.

Jacobi war bei seinen Untersuchungen über die zweite Variation zu gewissen Sätzen über Differentialausdrücke gelangt, welche insbesondere von Hesse später auf allerdings sehr mühsamen Wegen bewiesen wurden. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sich diese Beweise auf einen einfachen Algorithmus zurückführen lassen, wenn man den adjungirten linearen Differentialausdruck A' eines gegebenen A von einem neuen Gesichtspunkte auffasst.

Unter einem linearen Differentialausdruck A oder $A(u)$ versteht man den Ausdruck:

$$1)\qquad \sum_0^n A_m D^m u$$

(D das Zeichen der sich auf eine unbestimmte Function u von x beziehenden Differentiation). Solche Ausdrücke A, B lassen sich zusammensetzen, wenn man unter A zugleich das betreffende operative Symbol versteht, zu der Form

$$A(B(u)),\ \ (= AB(u) = AB).$$

Aus dem linearen entsteht ein bilinearer Differentialausdruck A. $A(uv)$, wenn die A_m selbst Differentialausdrücke $B(v)$ sind.

Nun wird gezeigt, dass der adjungirte Differentialausdruck $A' = B$ von A oder:

$$2) \quad A_0 u - D(A_1 u) + D^2(A_2 u) + \cdots (-1)^n D^n(A_n u)$$

definirt ist durch die Bedingung, dass

$$vAu - uBv$$

das vollständige Differential eines Ausdruckes $C(uv)$, des begleitenden bilinearen Differentialausdrucks ist. Aus der characteristischen Eigenschaft:

$$3) \quad vA(u) - uA'(v) = DA(uv)$$

folgt die Lagrange'sche Reciprocität adjungirter Differentialausdrücke, sowie der von Herrn Frobenius als Reciprocitätssatz bezeichnete:

$$4) \quad (ABC \ldots N') = N' \ldots C'B'A'.$$

Hierauf gründet sich ein übersichtlicher Algorithmus zur Bildung des adjungirten Differentialausdrucks. Ferner hatte Jacobi gefunden, dass, wenn $A' = A = P$ sein soll, P von der Form $A'aA(u)$ sein müsse. Herr Frobenius zeigt, dass letztere Form nothwendig und hinreichend ist, damit $P = P'$ sei und dass für ein solches P der begleitende Differentialausdruck eine alternirende bilineare Form ist; er giebt zugleich einen einfachen Beweis des Jacobi'schen Theorems, aus welchem die Form der Relationen zwischen den Constanten der Variationsrechnung hervorgeht, welche von Clebsch herrührt.

Von den vorhergenden Sätzen macht der Verfasser im § 8 eine kurze Anwendung auf die Jacobi'sche Umformung der zweiten Variation und zeigt endlich, wie die von ihm eingeführten Hauptgesichtspunkte sich auf lineare partielle Differentialausdrücke ausdehnen lassen. V.

G. Frobenius. Ueber homogene totale Differentialgleichungen. Borchardt J. LXXXVI. 1-19.

Der Verfasser schickt zunächst mehrere Sätze aus seiner Abhandlung über das Pfaff'sche Problem (Borchardt J. LXXXII., vgl. F. d. M. IX. p. 249) voraus und wendet dieselben auf die allgemeine Frage an, wie sich die Klasse eines gegebenen linearen Differentialausdrucks

$$1) \quad a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots a_n dx_n$$

ändert, wenn derselbe mit einem Factor multiplicirt oder um ein vollständiges Differential vermehrt wird. Unter Klasse des Ausdrucks 1) hat man die kleinste Anzahl unabhängiger Functionen zu verstehen, durch welche sich dieser Ausdruck darstellen lässt, so dass also ein Differentialausdruck von der Klasse 1 ein vollständiges Differential ist.

Mit diesen Hülfsmitteln ausgerüstet untersucht er dann im Besonderen die linearen homogenen Differentialausdrücke, d. h. diejenigen Ausdrücke von der Form 1), deren Coefficienten $a_1, \dots a_n$ homogene Functionen gleicher Ordnung sind. In vielen Fällen kann man hier unmittelbar voraussagen, dass die Klasse des gegebenen Ausdrucks $< n$, oder grade, resp. ungrade sein muss, in anderen wieder kann man die Klasse sofort um eine Einheit erniedrigen.

Wie nützlich diese einfachen Sätze sind, zeigt sich recht deutlich bei der Integration einiger Gattungen von totalen Differentialgleichungen, wobei der Verfasser allerdings auch Sätze aus seiner Abhandlung über lineare Substitutionen und bilineare Formen (Borchardt J. LXXXIV., vgl. F. d. M. IX. p. 85) zu Hülfe nimmt.

Er integrirt solche totale Differentialgleichungen, deren Coefficienten lineare homogene Functionen der Variabeln sind, und beschäftigt sich namentlich auch mit der Integration derjenigen totalen Differentialgleichungen zwischen drei Variabeln, deren Coefficienten ganze homogene Functionen 2ten Grades sind. Die letzteren werden vollständig integrirt und ihre Integration, wo sie sich nicht schon unmittelbar aus den vorangegangenen Sätzen ergiebt, vermöge eines Systems von 3 linearen Differentialgleichungen bewirkt, welches der Jacobi'schen Differentialgleichung äquivalent ist.

Schliesslich dehnt der Verfasser diese Verallgemeinerung der Jacobi'schen Differentialgleichung noch weiter aus, indem er eine totale Differentialgleichung zwischen n Variabeln ableitet, die durch eine einzige endliche Gleichung befriedigt werden kann und deren Integral eine ganz analoge Form besitzt, wie das Integral jener gewöhnlichen Differentialgleichung. Mr.

H. W. L. Tanner. On certain functions allied to Pfaffians. Quart. J. XVI. 34-45.

Rechnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

aus und bezieht dann in jedem Gliede die Differentiationszeichen auf die darauf folgenden Ausdrücke, so deutet die Determinante, wenn sie mit einer Reihe

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}$$

schliesst, eine Operation an, die mit $\{1 \dots n\}$ bezeichnet wird; endet sie dagegen mit einer Reihe $y_1 \dots y_n$, so kann man sie als einen symbolischen Differentialausdruck von selbständiger quantitativer Bedeutung, aber auch als einen Operator auffassen, insofern man zu jedem Gliede der letzten Reihe noch ein und dieselbe Function u hinzufügt; in diesem Falle wird sie mit $[1 \dots n]$ bezeichnet. Da, wie gezeigt wird, die Wirkung jeder Reihe

$$\frac{d}{dx_1} \cdots \frac{d}{dx_n}$$

(ausser in dem Falle, wo sie die letzte ist), schliesslich dieselbe ist, wie wenn man sie nur auf die unmittelbar auf sie folgende einwirken lässt, d. h. in dem ausgerechneten Ausdruck jedes $\frac{\partial}{\partial x_i}$ nur auf die unmittelbar folgenden Grössen y_i bezieht, so ergeben sich unmittelbar für die Operationen $\{1 \dots n\} u$ und $[1 \dots n] u$ einfache Ausdrücke, die unentwickelt nur noch wirkliche Quantitäten $[\;]$ enthalten, nämlich:

$$\{1 \dots n\} u = [1 \dots n-1] \frac{\partial u}{\partial x_n} - [1 \dots n-2, n] \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} + \cdots,$$

$$[1 \dots n] u = u . [1 \dots n] + (-1)^{n-1} \{1 \dots n\} u.$$

Ueberdies stehen diese Functionen mit den Pfaff'schen in der Beziehung, dass $[1 \dots 2n] = n(1 \dots 2n)$ ist, wo $(1 \dots 2n)$ eine Pfaffian ist. Dies vorausgeschickt, entwickelt der Verfasser Identitäten zwischen Differentialausdrücken, die sich symbolisch als Unterdeterminanten der obigen Determinante darstellen, unter der Voraussetzung, dass die durch diese dargestellte Function verschwindet. Diese Relationen dienen zur Transformation von linearen Differentialausdrücken. T.

C. Petersson. Ueber die Integration partieller Differentialgleichungen. Mosk. Math. Samml. IX. (Russisch).

P.

H. W. L. Tanner. On a general method of solving partial differential equations. Proc. L. M. S. IX. 76-90.

Ist eine partielle Differentialgleichung 1ter Ordnung

$$f(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = a \quad \left(p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}\right)$$

gegeben, so kommt bekanntlich ihre Lösung darauf zurück, $n-1$ weitere Gleichungen zwischen $x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n$ zu finden von der Beschaffenheit, dass die aus ihnen abgeleiteten Werthe von $p_1 \dots p_n$ die Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

integrabel machen. Die Auffindung der $n-1$ Gleichungen erfordert die Lösung von integrablen Systemen linearer partieller Differentialgleichungen. Bei einer partiellen Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$f(s_{11} \dots s_{ik} s_{n,n}, \quad p_1 \dots p_n z x_1 \dots x_n) = a \quad \left(s_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\right),$$

würde es sich demnach in analoger Weise darum handeln, zu der gegebenen noch $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ Gleichungen der nämlichen Form herzustellen von der Eigenschaft, dass die daraus abgeleiteten Werthe der s_{ik} als Functionen von $x_1 \dots x_n z, p_1 \dots p_n$ die $n+1$ Gleichungen:

$$dp_i - s_{1i}dx_1 - \cdots - s_{ni}dx_n = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$
$$dz = p_1 dx_1 \ldots - p_n dx_n = 0$$

zu einem integrablen System machen. Wie leicht zu ersehen, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für diese Integrabilität durch

$$\frac{ds_{ik}}{dx_l} = \frac{ds_{lk}}{dx_i}$$

gegeben, wo bei der Differentiation nach den x auch z und die p, welche in den Ausdrücken für s_{ik} vorkommen, als Functionen der x zu betrachten sind. Dies weist nun der Herr Verfasser weitläufig nach, allein eine Methode, jene $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ Gleichungen, die uns die s_{ik} von der verlangten Beschaffenheit liefern, allgemein oder in gewissen besonderen Fällen herzustellen, worauf es für das vorliegende Problem allein ankommt, findet sich in der Arbeit nicht angegeben. Die hinzugefügten Bemerkungen über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnungen gehen in gleicher Weise über die eigentliche Aufgabe hinweg.

Hr.

R. Minich. Nouvelle méthode pour l'élimination des fonctions arbitraires. C. R. LXXXVII. 161-165

Sind $p+1$ Gleichungen

$$f_i(z, x, x_1 \ldots x_p, \varphi_1 \ldots \varphi_n) = 0, \quad i = 0, 1, 2 \ldots p$$

gegeben, in denen $x, x_1 \ldots x_p$ die unabhängigen, z die abhängige Variable und $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ willkürliche Functionen der p Argumente $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ bedeuten, so handelt es sich darum, aus diesen Gleichungen, durch welche z und die α als Functionen von x definirt sind, die φ und die α zu eliminiren. Der Verfasser giebt dafür folgendes Verfahren: Man bilde die Determinante

$$(1) \qquad \psi_1 = \begin{vmatrix} D_x f & D_{x_1} f \ldots D_{x_p} f \\ D_x f_1 & D_{x_1} f_1 \ldots D_{x_p} f_1 \\ \vdots & \\ D_x f_p & D_{x_1} f_p \ldots D_{x_p} f_p \end{vmatrix},$$

wo

$$D_{x_k} f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k}$$

gesetzt ist, und indem man in dieser Determinante ψ_1 für f einführt, den Ausdruck ψ_2 und in derselben Weise $\psi_3 \dots \psi_n$, so dass

$$\psi_m = \begin{vmatrix} D_x\psi_{m-1} & D_{x_1}\psi_{m-1} \dots D_{x_p}\psi_{m-1} \\ D_x f_1 & D_{x_1} f_1 \quad \dots D_{x_p} f_1 \\ \vdots & \\ D_x f_p & D_{x_1} f_p \quad \dots D_{x_p} f_p \end{vmatrix},$$

dann giebt die Elimination der $n+p$ Grössen $\varphi_1 \dots \varphi_n$, $\alpha_1 \dots \alpha_p$ aus den n Gleichungen

$$\psi_1 = 0, \dots \psi_n = 0,$$

verbunden mit den $p+1$ gegebenen Gleichungen, die gesuchte Resultante in Form einer partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Dieses Resultat hat der Verfasser bereits in den Comptes Rendus 1877 (s. F. d. M. IX. 277) mitgetheilt; in der vorliegenden Note giebt er eine neue Eliminationsmethode, indem er zeigt, dass man die gesuchte Resultante erhält, wenn man die α als constant betrachtet, und bei der Bildung der totalen Differentiale der $p+1$ gegebenen Gleichungen und derer, die sich aus denselben herleiten, z als Function von $x\, x_1 \dots x_p$ betrachtet. Eliminirt man in den Gleichungen

$$df = 0, \quad df_1 = 0, \dots df_p = 0$$

die Differentiale $dx\, dx_1 \dots dx_p$, so erhält man (1) und ebenso ergiebt die Elimination der Differentiale dx aus

$$d\psi = 0, \; df_1 = 0 \dots df_p = 0$$

die Gleichung $\psi_2 = 0$ u. s. f. Hr.

F. Gomes Teixeira. Sur le nombre des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux dérivées partielles. Mém. de Bord. (2) II. 315-323.

Ampère hat die Zahl der willkürlichen Functionen bestimmt, welche in den Integralen partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen auftreten. Der

Verfasser verallgemeinert die Ampère'sche Theorie, indem er diese Anzahl für das Integral einer partiellen Differentialgleichung mit beliebig vielen unabhängigen Variablen bestimmt. Das Resultat seiner Untersuchung fasst er in folgendem Theorem zusammen: Das Integral einer partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variablen enthält im Allgemeinen eine der Ordnung der Gleichung gleiche Anzahl von willkürlichen Functionen mit so vielen Argumenten, als die um 1 verminderte Zahl der unabhängigen Variablen beträgt, und enthält deren mehr, falls bei der Elimination der Argumente, der willkürlichen Functionen und ihrer Derivirten diese Functionen sich gruppenweis eliminiren. Hr.

F. Hočevar. Ueber eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Wien. Ber. 1877.

Es wird diejenige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die auf das System von linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten

$$\frac{du_i}{ds} = \sum_{\lambda=0}^{n+1} a_{i\lambda} u_\lambda \quad (i = 0, 1, \ldots, n+1)$$

führt, zunächst für $n = 2$ und dann allgemein integrirt und zwar nach einer Methode, die für $n = 1$, in welchem Falle sie in die Jacobi'sche Differentialgleichung übergeht, von Herrn Allégret (C. R. LXXXIII. 1171, cfr. F. d. M. VIII. 214) benutzt worden ist. Für den allgemeinen Fall vergleiche man Boole, treatise on differential equations p. 305 und Darboux C. R. LXXXVI. 1012—1014 (F. d. M. diesen Band p. 214). Die Integrale des linearen Systems haben eine dem Integrale der Jacobi'schen Gleichung ganz analoge Gestalt. T.

F. Hočevar. Ueber die Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen. Wien. Ber. 1878.

Die Differentialgleichung $\frac{dx}{X_1 - xX} = \frac{dz}{X_2 - zX}$, worin X, X_1, X_2

ganze homogene Functionen von x und z, und zwar X_1 und X_2 von gleichem Grade sind, ist von Herrn Minding in den Memoiren der Petersburger Akademie (1863) integrirt worden. Dieselbe wird zu dem folgenden System verallgemeinert:

$$\frac{dx_1}{X_1 - x_1 X} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n - x_n X} = \frac{dz}{X_{n+1} - zX},$$

wo X eine homogene Function von einem beliebigen Grade h und $X_1 \dots X_{n+1}$ lineare homogene Functionen von $x_1, \dots, x_n, z$ sind. Durch die Substitution $x_i = u_i z$ $(i = 1, \dots, n)$ geht dasselbe über in:

$$\frac{du_i}{U_i - u_i U_{n+1}} = ds, \quad \frac{dz}{zU_{n+1} - z^{h+1} U} = ds,$$
$$(i = 1, \dots, n)$$

wo $U_1 \dots U_{n+1}$ lineare Functionen von $u_1 \dots u_n$ sind.

Die n ersten Gleichungen lassen sich in bekannter Weise integriren; vergl. das vorige Referat. Die noch übrige Integration lässt sich für ganzzahlige h in geschlossener Form ausführen und wird für den Fall, dass X von der Form:

$$a_1 x_1^h + a_2 x_2^h + \cdots + a_n x_n^h + a_{n+1} z^h$$

ist, vollständig durchgeführt. T.

H. W. L. Tanner. On partial differential equations of the first order with several dependent variables.
Proc. L. M. S. IX. 41-61.

Ist eine partielle Differentialgleichung 1ter Ordnung oder ein System solcher mit n abhängigen Variablen $y_1 \dots y_n$ als Functionen von m unabhängigen Variablen $x_1 \dots x_m (m \geqq n)$ gegeben, so denke man sich jede dieser Gleichungen zunächst soweit als möglich in Jacobi'schen Determinanten dargestellt, wobei eine solche Determinante

$$\Sigma \frac{dy_1}{dx_1} \cdots \frac{dy_r}{dx_r}, \quad \text{welche mit} \quad \frac{d(y_1 \dots y_r)}{d(x_1 \dots x_r)}$$

bezeichnet wird, als *ein* Glied und zwar r^{ter} Ordnung und 1ten Grades angesehen wird. Versteht man nun unter einer homogenen

partiellen Differentialgleichung mit n abhängigen Variablen eine Gleichung von der Beschaffenheit, dass 1) alle in ihr vorkommenden Jacobi'schen Determinanten von der n^{ten} Ordnung sind, 2) in Beziehung auf diese Determinanten die Gleichung homogen ist, 3) ausser diesen Determinanten nur die unabhängigen Variablen vorkommen, so wird gezeigt, dass man jedes System partieller Differentialgleichungen 1ter Ordnung mit n abhängigen und m unabhängigen Variablen in ein homogenes System transformiren kann, in welchem die Zahl der abhängigen Variablen wiederum n, die Zahl der unabhängigen $m+n$ ist.

Es werden hierauf ausschliesslich homogene Gleichungen 1ten Grades von der Form

$$(1) \qquad \Sigma P_i \frac{d(y_1 \dots y_n)}{d(x_{i_1} \dots x_{i_n})} = 0$$

betrachtet, wo $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ beliebige n von den m unabhängigen Variabeln $x_1 \dots x_m$ bedeuten, und die Coefficienten P_i Functionen der x sind. Die einfachste Gleichung dieser Art ist

$$\frac{d(y_1 \dots y_n)}{d(x_1 \dots x_n)} = 0,$$

deren allgemeines Integral $\varphi(y_1 \dots y_n) = 0$ ist, (φ eine willkürliche Function). Der Verfasser stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Gleichung (1) durch Einführung neuer Functionen $u_1 \dots u_p$ auf diese einfachste Form, nämlich auf die Gleichung

$$\frac{d(y_1 \dots y_n,\ u_1 \dots u_p)}{d(x_1 \dots x_m)} = 0 \quad (m = n+p)$$

reducirt werden kann. Die Vergleichung mit (1) giebt der Anzahl der Coefficienten P_i entsprechend $\frac{(n+p)!}{n!p!}$ Gleichungen von der Form

$$P_i = \pm\lambda \frac{d(u_1 \dots u_p)}{d(x_{i_{n+1}} \dots x_{i_{n+p}})}.$$

Da diese Zahl im Allgemeinen grösser als $p+1$ ist, so ergeben sich dadurch gewisse Bedingungen für P. In der Voraussetzung, dass diese erfüllt sind, werden die $u_1 \dots u_p$ als gemeinsame

Lösungen eines Systems von n simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen für u als abhängige und $x_1 \ldots x_{n+p}$ als unabhängige Variabeln erhalten. In der ferneren Voraussetzung, dass dieses System integrabel sei, ist dann das Integral von (1)

$$\varphi(y_1 \ldots y_n, u_1 \ldots u_n) = 0$$

(φ eine willkürliche Function). Für den Fall, dass ein System von q Gleichungen, jede von der Form (1) gegeben ist, werden in ähnlicher Weise die Bedingungen dafür ermittelt, dass ihre allgemeine Lösung

$$\varphi(y_1 \ldots y_n, u_1 \ldots u_p) = 0$$

sei, wo jedoch $n+p = m+1-q$. Es folgt hierauf die Betrachtung der Gleichung

$$\frac{d(y_1 \ldots y_n)}{d(x_1 \ldots x_n)} = P,$$

wo P eine Function der x und y ist. Von dieser wird nicht eine allgemeine Lösung gegeben, sondern nur gezeigt, wie man eine beliebige Anzahl particulärer Lösungen erhalten kann.

Den Beschluss macht die Behandlung einer besonderen Klasse von Gleichungen der Form (1), die dadurch ausgezeichnet ist, dass ihre Integration durch eine einfache Transformation auf die einer linearen partiellen Differentialgleichung 1ter Ordnung von der Form:

$$\Sigma P_{ik} \frac{dy_i}{dx_k} \quad (i = 1, \ldots n, \; k = 1 \ldots m)$$

reducirt werden kann. Hr.

V. Imschenetsky. Note sur les équations aux dérivées partielles. Mém. de Liège (2) VII.

Es sei

$$x_k = q_k + q_k' \sqrt{-1}, \quad y_k = p_k + p_k' \sqrt{-1},$$

$$z = f(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_n, y_n) = H + G\sqrt{-1}.$$

Nach der Definition der Functionen einer imaginären Variabeln unterliegen H und G gewissen Relationen, von denen es genügen wird, die Poisson'sche Identität $(H, G) = 0$ hervorzuheben. Daraus ergeben sich verschiedene Sätze über Integration eines kanonischen Systems der Ordnung $4n$ und über die entsprechende partielle Differentialgleichung, welche der Verfasser ihrem Hauptinhalt nach bereits in Darboux' Bulletin veröffentlicht hat.

Mn. (O.)

Sophus Lie. Theorie der Transformationsgruppen III.
Arch. f. Math. og Naturv. III. 93-165.

Diese Abhandlung schliesst sich als Fortsetzung an zwei frühere an (Archiv for Math. og. Naturv., s. F. d. M. VIII. p. 212.) Sie zerfällt in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitte entwickelt der Verfasser allgemeine Sätze, die sich auf die Transformationsgruppen eines n-fach ausgedehnten Raumes beziehen. Unter denselben möge hier nur der folgende seinen Platz finden.

Es seien $A_1f \dots A_rf$ Ausdrücke der Form

$$A_if = X_{i1}p_1 + \dots + X_{in}p_n, \quad \left(p_n = \frac{\partial f}{\partial x_k}\right),$$

die paarweise Relationen der Form

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = \Sigma c_{iks} A_s f$$

genügen. Ferner seien $A'_1f \dots A'_rf$ analoge Ausdrücke in

$$x'_1 \dots x'_n \; p'_1 \dots p'_n,$$

die ebenso Relationen der Form

$$A'_i(A'_k(f)) - A'_k(A'_i(f)) = \Sigma d_{iks} A'_s f$$

befriedigen. Wir setzen voraus, dass die Gleichungen

$$A_1 f = A'_1 f \dots A_r f = A'_r f$$

durch eine Berührungstransformation zwischen

$$x_1 \dots x_n \; p_1 \dots p_n \text{ und } x'_1 \dots x'_n \; p'_1 \dots p_n$$

erfüllt werden können. Sollen sie insbesondere durch eine Punkttransformation zwischen $x_1 \dots x_n \; x'_1 \dots x'_n$ befriedigt werden können, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass die beiden r-gliedrigen Gleichungssysteme

$$A_i f = 0 \quad \text{und} \quad A_i' f = 0$$

eine gleiche Anzahl unabhängiger Gleichungen enthalten.

Vermöge dieses Satzes kann man immer unterscheiden, ob eine vorgelegte Transformationsgruppe durch Einführung von zweckmässigen Variabeln auf eine gewisse Form gebracht werden kann.

Der zweite Abschnitt giebt die Bestimmung von allen Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene. Die angewandte Methode beruht auf der folgenden Bemerkung: Es seien $A_1 f \dots A_r f$, wo

$$A_i f = \xi_i(xy)p + \eta_i(xy)q,$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe. Alsdann besitzt die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe die Form

$$c_1 A_1 f + \cdots + c_r A_r f,$$

wo die c_i willkürliche Constanten sind. Man denke sich jetzt die ξ_i und η_i nach den ganzen Potenzen von x und y entwickelt. Setzt man voraus, dass $r > 2$ ist, so kann man immer die c_i der Art wählen, dass die infinitesimale Transformation $\Sigma c_i A_i f$ nur Glieder von erster und höherer Ordnung hinsichtlich x und y enthält. Hierbei bleiben sogar jedenfalls $r-2$ Constanten c_i unbestimmt. Es giebt daher jedenfalls $r-2$ infinitesimale Transformationen, die in der Umgebung des Werthsystems $x = 0$, $y = 0$ von der ersten Ordnung hinsichtlich x und y sind. In entsprechender Weise findet man jedenfalls $r-6$ infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung, $r-12$ Transformationen dritter Ordnung u. s. w.

Bildet man nach diesen Verbesserungen die Gleichungen

$$A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f)) = \Sigma c_{iks} A_s f,$$

die bekanntlich bestehen sollen, so erkennt man, dass der Werth von einigen Constanten c_{iks} a priori angegeben werden kann. Ist in der That $A_i f$ eine Transformation i^{ter} Ordnung, $A_k f$ eine Transformation k^{ter} Ordnung, so ist $A_i(A_k(f)) - A_k(A_i(f))$ von $(i+k-1)^{\text{ter}}$ oder noch höherer Ordnung, und daher enthält die rechte Seite der letzten Gleichung nur Grössen $A_s f$, deren Ordnung gleich oder grösser als $i+k-1$ ist.

Diese Betrachtung giebt durch verhältnissmässig einfache Rechnungen die Bestimmung aller Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene. L.

Sophus Lie. Theorie der Transformationsgruppen IV.
Arch. f. Math. og Naturv. III. 375-460.

Auch diese Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitte wird gezeigt, dass jede Gruppe von Punkttransformationen eines n-fach ausgedehnten Raumes, die n^2 oder n^2-1 unabhängige infinitesimale Transformationen erster Ordnung enthält, durch Einführung von zweckmässigen unabhängigen Variabeln in die allgemeine lineare Gruppe oder in eine Untergruppe derselben übergeführt werden kann. Eine solche Gruppe hat daher keine infinitesimale Transformation von dritter oder höherer Ordnung. Sie hat entweder keine oder auch n^2 infinitesimale Transformationen von der zweiten Ordnung.

Der letzte Abschnitt bestimmt alle Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene. Es giebt nur drei solche Gruppen, die sich nicht in Gruppen von Punkttransformationen umwandeln lassen. Typen derselben sind die zehngliedrige Gruppe, die alle Kreise in Kreise umwandelt, zusammen mit einer sieben- und einer sechsgliedrigen Untergruppe.

Wenn eine Gruppe vorgelegt ist, kann man immer jede Differentialgleichung

$$f(x\ y\ y' \dots y^{(n)}) = 0$$

angeben, die die Gruppe gestattet. Hierauf gründet sich, wie der Verfasser schon 1874 (Gött. Nachr., siehe F. d. M. VI. p. 93) angegeben hat, eine Classification der gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln und zugleich eine Integrationsmethode solcher Gleichungen, die überhaupt eine Transformationsgruppe besitzen. L.

A. V. Bäcklund. Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
Clebsch Ann. XIII. 411-428.

Der Aufsatz dehnt die für partielle Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln längst ausgebildete Charakteristikentheorie auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit n unabhängigen Variabeln aus. Bd.

A. Korkine. Ueber partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Petersburg. (Russisch).

Die Monge-Ampère'sche Methode der Integration gewisser Gleichungen 2ter Ordnung ist eine der wichtigsten in der ganzen Theorie der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung. In allen Fällen, wo die Methode anwendbar ist, giebt sie die Mittel, das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung zu finden; dabei wird aber derjenige Theil der Aufgabe, welcher die Bestimmung der willkürlichen Functionen unter gewissen Anfangsbedingungen fordert, gar nicht in Betracht gezogen.

Diese Lücke auszufüllen ist der Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit. Es wird gezeigt, dass in allen Fällen, wo die Monge'sche Methode anwendbar ist, man auch den Anfangsbedingungen genügen kann, wenn die Form dieser Bedingungen in gehöriger Weise gewählt ist.

Die Aufgabe über die Integration einer Differentialgleichung

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

wird folgendermaassen ausgesprochen: Man soll eine Function Z der zwei unabhängigen Veränderlichen x, y finden, welche

1) der Gleichung (1) genügen,

2) für $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ sich auf eine gegebene Function $\varpi(u)$ reduciren soll, und

3) dass für $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, $z = \varpi(u)$ noch die Gleichung

$$\sigma(x, y, z, p, q) = 0$$

bestehen soll, wo die Form der Function σ ebenfalls eine gegebene ist.

Geometrisch aufgefasst, lautet diese Aufgabe: **Man bestimme die Gleichung einer Fläche, welche der Gleichung (1) genügt, und durch eine gegebene Curve**

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \varpi(u)$$

geht, wobei noch die Richtung der Normale in jedem Punkte dieser Curve ebenfalls gegeben ist. Diese letzte Bedingung, welche aus der Gleichung

$$\sigma(x, y, z, p, q) = 0$$

in Verbindung mit $dz = pdx + qdy$ hervorgeht, kann auch folgendermassen dargestellt werden: Setzt man für

$$x = \varphi(u), \ y = \psi(u), \ z = \varpi(u), \text{ noch } p = f(u),$$

wo $f(u)$ willkürlich zu wählen ist, so erhält man $q = F(u)$, wo $F(u)$ vermittelst der Gleichung

$$\varpi'(u) = f(u)\varphi'(u) + F(u)\psi'(u)$$

sich durch die gegebenen Grössen ausdrücken lässt. Die Methode des Verfassers hat den Vortheil, die Unbekannten des Problems direct durch die gegebenen Grössen auszudrücken. Zum Schlusse beschäftigt sich der Verfasser mit der Aufgabe, durch eine gegebene Curve eine Minimalfläche zu legen. Ein sehr elegantes Verfahren giebt die Gleichungen der gesuchten Fläche in folgender Form

$$x = \frac{\varphi(\xi) + \varphi(\eta)}{2} - \frac{i}{2}\int_\xi^\eta \frac{\psi'(u) + F(u)\varpi'(u)}{\sqrt{1 + f(u)^2 + F(u)^2}}\, du$$

$$y = \frac{\psi(\xi) + \psi(\eta)}{2} + \frac{i}{2}\int_\xi^\eta \frac{\varphi'(u) + f(u)\varpi'(u)}{\sqrt{1 + f(u)^2 + F(u)^2}}\, du$$

$$z = \frac{\varpi(\xi) + \varpi(\eta)}{2} - \frac{i}{2}\int_\xi^\eta \frac{f(u)\psi'(u) - F(u)\varphi'(u)}{\sqrt{1 + f(u)^2 + F(u)^2}}\, du.$$

In diesen Formeln haben die Functionen $\varphi, \psi, \varpi, f, F$ die obenerwähnte Bedeutung, ξ, η sind conjugirt complexe Grössen, und der Integrationsweg ist so gewählt, dass die Integrale für $\xi = \eta$ verschwinden.

P.

S. N. JOHNSEN. Bestemmelse af Integrationsfaktor for en partiel Differentialligning. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 129-132.

Ist die linke Seite der partiellen Differentialgleichung

$$Ps + Qpq + Rp + Sq + T = 0$$

ein vollständiges Differential, so ist das Integral derselben

$$u = \int Pdz + \iint \left(T - \frac{d^2 \int Pdz}{\partial x \partial y} \right) \partial x \partial y + f(x) + \psi(y) = 0.$$

Im entgegengesetzten Falle lässt sich immer ein Integrationsfactor bestimmen. Für $P = 1$ wird derselbe, mit einer leicht zu verstehenden Bezeichnung, der folgende

$$\varphi = c.e^{\int_a^x Sd_x + \int_b^y [R]_{x=a} dy + \int_c^z [Q]_{x=a,\, y=b} dz}.$$

Gm.

MOUTARD. Sur la construction des équations de la forme

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(xy),$$

qui admettent une intégrale générale explicite. J. de l'Éc. Polyt. XXVIII. 1-12.

Die Note ist ein Auszug einer noch nicht veröffentlichten Arbeit des Verfassers bezüglich der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, über die Herr Bertrand in den Comptes Rendus 1870 Bericht erstattet hat (siehe F. d. M. II. 321) und von welcher die Einleitung in demselben Jahrgange der Comptes Rendus erschienen ist.

Das Problem, das sich der Verfasser stellt, zerfällt in 2 Theile. Der erste leichtere besteht in der Aufstellung der Bedingung dafür, dass das allgemeine Integral der im Titel befindlichen partiellen Differentialgleichung linear vermittelst zweier willkürlicher Functionen, die eine von x, die andere von y und ihrer n ersten Derivirten ausgedrückt werden könne. Der Verfasser beschränkt sich hier auf die einfache Mittheilung der Bedingungs-

gleichung für λ. Setzt man

$$\mathcal{A}_0 = \lambda, \quad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 - \frac{\partial^2 \log \mathcal{A}_0}{\partial x \partial y}, \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 - \frac{\partial^2 \log \mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1}{\partial x \partial y} \dots$$

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1} - \frac{\partial^2 \log \mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_{n-1}}{\partial x \partial y},$$

so ist für die Existenz einer solchen Integralform nothwendig und hinreichend, dass $\mathcal{A}_n = 0$, während die Ausdrücke $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1, \dots \mathcal{A}_{n-1}$ nicht verschwinden. Ist diese Bedingung erfüllt, dann kann das allgemeine Integral geschrieben werden:

$$(1) \quad z = X^{(n)} + A_1 X^{(n-1)} + \dots + A_n X + Y^{(n)} + B_1 Y^{(n-1)} + \dots + B_n Y,$$

wo X und Y willkürliche Functionen, resp. von x und von y und $A_1 \dots A_n$, $B_1 \dots B_n$ Functionen von x, y bezeichnen, die mittelst der successiven Derivirten von $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\dots$ $\mathcal{A}_{n-1}$ sich ausdrücken lassen. Der zweite schwierigere Theil des Problems betrifft die Darstellung der allgemeinsten Form von λ, welche der Differentialgleichung $\mathcal{A}_n = 0$, die von der $2n^{ten}$ Ordnung ist, genügt. Die Integration dieser Gleichung lässt sich unter endlicher Form auf recurrentem Wege bewerkstelligen, und die Ableitung dieser Integrationsmethode bildet den Gegenstand der Note. Sie gründet sich auf folgenden merkwürdigen Satz:

Kennt man die allgemeinste Form λ der Gleichung $\mathcal{A}_n = 0$ und schreibt dann den allgemeinsten Werth von z, der der Gleichung $\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda$ genügt, in der Form (1), wodurch 2 neue willkürliche Functionen eingeführt werden, dann ist $z \frac{\partial^2 \frac{1}{z}}{\partial x \partial y}$ das allgemeine Integral der Gleichung $\mathcal{A}_{n+1} = 0$. Hr.

E. Mathieu. Sur la définition de la solution simple.

C. R. LXXXVI. 962-965.

Die Bewegungsgleichung einer schwingenden Membran ist

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = m^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

wo v die Normalversetzung eines Punktes der Membran darstellt, welche noch der Bedingung zu genügen hat, dass sie in der Umgrenzung der Membran Null ist. Setzt man

$$(1) \qquad v = (A \sin\operatorname{am} t + B \cos\operatorname{am} t) u,$$

so erhält man für u

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a^2 u$$

mit der Bedingung auf der Umgrenzung zu verschwinden.

Hat man die Function u und die Constante x demgemäss gewählt, so giebt die Formel (1) die „einfache Lösung" und die Summe einer endlichen oder unendlichen Anzahl solcher einfacher Lösungen ist die allgemeine Lösung des Problems. Der Verfasser hat nun die Natur der einfachen Lösungen zum Gegenstande einer eingehenden Untersuchung gemacht und ist auf inductivem Wege zu folgendem Satze gelangt: Es giebt im Allgemeinen eine und nur eine Function, die im Innern einer beliebigen Begrenzung der Gleichung (2) genügt, daselbst sammt ihren Derivirten erster Ordnung endlich und stetig ist und in jedem Punkte des Umfangs einen willkürlich gegebenen und variablen Werth hat. Die Bedingung, dass sie auf dem Umfange Null sei, wird für einen beliebigen Werth von a das Verschwinden der Function überall im Innern zur Folge haben. Für gewisse Ausnahmewerthe des a jedoch, die in endlichen Intervallen aufeinanderfolgen, existirt eine von Null verschiedene Function, die auf der Umgrenzung verschwindet, und im Innern den vorerwähnten Bedingungen genügt. Diese Function u in (1) eingesetzt, liefert die einfache Lösung des Problems. Die Richtigkeit des Satzes vermochte der Verfasser bisher nur in den Fällen zu erweisen, wo die Umgrenzung aus einem Kreise, aus 2 concentrischen Kreisen, einem Rechtecke, einer Ellipse oder 2 confocalen Ellipsen besteht. Hr.

R. Hoppe. Eine partielle Differentialgleichung.
Grunert Arch. LXII. 336.

Als ein leichtes Uebungsbeispiel für Integration wird folgende

partielle Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ihr Integral ist:

$$\int \partial u . e^{-\int f(u)\, du} = \varphi(x) + \psi(y),$$

wo φ und ψ willkürliche Functionen sind.

Hr.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

J. J. Weyland. Die Principien der Variationsrechnung. Festschrift. Köln. 315-344.

Enthält die Grundzüge der Variationsrechnung und ihrer Anwendung auf die Bestimmung des Maximums oder Minimums.

T.

A. Mayer. Ueber das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer einzigen unabhängigen Variablen. Leipz. Ber. 1878.

Jede Aufgabe der Variationsrechnung, in der nur eine einzige unabhängige Variable vorkommt, lässt sich auf die folgende Form bringen:

A) Man soll die den m Differentialgleichungen 1ter Ordnung

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_m = 0, \quad (0 \leqq m < n)$$

unterworfenen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ als Functionen von x so bestimmen, dass das Integral

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \dots y_n, y'_1, \dots y'_n)\, dx$$

ein Maximum oder Minimum werde.

Dies Problem ist aber an sich noch nicht völlig bestimmt; man muss ihm vielmehr, um es zu einem bestimmten zu machen, noch gewisse Grenzbedingungen hinzufügen. In der Regel gestattet es nun die Stellung der Aufgabe, sämmtliche Grenzwerthe, zunächst wenigstens, als fest gegeben zu betrachten und dann stellt sich die Aufgabe als ein specieller Fall desjenigen Problems dar, welches aus A) resultirt, wenn man hinzufügt:

B) dass alle n Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und x_1 gegebene Werthe annehmen sollen.

Für das hierdurch vollständig determinirte Problem A) hat der Verfasser unter der Voraussetzung, dass es bei festen, aber unbestimmten Grenzwerthen überhaupt lösbar sei, die allgemeinen Kriterien des Maximums und Minimums in Borchardt's J. LXIX. abgeleitet. (Vergl. F. d. M. I. p. 121).

Allein es giebt eine Klasse von Problemen, die eine solche Festsetzung hinsichtlich der Grenzwerthe nicht vertragen. Es sind dies diejenigen Probleme, zu denen z. B. das Problem der Curve grösster Geschwindigkeit gehört und als deren allgemeinster Ausdruck die folgende Aufgabe angesehen werden kann.

C) Gegeben sind zwischen der unabhängigen Variabeln x und den n unbekannten Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ m Differentialgleichungen 1ter Ordnung:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \dots \varphi_m = 0, \quad (1 \leqq m < n).$$

Man soll diese Functionen so bestimmen, dass, während den Functionen $y_2, \dots y_n$ für zwei gegebene Werthe x_0 und x_1 von x gegebene Werthe vorgeschrieben sind, die Function y_1 für $x = x_0$ einen gegebenen Werth erhalte und für $x = x_1$ ein Maximum oder Minimum werde.

Hier ist es offenbar unmöglich, der Function y_1 auch für $x = x_1$ einen festen Werth vorzuschreiben. Das Problem C) kann also nicht als ein specieller Fall des Problems A, B) aufgefasst

werden, obgleich es, sobald man von den beiderseitigen Grenzbedingungen absieht, demjenigen besonderen Falle des Problems *A*) entspricht, in welchem sich die Function f auf den Differentialquotienten y'_1 reducirt. Umgekehrt dagegen erkennt man sofort, dass das Problem *A*, *B*) nur ein specieller Fall des Problems *C*) ist. Man hat daher nicht das erste, sondern das letzte Problem als das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer einzigen unabhängigen Variabeln zu betrachten.

Dieses allgemeinste Problem näher zu untersuchen, und namentlich die Kriterien des Maximums und Minimums für dasselbe aufzustellen, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes.

Mr.

G. Erdmann. Zur Untersuchung der zweiten Variation einfacher Integrale. Schlömilch Z. XXIII. 362-379.

Damit das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\, dx$$

ein Maximum oder Minimum werde, genügt es nicht, dass $y = y(x, a_1, a_2)$ die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$$

sei, wo die Integrationsconstanten a_1, a_2 durch die vorgeschriebenen Grenzwerthe zu bestimmen sind, und dass $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y' \partial y'}$ innerhalb der Integrationsgrenzen sein Zeichen nicht wechsele; sondern es muss, wie zuerst Jacobi in seiner berühmten Abhandlung im XVII. Bande des Crelle'schen J.'s angegeben hat (cfr. die Darstellung von Hesse Crelle J. LIV. 255 art. 9), noch die Bedingung erfüllt werden, dass der Quotient

$$q = \frac{r_2}{r_1} \quad \left(r_1 = \frac{\partial y}{\partial a_1}, \quad r_2 = \frac{\partial y}{\partial a_2}\right)$$

weder zwischen den Grenzen, noch für $x = x_1$ denselben Werth annehme, wie für $x = x_0$. Erstreckt sich das Integral noch wei-

ter, so bietet nach Hesse das Princip der Continuität wenigstens eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Variation ihr Zeichen wechseln könne; es lässt sich dies indessen, wie Herr Erdmann zeigt, auch genauer beweisen.

Die bei der Ableitung dieser vollständigen Kriterien angewendete Schlussweise wird ungültig, (siehe Mayer, Beiträge zur Theorie der Maxima etc. Leipzig, Teubner 1866, § 20 oder Borchardt J. LXIX.), wenn eine der Grössen r_1 und r_2 zwischen x_0 und x_1 unendlich wird; die Behandlung dieses Ausnahmefalls führt den Verfasser zu dem Resultat, dass auch dann ein Maximum oder Minimum stattfindet, wenn r_1 für einen zwischen x_0 und x_1 liegenden Werth (x) von x unendlich wird, gleichzeitig aber r_2 zwischen x_0 und x_1 weder verschwindet noch unendlich wird; verschwindet dagegen r_2 zwischen x_0 und (x) oder zwischen (x) und x_1, so findet kein Maximum oder Minimum statt. Der Fall, dass r_2 in (x) verschwindet, sowie der, dass r_1 und r_2 an einer Stelle zwischen x_0 und x_1 unendlich wird, bleibt unerledigt.

Die vorliegende Arbeit verfolgt ausserdem noch einen andern Zweck. Für den Fall variabler Grenzwerthe ist bisher nur der Weg angegeben worden, auf dem man zu den Kriterien des Maximums und Minimums des Integrals gelangen kann; nach Herrn Mayer (l. c. § 21) sieht man zunächst die Grenzwerthe als gegeben an, bestimmt den Maximal- oder Minimalwerth des Integrals als Function der Grenzwerthe und sucht endlich von dieser Function das Maximum oder Minimum in Bezug auf die Grenzwerthe. Da der Verfasser überdies diese Methode für nicht unbedingt genau hält, stellt er für diese allgemeine Aufgabe (mit Ausschluss des singulären Falles, dass r_1 und r_2 nicht endlich bleiben) explicite Formeln auf. Auf Grund der für diesen Fall nothwendig werdenden Verallgemeinerung der Reductionsformel der zweiten Variation werden die Kriterien, die zu der obigen, auf den Fall gegebener Grenzwerthe bezüglichen, hier noch hinzutreten müssen, zunächst für gegebene x_0, y_0 und variable x_1 y_1 (sei es, dass zwischen x_1 und y_1 keine oder eine Bedingungsgleichung besteht) dann für variable obere und untere Grenzen abgeleitet. Im letztern Falle z. B. lautet die nothwendige Bedin-

gung für ein Minimum: Der Ausdruck

$$\left\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial y'} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\cdot\frac{u'}{u}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta x\,\delta y + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta x\,\delta y' + \frac{d\varphi}{dx}\delta x^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta^2 y + \varphi\,\delta^2 x\right\}_0^1,$$

wo $u = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2$ ist, muss positiv sein für alle Werthe von δx_0 und δx_1 und für alle diejenigen Werthe von δy_0 und δy_1, die verschiedenes Zeichen haben, wobei die in u vorkommenden Constanten γ_1 und γ_2 alle Werthe erhalten können, für welche u an einem zwischen x_0 und x_1 gelegenen Punkte verschwindet; ferner muss derselbe Ausdruck positiv sein für alle Werthe von δx_0 und δx_1 und für diejenigen Werthe von δy_0 und δy_1, welche gleiches Zeichen haben, wobei γ_1 und γ_2 so zu bestimmen sind, dass $u_0 : u_1 = \delta y_0 : \delta y_1$.

Die erhaltenen Kriterien werden auf die Lösung der Aufgaben angewendet: Von einem Punkte einer Curve aus einen Faden von gegebener Länge, dessen zweiter Endpunkt auf der Curve beweglich ist, so zu legen, dass der Flächenraum, den er mit derselben einschliesst, ein Maximum wird; Von einem gegebenen Punkte an eine gegebene Curve und zwischen zwei Curven die kürzeste Linie zu ziehen. T.

M. G. Sabinine. Développements analytiques pour servir à compléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples. Darboux Bull. (2) II. 100-123.

Es handelt sich um die Discussion der zweiten Variation eines bestimmten vielfachen Integrals, welches unter dem Integralzeichen ausser den unbekannten Functionen die partiellen Derivirten erster Ordnung derselben enthält, in dem bisher noch nicht erledigten Falle, dass die Variationen der unbekannten Functionen, die das Integral zu einem Maximum oder Minimum machen, an den Integrationsgrenzen nicht verschwinden. Es werden beide Theile der 2ten Variation, der nicht integrable Theil und der, welcher sich auf die Integrationsgrenze bezieht, so umgeformt,

dass die Ausdrücke unter dem Integralzeichen ganze homogene Functionen zweiten Grades von Argumenten sind, die in linearer Weise von den Variationen der unbekannten Functionen und ihren ersten Derivirten abhängen. Hr.

F. MINDING. Théorie des courbes du plus petit périmètre sur des surfaces courbes. Bull. St. Pétersb. XXV.

Der Aufsatz enthält Ergänzungen zu den früheren Untersuchungen des Verfassers über denselben Gegenstand, siehe F. d. M. VIII. p. 225. P.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

D. Bierens de Haan. Jets over de „Théorie des fonctions des variables imaginaires par M. Marie."
Nieuw Arch. IV. 95-99.

Fortsetzung und Schluss früherer Aufsätze. Siehe F. d. M. IX. p. 283. G.

W. F. Schüler. Neue Theorie des Imaginären in der Functionenrechnung und der analytischen Geometrie.
Pr. Freising.

Nach Ansicht des Herrn Verfassers liess die richtige geometrische Darstellung der Functionen einer complexen Variabeln bisher Manches zu wünschen übrig. „Der Hauptgrund zu dieser Erscheinung ist wohl in dem Umstande zu suchen, dass man in der analytischen Geometrie das Imaginäre nicht ausreichend zu interpretiren und zu veranschaulichen vermochte." Ein „eigenthümlich neues Licht" wird nun über die den Ausgangspunkt der höheren Analysis bildenden Functionen verbreitet durch die von Herrn Schüler gegebene neue geometrische Darstellung des Imaginären, welche in Folgendem besteht: „Da die Cartesische

Coordinatenebene durch das Reelle vollständig occupirt ist, so kann das Imaginäre auf derselben niemals adäquat gegeben werden.“ Deshalb werden die sechs Elemente des complexen Punktes

$$X = x + \sqrt{-\xi^2},\quad Y = y + \sqrt{-\eta^2},\quad Z = z + \sqrt{-\zeta^2}$$

im Raume, d. h. die drei reellen Zahlen x, y, z und die drei von der imaginären Einheit afficirten reellen Zahlen ξi, ηi, ζi, durch die 6 anderen

$$x, y, z, \frac{\eta}{\xi}, \frac{\zeta}{\xi}, \sqrt{-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}$$

ersetzt. Die drei ersten Zahlen bestimmen die Lage eines Punktes im Raume, die beiden folgenden eine Richtung, die diesem Punkte adjungirt wird, und die letzte Zahl, welche allein mit der imaginären Einheit behaftet ist, stellt die Strecke dar, die man von dem Punkte xyz auf jener Richtung aufzutragen hätte, um den durch die Coordinaten X, Y, Z gegebenen imaginären Punkt zu erhalten. Man bewerkstelligt diese Darstellung am einfachsten, wenn man den Punkt xyz als Anfangspunkt eines neuen, dem zu Grunde gelegten parallelen Coordinatensystems betrachtet und in diesem den Punkt mit den Coordinaten $\xi\eta\zeta$ construirt. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Punkte xyz giebt die Richtung, die dem letzteren Punkte adjungirt ist, und eine Entfernung von diesem, behaftet mit dem Coefficienten $\sqrt{-1}$, giebt das sechste Element, welches die Potenz des Punktes xyz genannt wird. Inwiefern diese neue Darstellung des Imaginären geeignet sein sollte, ein neues Licht auf die Fundamente der Functionentheorie zu werfen, ist uns nach Durchsicht der Anwendungen, die der Herr Verfasser davon macht, nicht ersichtlich gewesen. Es genüge, zur Charakterisirung der Arbeit folgenden Satz anzuführen. Der Verfasser sagt (p. 5) wörtlich: „Wir haben durch unsere Conception des Imaginären eine ganz neue und allgemeine Definition der abgeleiteten Function gewonnen, welche von infinitesimalen Betrachtungen ganz frei und viel allgemeiner ist, und die Stetigkeit der Function nicht zur Voraussetzung hat. Dieselbe lautet: Jede Function, welche Gültigkeit besitzt für complexe Werthe des Arguments, so dass sie in einen reellen und

einen imaginären Bestandtheil zerfällt, hat eine abgeleitete Function. Man versteht darunter das Verhältniss des imaginären Bestandtheils der Function zu dem imaginären Bestandtheil des Arguments. Nach unserer Definition der abgeleiteten Function ist nun auch klar, dass die Existenz stetiger Functionen ohne Ableitung keine ergreifende Thatsache mehr ist. Die Ableitung hat mit der Stetigkeit gar nichts zu thun." M.

U. Dini. Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa.

Das vorliegende Werk giebt die Darstellung der Principien der Infinitesimalrechnung nach streng arithmetischer Methode, wozu den Herrn Verfasser zunächst theils Mittheilungen des Herrn Schwarz über die Vorlesungen von Weierstrass, theils das Studium der Arbeiten von Hankel, Dedekind, G. Cantor, Heine anregten. Die ersten neun Capitel wurden bereits 1875 gedruckt; der übrige Theil seit Anfang 1877, nachdem dem Verfasser inzwischen mehrere Arbeiten, insbesondere von du Bois-Reymond, Thomae, Darboux, die Einschlägiges enthalten, bekannt geworden waren. Dadurch hat die Anordnung des Stoffes etwas gelitten und sind auch einige Wiederholungen nothwendig geworden. Das Werk zeichnet sich durch consequente Anwendung der strengen Methode aus und bietet ausserdem viel Neues, wovon in der folgenden Inhaltsübersicht einiges hervorgehoben werden möge.

Das erste Capitel behandelt die Theorie der irrationalen Zahlen nach Dedekind, das zweite die Theorie der von G. Cantor eingeführten unendlichen Punktmengen, das dritte den exacten Begriff des Grenzwerthes. (Denselben scheint zuerst B. Bolzano angewandt zu haben; vgl. z. B. dessen: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes u. s. w. Prag 1817 p. 32 ff.). Dann geht der Verfasser über zum Begriffe der Function einer reellen Veränderlichen, erklärt die Stetigkeit und die Unstetigkeiten derselben, wobei eine genaue Definition des Sprunges einer unstetigen Function in einem gegebenen Punkte aufgestellt wird. Nachdem er

im fünften Capitel die Eigenschaften der stetigen Functionen entwickelt hat, wendet er sich zu den unendlich oft unstetigen Functionen, welche nach Hankel (vergl. F. d. M. II., p. 190) in punktirt- und total-unstetige zerfallen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine in dem Intervalle (a, b) definirte Function zur ersteren Klasse gehöre, ist, dass in jedem Theile dieses Intervalles ein anderes vorhanden sei, in welchem die Sprünge durchaus kleiner seien, als irgend eine gegebene Zahl. Daher gehören zu dieser Klasse alle endlichen Functionen von der Art, dass in jedem Theile des Intervalles (a, b) Punkte x vorhanden sind, für welche Grenzwerthe $f(x-0)$ und $f(x+0)$ existiren.

Das siebente Capitel beschäftigt sich mit den Ableitungen der Functionen, das achte mit den unendlichen Reihen. Der Verfasser führt den Begriff der einfachen Convergenz im gleichen Grade ein und beweist einige bisher nicht bekannte Sätze über Reihen, deren Glieder von einer Veränderlichen abhängen. Z. B.: Sind die Glieder und die Summe der unendlichen Reihe ΣU_n positiv und stetige Functionen von x im ganzen Intervalle (a, b), so convergirt die Reihe im genannten Intervalle gleichmässig.

Im neunten Capitel wird Hankel's Princip der Condensation der Singularitäten begründet, im zehnten eine Klasse von stetigen Functionen aufgestellt, welche in keinem Punkte eine bestimmte und endliche Ableitung besitzen und wovon Weierstrass' bekannte Function ein specieller Fall ist (vergl. F. d. M. IX. p. 302). Das elfte Capitel enthält Untersuchungen über die stetigen Functionen, insbesondere mit Rücksicht auf die Existenz der Ableitung. Bezeichnet man die beiden Unbestimmtheits-Grenzen des Quotienten $\{f(x+h)-fx\}:h$ für lim. $h=+0$ mit Λ_x, λ_x, die für lim. $h=-0$ mit Λ'_x, λ'_x, so lässt sich zeigen, dass diese vier Functionen, während x das ganze Intervall (a, b) durchläuft, dieselbe obere (Λ) und dieselbe untere Grenze (λ) besitzen, zwischen welchen sich auch alle Werthe des genannten Quotienten selbst befinden, wenn für x und $x+h$ irgend zwei Werthe des Intervalles (a, b) gesetzt werden. Es zerfallen nun

die im Intervalle (a, b) stetigen Functionen $f(x)$ in zwei Klassen, je nachdem mindestens eine der Zahlen $\varLambda$, λ endlich oder $\varLambda = +\infty$, $\lambda = -\infty$ ist. Die Functionen der ersten Art lassen sich durch Hinzufügung eines linearen Ausdruckes $\mu x + \nu$ auf solche zurückführen, die im Intervalle (a, b) beständig entweder zu- oder abnehmen; während für die Functionen der zweiten Art ein solcher Ausdruck nicht existirt, wesswegen sie „oscillanti irreducibili“ heissen. Wenn ausserdem eine Function erster Art im Intervalle (a, b) nicht unendlich viele Maxima und Minima hat (oder wenigstens unter den Functionen $f(x) + \mu x + \nu$ nur eine endliche Anzahl mit unendlich vielen Maxima und Minima behaftet ist), so existirt in unendlich vielen Punkten eines jeden Theiles des gegebenen Intervalles eine Ableitung und zwar von endlichem Werthe. Bestimmter lautet der folgende Satz: „Damit eine stetige Function $f(x)$ in einem Punkte x_0 eine Ableitung nach rechts (d_{x_0}) besitze, ist nothwendig und hinreichend, dass unter den Functionen $f(x) + \mu x + \nu$ höchstens eine sei, welche, auf der rechten Seite des Punktes x_0 betrachtet, in diesem Punkte weder zu- noch abnimmt“. Diese Forderung ist immer erfüllt, wenn unter allen Functionen $f(x) + \mu x + \nu$ keine oder doch nur eine endliche Anzahl solcher sich befindet, welche in jedem Intervalle $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, unendlich viele Maxima und Minima besitzen. Nimmt man aber noch weiter an, dass in allen Punkten des Intervalles $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ Ableitungen nach rechts d_x existiren, so hat d_x für lim. $x = x_0 + 0$ den Grenzwerth d_{x_0} und da in einem Punkte, in dessen Umgebung nach rechts, wie klein sie auch sei, die Function unendlich viele Maxima und Minima besitzt, die Ableitung verschwinden muss, wenn der eben erwähnte Grenzwerth von d_x vorhanden ist, so kann unter den Functionen $f(x) + \mu x + \nu$ höchstens nur eine sich befinden, welche in jedem Intervalle $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ unendlich viele Maxima und Minima hat, nämlich diejenige, für welche $\mu = -d_{x_0}$, so dass die Zahl d_{x_0} endlich sein muss. Sind endlich in allen Punkten des Intervalles $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ mit Ausschluss von x_0 Ableitungen nach links d'_x vorhanden, so hat auch d'_x für lim. $x = +0$ den Grenzwerth d_{x_0}. Fasst man alles dieses zusammen, so folgt der Satz: „Ist $f(x)$ im ganzen

Intervalle (a, b) stetig, und hat von den Functionen $f(x)+\mu x+\nu$ höchstens nur je eine in jeder Umgebung auf einer der beiden Seiten eines beliebigen Punktes x des Intervalles unendlich viele Maxima und Minima, so hat $f(x)$ in jedem Punkte x Ableitungen nach rechts und nach links d_x, d'_x. Dabei ist durchaus

$$d_{x+0} = d'_{x+0} = d_x, \quad d_{x-0} = d'_{x-0} = d'_x.\text{“}$$

Die zweite Hälfte des Buches ist der Theorie der bestimmten Integrale gewidmet. Hankel's Bedingung der Integrabilität einer endlichen Function (l. c.), innerhalb des Integrationsintervalles punktirt-unstetig zu sein, hält der Verfasser mit Recht nur für nothwendig, nicht aber für hinreichend. Ausser denjenigen Functionen, die schon Riemann und Darboux (vergl. F. d. M. VII. p. 245) als integrabel erkannten, sind es ferner alle endlichen Functionen von der Art, dass in allen Punkten x des Integrationsintervalles (mit Ausnahme eines unendlichen Punktsystemes von ν^{ter} Ordnung) mindestens Grenzwerthe von $f(x)$ auf einer und derselben Seite von x (d. i. alle $f(x-0)$ oder alle $f(x+0)$) existiren.

Auf die Untersuchung über die Integrabilität von endlichen Functionen folgt eine genaue Darstellung der Haupteigenschaften der Integrale solcher Functionen. Es wird u. A. gezeigt, dass der Werth des Integrales dadurch nicht geändert wird, dass die Werthe der Function in den Punkten eines unendlichen Systemes von ν^{ter} Ordnung abgeändert werden. Der Satz

$$\int_a^b d_x dx = F(b) - F(a)$$

besteht, wenn die stetige Function $F(x)$ im Intervalle (a, b) nach der rechten Seite die Ableitung d_x besitzt, welche eine integrable Function ist. Hat sie auch eine Ableitung nach der linken Seite d'_x, so ist auch diese Function integrabel, und man hat

$$\int_a^b d_x . dx = \int_a^b d'_x . dx.$$

Ebenso sorgfältig durchgeführt ist die Untersuchung solcher Integrale, die zunächst als Grenzwerthe von Integralen endlicher

Functionen über endliche Intervalle erscheinen; sei es, dass die Function aufhört in dem Intervalle endlich zu sein oder dass dieses selbst unendlich ist. Im letzteren Falle lässt sich das Integral auch als Grenzwerth der Summe einer unendlichen Reihe definiren:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\delta_s=0} \sum_1^\infty {}_s \delta_s f(x_s)$$

$$a+\delta_1+\cdots+\delta_{s-1} \leqq x_s \leqq a+\delta_1+\cdots+\delta_s,$$

wenn das zweite Glied der Gleichung einen bestimmten endlichen Werth hat.

Am Schlusse des Werkes sind noch erörtert die partielle Integration, die Substitution der Integrationsveränderlichen, die Integration unendlicher Reihen und die Grenzwerthe von $\int_a^b f(x, \lambda)dx$ in Bezug auf λ. In den beiden ersten Capiteln spielen wieder die Unbestimmtheitsgrenzen Λ_x, λ_x etc. eine wichtige Rolle; für das letzte ist wesentlich der Begriff der gleichmässigen Convergenz von $f(x, \lambda)$ gegen den Grenzwerth $\lim. f(x, \lambda)$ für $\lim. \lambda = \lambda_0 \pm 0$. St.

J. Thomae. **Sätze aus der Functionentheorie.** Gött. Nachr. 1878. 466-468.

Herr G. Cantor hat in den „Beiträgen zur Mannigfaltigkeitslehre“ (Borchardt J. LXXXIV. siehe F. d. M. IX. 379) gezeigt, wie man eine stetige lineare Mannigfaltigkeit von n Dimensionen einander eindeutig zuordnen kann, wenn der Correspondenz die Bedingung nicht auferlegt wird, eine stetige zu sein. Der umgekehrte, für $m = 1$, $n > 1$ evidente Satz, dass man zwei solche Mannigfaltigkeiten einander in stetige Correspondenz nicht eindeutig zuordnen kann, ist von Herrn Lüroth (Erl. Ber. 1878) für den Fall $m = 2$ bewiesen. Im Vorliegenden zeigt Herr Thomae, wie der Beweis des allgemeinen Satzes, unter Voraussetzung eines Satzes aus der analysis situs, ohne Schwierigkeit geführt werden könne. M.

G. Darboux. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série. Liouville J. (3) IV. 5-57, 377-417.

Nach den Resultaten Dirichlet's lässt sich jede Function von der Natur derjenigen, die gewöhnlich in der Analysis angewendet werden, in eine trigonometrische Reihe entwickeln, sobald sie endlich bleibt oder sobald sie, für eine oder mehrere Veränderliche, unendlich wird von einer Ordnung, die kleiner als 1, so dass ihr Integral endlich bleibt. Seit Dirichlet's berühmter Abhandlung hat man die Frage nach der Grösse der Glieder der Reihe, aus der man früher die Berechtigung der Entwickelbarkeit in eine trigonometrische Reihe ausschliesslich folgerte, wieder ein wenig vernachlässigt. In der vorliegenden Abhandlung stellt nun Herr Darboux zunächst genaue Kennzeichen für die Ordnung der Grösse der Glieder einer trigonometrischen Reihe auf und wendet dann die erhaltenen Resultate auf das Studium einer wichtigen Frage an, die sich Laplace in seinem „Calcul des probabilités" gestellt, und für welche er eine berühmte Methode gegeben hat: nämlich die Frage nach dem Näherungswerthe der Functionen sehr grosser Zahlen, wie man sie bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Mechanik des Himmels antrifft. Die Mehrzahl der Functionen von sehr grossen Zahlen treten als Coefficienten der Potenzen von x in der Reihe

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

auf. Aber es genügt, in solchen Reihen das x durch $Re^{i\omega}$ zu ersetzen und ω als einzige Variable anzusehen, um eine trigonometrische Reihe zu erhalten; und nun handelt es sich um die angenäherte Bestimmung der Coefficienten einer solchen Reihe. Unter den Anwendungen, welche Herr Darboux von seiner Methode macht, sind folgende hervorzuheben: 1) die näherungsweise Bestimmung der Legendre'schen Polynome; 2) die Annäherung der n^{ten} Ableitungen von $(1-x^2)^{-\alpha}$, $(1+x^2)^{-\alpha}$, und allgemein von $(x-a_1)^{\alpha_1}, \ldots (x-a_p)^{\alpha_p}$, wo die $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ ganz beliebig sind; 3) wird bei der Auswerthung des Integrals

$$\int f(x)\,\varphi^n(x)\,.\,dx$$

das Resultat von Laplace auf den Fall ausgedehnt, wo die Functionen f und φ, ebenso wie auch die Grenzen des Integrals imaginär sind; 4) die Annäherung des allgemeinen Gliedes der Reihe von Lagrange

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \varphi^n(x).$$

5) die näherungsweise Bestimmung derjenigen Polynome, die aus der hypergeometrischen Reihe entstehen und von Jacobi und Tchébychef studirt worden sind. Mit Hülfe des letzten Resultates löst der Herr Verfasser folgende Frage: Es lassen sich die Polynome der hypergeometrischen Reihe in den Reihen-Entwickelungen anwenden; man kann eine Function durch eine Reihe darstellen, die aus diesen, den Legendre'schen Polynomen ganz und gar ähnlichen zusammengesetzt ist; ist diese Reihe convergent und stellt sie diese Function wirklich dar? Die Behandlung dieser Frage führt zu neuen Resultaten für die Theorie der trigonometrischen Reihen. M.

G. Macher. Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0$.

Halle. Nebert.

Bezeichnet S das Gebiet aller Werthsysteme der Variablen $x_1\, x_2 \ldots x_n$, welche der Relation $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} x_\nu^2 \gtreqless R^2$ genügen, und O die Begrenzung des Gebietes S, so dass O die Totalität aller Werthsysteme bedeutet, für welche $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} x_\nu^2 = R^2$ ist, so wird folgender Satz bewiesen:

Es giebt immer eine und nur eine reelle Function u der n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, die für das ganze Gebiet S, einschliesslich dessen Begrenzung, einwerthig und stetig ist und für die Begrenzung vollständig mit einer für dieselbe willkürlich angenommenen allenthalben stetigen Function übereinstimmt. Ferner sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Function u für das Innere dieses Gebietes einwerthig und stetig, und die

zweiten partiellen Derivirten genügen ausserdem noch der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{d^2u}{dx_\nu^2} = 0.$$

Nach Analogie der Polarcoordinaten in der Ebene und im Raume werden die Variabeln $x_1 \dots x_n$ in der Form dargestellt:

$$x_1 = r\cos\varphi_1, \quad x_\varkappa = r\left(\prod_{\nu=1}^{\nu=\varkappa-1} \sin\varphi_\nu\right)\cos\varphi_\varkappa, \quad x_n = r\prod_{\nu=1}^{\nu=n-1}\sin\varphi_\nu,$$
$$\varkappa = 2, 3 \dots n-1,$$

wo

$$0 \leqq r \leqq R \quad \text{und} \quad \varphi_1 \dots \varphi_{n-2}$$

im Intervalle von 0 bis π, φ_{n-1} im Intervalle von 0 bis 2π sich bewegen. Das Element dS des Gebietes S wird alsdann

$$dS = \prod_{\nu=1}^{\nu=n} dx_\nu = r^{n-1}\left(\prod_{\nu=1}^{\nu=n-2} \sin^{n-\nu-1}\varphi_\nu d\varphi_\nu\right) d\varphi_{n-1}\, dr$$

und das Grenzelement dO

$$dO = R^{n-1}\left(\prod_{\nu=1}^{\nu=n-2} \sin^{n-\nu-1}\varphi'_\nu d\varphi'_\nu\right) d\varphi'_{n-1}.$$

($R, \varphi'_1 \dots \varphi'_{n-1}$ der Modul und die Argumente der Grenzpunkte). Definirt man endlich die Grösse ϑ durch die Gleichung

$$\cos\vartheta = \cos\varphi_1\cos\varphi'_1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n-2}\left(\cos\varphi_{\nu+1}\cos\varphi'_{\nu+1}\prod_{k=1}^{k=\nu}\sin\varphi_k\sin\varphi'_k\right)$$
$$+ \prod_{\nu=1}^{\nu=n-1}\sin\varphi_\nu\sin\varphi'_\nu,$$

so lautet die Darstellung der Function u

$$u(x_1 \dots x_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int^{n-1} \frac{u'(R^2 - r^2)\, dO}{R(R^2 - 2Rr\cos\vartheta + r^2)^{\frac{n}{2}}},$$

wo u' die willkürlich anzunehmende Function auf der Begrenzung O des Gebietes S bezeichnet, und die $(n-1)$fache Integration sich über die ganze Begrenzung O erstreckt.

Für $n = 2$ und $n = 3$ geht diese Darstellung in die bekannten Formeln über, durch welche eine Function innerhalb eines Kreises oder einer Kugel dargestellt wird, wenn sie resp. den

Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

genügen und am Rande des Kreises oder an der Oberfläche der Kugel mit einer daselbst willkürlich angenommenen Function übereinstimmen soll. Hr.

K. Weierstrass. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Berl. Abh. 1876. 11-60.

Lässt sich eine eindeutige Function $f(x)$ für alle x, wofür der absolute Betrag $(x-a)$ kleiner als ein gewisser Grenzwerth ist, in eine Reihe von der Form

$$A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots$$

entwickeln, so sagt man, die Function verhält sich in der Umgebung der Stelle a „regulär“; jede Stelle a' aber, in deren Umgebung sich $f(x)$ nicht regulär verhält, heisst eine „singuläre“ Stelle, und zwar eine „ausserwesentliche singuläre“ Stelle, wenn man $f(x)$ durch Multiplication mit einer ganzen Potenz von $(x-a')$ zu einer sich regulär verhaltenden Function machen kann, eine „wesentliche singuläre“ Stelle aber, wenn dies nicht möglich ist. Die charakteristische Eigenthümlichkeit der rationalen eindeutigen Functionen einer Veränderlichen besteht darin, dass es für sie nur ausserwesentliche singuläre Stellen giebt. Als diesen rationalen Functionen am nächsten stehend wird man diejenigen eindeutigen Functionen anzusehen haben, welche eine endliche Anzahl wesentlicher singulärer Stellen haben; und alle diejenigen eindeutigen Functionen, bei denen die Anzahl solcher wesentlicher singulärer Stellen dieselbe ist, gehören Einer Gattung an. Nun lässt sich jede eindeutige Function ohne wesentliche singuläre Stellen als Quotient zweier ganzen rationalen Functionen darstellen. Eine analoge Abhängigkeit des Functionswerthes von dem Werthe der Veränderlichen auch für die eindeutigen Functionen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen zu ermitteln: das ist die Aufgabe, welche Herr Weierstrass in der vorliegenden Abhandlung vollständig gelöst hat. — Hat eine

eindeutige Function für das ganze Gebiet der Veränderlichen nur Eine Stelle, in deren Umgebung sie nicht regulär ist, und liegt diese Stelle im Unendlichen, so lässt die Function sich in der Form

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots$$

darstellen, und umgekehrt ist jede solche Reihe, die für jeden endlichen Werth von x convergirt, der Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit nur einer singulären Stelle ∞. Eine solche Function $G(x)$ heisst eine ganze Function; rational ist sie, wenn die Stelle ∞ eine ausserwesentliche singuläre, transcendent, wenn die Stelle ∞ eine wesentliche singuläre Stelle ist. Unter denjenigen Werthen x, die absolut genommen, eine willkürlich angenommene Grenze nicht übersteigen, giebt es stets nur eine endliche Anzahl, für welche eine ganze Function gleich Null ist. Hierbei ist zu bemerken, dass jeder Werth, für den ausser der Function auch die $(\mu-1)$ ersten Ableitungen verschwinden, μ mal zu zählen ist. Bildet man nun aus den Werthen von x, für die eine eindeutige ganze Function verschwindet, eine Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$ der Art, dass 1) jeder Werth so oft vorkommt, als er nach der eben gemachten Festsetzung zu zählen ist, 2) für je 2 aufeinanderfolgende Glieder

$$|a_{n+1}| \geqq |a_n|$$

ist, 3) im Falle die Reihe nicht abbricht,

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty,$$

so möge diese Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$ die Reihe der „Null-Stellen" heissen. Alle ganzen Functionen, welche dieselben Null-Stellen haben, wie eine gegebene Function $G(x)$, sind enthalten in dem Ausdruck

$$G(x).e^{\bar{G}(x)},$$

wo $\bar{G}(x)$ eine willkürlich anzunehmende ganze Function bedeutet. Ferner existirt wirklich stets eine Function $G(x)$, für welche eine gegebene Reihe bestimmter Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ von der eben angegebenen Beschaffenheit in dem festgestellten Sinne die Reihe der Null-Stellen bildet. Dieser Satz wird hier zum ersten Male in befriedigender Weise bewiesen und damit eine wesentliche Lücke in der Theorie der ganzen transcendenten Functionen aus-

gefüllt. Nachdem dieses bewiesen, führt die Frage nach dem analytischen Ausdruck der eindeutigen Functionen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen zu folgenden Resultaten: A. Der allgemeine Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit nur einer (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stelle (c) ist

$$G\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

wo für den Fall, dass $c=\infty$, $\frac{1}{x-c}$ die Bedeutung von x hat. Die singuläre Stelle ist eine wesentliche oder ausserwesentliche, je nachdem G eine transcendente oder eine rationale ganze Function von x ist. B. Der allgemeine Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit n (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stellen $(c_1 \ldots c_n)$ kann in mannigfaltiger Weise aus n Functionen mit je einer singulären Stelle zusammengesetzt, am einfachsten aber in den nachstehenden Formen aufgestellt werden:

$$(1)\quad \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right); \qquad (2)\quad \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)\cdot R^*(x),$$

wo $R^*(x)$ eine rationale Function bedeutet, welche nur an den wesentlichen singulären Stellen Null und unendlich gross wird. C. Jede eindeutige Function von x, welche n wesentliche singuläre Stellen $(c_1 \ldots c_n)$ und ausser diesen noch beliebig viele (auch unendlich viele) ausserwesentliche hat, kann in jeder der beiden nachstehenden Formen:

$$(1)\quad \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} \qquad (2)\quad \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}\cdot R^*(x)$$

ausgedrückt werden, und zwar dergestalt, dass Zähler und Nenner für keinen Werth von x beide verschwinden. Umgekehrt stellt, wenn die Functionen $G_1, \ldots G_{2n}$ willkürlich angenommen werden, jeder dieser Ausdrücke eine eindeutige Function von x dar, welche im Allgemeinen n, in speciellen Fällen auch weniger als n wesentliche singuläre Stellen hat, wobei die Anzahl der ausserwesent-

lichen singulären Stellen, an denen die Function unendlich wird, unbeschränkt ist. M.

S. Pincherle. Relazioni fra i coefficienti e le radici di una funzione intera trascendente. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 391-398.

Eine ganze transcendente Function ist eine solche, welche für alle endlichen Werthe der Veränderlichen eindeutig, endlich und stetig ist; sie lässt sich nach ganzen positiven Potenzen der complexen Veränderlichen in eine beständig convergente Reihe entwickeln. Unter Wurzeln oder Nullstellen einer solchen Function werden die endlichen Werthe der Veränderlichen verstanden, für welche die Function Null wird. Nun lässt sich, nach Weierstrass (siehe das vorige Referat) jede ganze Function mit einer endlichen oder unendlichen Zahl von Nullstellen als Product von Functionen derselben Gattung, deren jede nur eine Nullstelle hat, darstellen. Da diese Darstellung analog ist der Zerlegung einer ganzen rationalen Function in lineare Factoren, so kann man die Frage aufwerfen, ob solche, den bekannten Relationen zwischen den Wurzeln und den Coefficienten rationaler Functionen analoge Beziehungen auch für die ganzen transcendenten Functionen gelten. Diese Frage wird im Vorliegenden beantwortet. Die ganze Function habe die Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

und ihre Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p \dots$ seien folgenden Bedingungen unterworfen: 1) seien die α_n von Null verschieden, ihre Anzahl sei unendlich; 2) sei $|\alpha_n| \leqq |\alpha_{n+1}|$, und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{\alpha_n} = 0$; 3) sei für jede ganze Zahl μ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^{\mu+1}}$ unbedingt convergent, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^k}$, wo $k > \mu+1$, auch unbedingt convergent. Die allgemeine Form von $f(x)$ ist

$$f(x) = \varphi(x) \cdot e^{F(x)},$$

$$\varphi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{\mu} \frac{1}{k} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Setzt man

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\sum_{k=1}^{\infty} s_{k+1} x^k,$$

so wird

$$s = \begin{cases} 0 & \ldots k \leqq \mu \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^k} & \ldots k > \mu, \end{cases}$$

und die gesuchten Relationen haben die Form:

$$s_1 c_n + s_2 c_{n-1} + \cdots + s_n c_1 + s_{n+1} = -(n+1) c_{n+1}.$$

Die Coefficienten der Function

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

sind mit den c_n und den Coefficienten der Reihe

$$e^{F(x)} = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots$$

durch die Gleichungen

$$a_0 = m_0, \quad a_1 = m_0 c_1 + m_1, \quad a_2 = m_0 c_2 + m_1 c_1 + m_2, \ldots$$

verbunden. Zum Schluss wird die Frage für den Fall behandelt, wo die dritte Bedingung, dass eine Zahl μ existirt, für welche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^{\mu+1}}$ unbedingt convergirt, nicht erfüllt ist. In diesem Falle enthalten die betreffenden Relationen nur eine begrenzte Zahl von Reciproken der Wurzeln. M.

E. Picard. Sur une classe de fonctions transcendantes. C. R. LXXXVI. 657-660.

Es sollen alle eindeutigen Functionen einer Veränderlichen z gesucht werden, welche den Gleichungen

$$f(z+\omega) = f(z), \quad f(z+\omega') = f(z) \,.\, S(z)$$

genügen, wo $S(z)$ eine doppeltperiodische Function mit den Perioden ω, ω' ist. Dieses geschieht mit Hülfe der Function $F(z)$, die den Bedingungen

$$F(z+\omega) = F(z), \quad F(z+\omega') = F(z)\, e^{-\frac{2\alpha\pi i}{\omega}} S(z)$$

genügt, und deren allgemeine Form

$$F(z) = C.e^{\int_{z_0}^{z} \left[\frac{S'(z)}{S(z)} - \frac{2\alpha\pi i}{\omega}\right] \Pi(z)\, dz}$$

ist, wo

$$\Pi(z) = G + \sum_h [A_1^h D \log \vartheta_1(z-\alpha_h) + \cdots + A_p^h D^p \log \vartheta_1(z-\alpha_h)]$$

und

$$\vartheta_1(z) = \theta\left(z + \frac{\omega - \omega'}{2}\right)$$

ist, unter θ, abgesehen von einem constanten Factor, eine der Jacobi'schen Functionen verstanden. M.

H. Laurent. Sur le calcul inverse des intégrales définies. Liouville J. (3) IV. 225-246.

Das einfachste der hier behandelten Probleme besteht darin, eine Function $\varphi(x)$ zu finden, so dass man hat

$$\int_a^b \varphi(x) . dx = 0.$$

Die allgemeinste Lösung desselben lautet

$$\varphi(x) = f(x) - \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx,$$

worin $f(x)$ eine willkürliche Function von x bezeichnet.

Soll $\varphi(x)$ den Gleichungen

$$\int_a^b \varphi(x).dx = 0, \quad \int_a^b x\varphi(x)\, dx = 0 \ldots \int_a^b x^{n-1}\varphi(x)\, dx = 0$$

genügen, so findet man

$$(1) \qquad \varphi(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left\{(x-a)^n (x-b)^n \psi(x)\right\},$$

wobei $\psi(x)$ eine Function bedeutet, die weder für $x = a$, noch für $x = b$ unendlich wird. Das Studium der Ausdrücke (1) für die Annahmen

$$\psi(x) = \text{const.} (x-a)^r (x-b)^s$$

führt zur Integration gewisser linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. So ist das vollständige Integral von

$$\frac{d^2U}{dx^2}(x-a)(x-b) + \frac{dU}{dx}(2x-a-b) - n(n+1)\, U = 0,$$

$$U = A\, \frac{d^n(x-a)^n (x-b)^n}{dx^n} + B \int_a^b \frac{(z-a)^n (z-b)^n}{(z-x)^{n+1}} dz.$$

Der Verfasser betrachtet weiter die Gleichungen (1) falls

$$a = -\infty,\ b = +\infty.$$

Dann kann man setzen

$$\varphi(x) = \frac{d^n . e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2} . U_n.$$

Die ganzen Functionen U_n, bereits von Hermite untersucht, genügen auch einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche ebenfalls das allgemeine Integral aufgestellt wird.

Es werden ferner die Lösungen der Gleichungen

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = g_0,\quad \int_a^b x\varphi(x).\,dx = g_1, \ldots \quad \int_a^b x^n\varphi(x)\,dx = g_n$$

ermittelt, wenn $g_0\, g_1 \ldots g_n$ gegebene Zahlen bezeichnen. Dabei genügt es, eine derselben zu kennen, indem sich daraus die übrigen durch Hinzufügung des Ausdruckes (1) ergeben.

St.

P. du Bois-Reymond. Notiz über Convergenz von Integralen mit nicht verschwindendem Argument. Clebsch Ann. XIII. 251-254.

Mittheilung solcher convergenten Integrale über ein unendliches Intervall, deren Argument beständig positiv ist und schliesslich Werthe annimmt, die grösser als jede beliebige Zahl sind.

St.

G. Battaglini, Betti. Relazione su di: „Nuove ricerche sulla serie di Fourier" di G. Ascoli. Atti R. A. d. Linc. (3) II. 131-132.

Inhaltsangabe der in der Ueberschrift genannten Arbeit von G. Ascoli.

B. K.

N. Bougaieff. Zur Theorie der Functionalgleichungen. (Russisch.) Mosk. Math. Samml. IX.

P.

J. L. W. V. Jensen. Om Fundamentalligningers Oplösning ved elementäre Midler. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 149-155.

Verschiedene Beispiele der Auflösung von Functionalgleichungen durch elementare Operationen, insbesondere durch Reduction auf Gleichungen, deren Lösungen bekannt sind. Gm.

Gourier. Sur l'équation de Kepler. Ann. de l'Éc. N. (2) VII. 73-76.

Nach den Andeutungen des Herrn Hermite wird eine wichtige Eigenschaft der Wurzeln der Gleichung

$$f(z) = z - a - E \sin z = 0,$$

wo $0 < a < \pi$ und E eine positive Constante < 1 ist, erwiesen. Theilt man nämlich die Ebene der z-Werthe durch Parallelstreifen zur y-Axe im Abstande π von einander, und bezeichnet die in dem $(2k+1)^{\text{ten}}$ Streifen auf der Seite der positiven x gelegenen beiden Wurzeln mit $x \pm yi$, so ist für grosse Werthe von k der Werth von x nahezu gleich $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, und der von y gleich $l\frac{2}{E} + l\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

M.

K. Schwering. Ueber die Wurzeln der Gleichung $y^x = x^y$. Schlömilch Z. XXIII. 339-343.

Die Untersuchung der unbestimmten Gleichung $y^x = x^y$ kommt auf die Frage zurück, ob die Gleichung

$$\frac{\log x}{x} = A,$$

wo A irgend einen gegebenen Werth bedeutet, Auflösungen hat. Setzt man

$$x = \varrho . e^{\varphi i}, \quad A = a . e^{\alpha i},$$

wo ϱ, a, φ, α reell, so führt die Untersuchung der Schnittpunkte der beiden Polarcurven

$$\log \varrho = a\varrho \cos(\alpha + \varphi), \quad \varphi = a\varrho \sin(\alpha + \varphi)$$

zu dem Resultat, dass die vorgelegte Gleichung in jedem Falle

durch unzählig viele complexe Werthe von x lösbar ist, und dass man für grosse Werthe des ϱ den Winkel φ in der Nähe des Werthes $\gtrless 2m\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha$, (wo m ganzzahlig), aufzusuchen hat. Irgend ein derartiges Werthepaar x giebt eine Lösung der vorgelegten Gleichung. **M.**

A. Cayley. On a functional equation. Quart. J. XV. 315-325.

Der Herr Verfasser findet für die Functionalgleichung

$$\varphi(x) - \varphi(x_1) = (x - x_1)\frac{Ax+B}{Cx+D},$$

worin

$$x_1 = \frac{ax+b}{cx+d}$$

ist, die Lösung

$$\varphi(x) = \frac{A}{C}x + \frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}.(AD-BC)}{C(dC-cD)}\int_0^\infty \frac{\sin\xi t.\sin\eta t.dt}{\sin\zeta t.\sinh\pi t},$$

wo ζ eine Constante, ξ, η aber complicirte logarithmische Functionen von x, und $\sinh\pi t$ den hyperbolischen Sinus

$$\tfrac{1}{2}(e^{\pi t} - e^{-\pi t})$$

bezeichnen. ξ, η, ζ hängen von den Grössen a, b, c, d, C, D ab. Diese Lösung ist eine particuläre; bezeichnen wir sie mit (φx), so ist die allgemeine Lösung

$$\varphi x = \Phi x + (\varphi x),$$

und wir haben

$$\Phi x - \Phi x_1 = 0.$$

Die hier für die n^{te} Wiederholung von $\vartheta x = \frac{ax+b}{cx+d}$ gegebene neue Formel

$$\vartheta^n x = \frac{(\lambda^{n+1}-1)(ax+b) + (\lambda^n-\lambda)(-dx+b)}{(\lambda^{n+1}-1)(cx+d) + (\lambda^n-\lambda)(cx-a)},$$

wo

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{a^2+d^2+2bc}{ad-bc},$$

hat, wie am Schluss gezeigt wird, sehr interessante Eigenschaften.

M.

A. Cayley. Note on the function
$$\vartheta x = a^2(c-x):\{c(c-x)-b^2\}.$$
Quart. J. XV. 338-340.

Für die allgemeine Function ersten Grades
$$\vartheta x = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$
(siehe das vorstehende Referat) wird die n^{te} Function von der Form:
$$\vartheta^n x = \frac{(\lambda^{n+1}-1)(\alpha x+\beta)+(\lambda^n-\lambda)(-\delta x+\beta)}{(\lambda^{n+1}-1)(\gamma x+\delta)+(\lambda^n-\lambda)(\gamma x+\alpha)},$$
wo
$$\lambda+\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha^2+\delta^2+2\beta\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}.$$
Wendet man diese Formel auf die Function
$$\vartheta x = \frac{a^2(c-x)}{c(c-x)-b^2}$$
an, welche in dem Problem der Vertheilung der Elektricität auf 2 Kugeln auftritt, und versteht unter a, b, c die Seiten und unter A, B, C die Winkel eines Dreiecks, so wird
$$\vartheta^n x = \frac{a^2.\sin nC - ax\sin(nC+B)}{a.\sin(nC-B)-x\sin nC}.$$
Der specielle Fall $x=0$ ist in den Senate-House Problems, January 14, 1878 gegeben. M.

H. W. L. Tanner. Note on the calculus of functions.
Messenger (2) VII. 156-157.

Der Verfasser macht die Bemerkung, dass man bei der Lösung von Functionalgleichungen die willkürlichen Constanten durch Operationssymbole ersetzen kann. Beispielsweise kann man in der Lösung
$$\varphi(x) = C\log x$$
der Functionalgleichung
$$\varphi(xy) = \varphi(x)+\varphi(y)$$

die Constante C ersetzen durch das Symbol $c\frac{d}{du}$, so dass

$$\varphi(x) = \frac{c}{x}\frac{dx}{du}$$

eine Lösung ergiebt. Glr. (M.)

Morel, Evans, Townsend, McKenzie a. o. Solutions of a question (5569). Educ. Times XXIX. 41-42.

Lösungen der Functionalgleichung

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x).$$

M.

G. Lemoyne. Sul valore medio geometrico delle funzioni d'una variabile reale. Battaglini G. XVI. 209-216.

Cauchy hat (Exercices d'Analyse IV., Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions) das arithmetische Mittel zwischen den Werthen einer Function innerhalb eines gegebenen Intervalles untersucht. Statt dessen kann man auch das geometrische Mittel der Werthe der Function $y = f(x)$ in dem Intervalle $x = a$ bis $x = b$ betrachten, worunter man die Grenze (für $n = \infty$) von

$$\omega = [f(a) \cdot f(a+\delta) \cdot f(a+2\delta) \dots f(a+\overline{n-1}\delta)]^{\frac{1}{n}},$$

wo $\delta = \frac{b-a}{n}$ ist, versteht. Diese Grenze hat Schlömilch ganz unabhängig von der Natur der Function im III. Bande seiner Zeitschrift (p. 305) betrachtet und die Ungleichung hergeleitet:

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx} < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

welche aussagt, dass das geometrische Mittel kleiner sei als das arithmetische. In der vorliegenden Note wird diese Ungleichung bewiesen, ohne auf das bekannte Theorem

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} < \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots a_n)$$

zurückzugehen. M.

O. Schlömilch. Ueber die Grenzwerthe der Functionen mehrerer Variabeln. Hoffmann Z. IX. 356-359.

Der Aufsatz, welcher auch in die neueste Auflage des Uebungsbuches des Herrn Verfassers aufgenommen ist, zeigt an einigen Beispielen die Vieldeutigkeit des Grenzwerthes einer Function von mehreren Variabeln. Das erste Beispiel, das auch geometrisch veranschaulicht wird, ist die Function

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + ax + by}{x + y};$$

der Grenzwerth $f(0,0)$ ist unendlich vieldeutig, je nach der Art und Weise, wie x und y in Null übergeführt werden. An einigen anderen Beispielen wird gezeigt, dass die Vieldeutigkeit auch hervortritt, wenn man für x und y zwei unendlich abnehmende Grössen δ und ε setzt, oder wenn man in $x = \frac{1}{\tau}$, $y = \frac{1}{\omega}$ τ und ω in's Unendliche wachsen lässt. Die willkürliche Wahl der Grenzwerthe erhellt besonders aus dem Beispiel

$$F(\delta, n) = \delta\left(\frac{1}{1^{1+\delta}} + \frac{1}{2^{1+\delta}} + \frac{1}{3^{1+\delta}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\delta}}\right),$$

wenn δ gegen Null und n gegen Unendlich convergirt.

M.

W. Thomson. Harmonic-Analyzer, shown and explained by him. Proc. of London XXVII. 371-373.

Dies ist die Realisirung eines Instruments, dessen Gedanken schon in der Mittheilung des Verfassers: „On an instrument for calculating $\int \varphi(x)\psi(x)\,dx$, the integral of the product of two given functions“ (Proc. of London 1876, s. F. d. M. VIII. p. 176) erwähnt war. Es besteht aus 5 Scheiben, Kugel und Cylinder und Integratoren von der Art, wie sie in Prof. James Thomson's Arbeit: „An integrating machine having a new kinematic principle“ Proc. of London 1876, s. F. d. M. VIII. p. 175) beschrieben worden ist.

Cly. (O.)

E. Laguerre. Sur la réduction de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier. C. R. LXXXVII. 820-822.

In einer früheren Abhandlung von allgemeinerer Tendenz war Verfasser dahin gelangt, zu zeigen, dass ein Näherungsbruch $\frac{f^n(x)}{\varphi^n(x)}$ der für $e^{F(x)}$ gefundenen Kettenbruchentwickelung durch nachstehende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt sei:

$$y'' - \left(\frac{2n}{x} + \frac{\Theta'^n(x)}{\Theta^n(x)} - F'(x)\right) y' = \frac{H^n(x)}{x\Theta^n(x)}.$$

Hier sind $y = f^n(x)$ und $\varphi^n(x)$ zwei Polynome vom n^{ten} Grade, $\Theta^n(x)$ ist ein solches vom $(m-1)^{\text{ten}}$ und $H^n(x)$ ein solches vom $2(m-1)^{\text{ten}}$ Grade. Welches sind nun die Coefficienten der beiden letzteren Polynome? Dies wird gezeigt und am speciellen Falle einer quadratischen Function $F(x)$ illustrirt; in Kürze lassen sich die umfänglichen Formeln kaum wiedergeben. Gr.

E. Laguerre. Sur la réduction en fractions continues d'une classe assez étendue de fonctions. C. R. LXXXVII. 923-925.

Ausdehnung der früher für $e^{F(x)}$ gefundenen Methode auf solche Functionen V von x, welche der Gleichung

$$V' = FV + \Phi$$

(F und Φ beliebige rationale Functionen von x) Genüge leisten und einer Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen des Argumentes x fähig sind. Gr.

E. Laguerre. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances d'un polynôme. C. R. LXXXVI. 383-385.

Es wird e^{xz} in eine Reihe nach steigenden Potenzen eines Polynomes $F(z)$ vom m^{ten} Grade entwickelt, deren Coefficienten Polynome $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in z sind — Entwickelungen, die

zuerst Jacobi (Borchardt J. LIII. p. 103) betrachtet hat. Die Coefficienten lassen sich auf gewisse, von Hermite behandelte Integrale zurückführen (Vergl. F. d. M. V. p. 248). St.

LEMONNIER. Sur une formule analytique. Soc. Philom. Paris (7) II. 97-98.

Die Formel:

$$(x-a)(x-b)f_1(x) = -F(x)+f(x)\left\{\frac{F(a)}{f(a)}\cdot\frac{x-b}{a-b}+\frac{F(b)}{f(b)}\cdot\frac{x-a}{b-a}\right\},$$

worin $F(x)$, $f(x)$ zwei ganze Functionen von x, a und b irgend welche Zahlen, die nicht Wurzeln von $f(x)$ sind, und $f_1(x)$ ein ganzes Polynom in x bedeuten, lässt sich benutzen zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer Polynome von x mit numerischen Coefficienten, sowie zur Berechnung solcher den Sturm'schen Functionen analogen Functionen $f_1(x)$ etc.

M.

CH. HERMITE. Sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Ann. Soc. scient. Brux. II. B. 157-161.

Es sei

$$Fx = (x-a)(x-b)(x-c)+\cdots,$$

$$\frac{fx}{Fx} = \varphi x+\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots,$$

wo φx und fx ganze Functionen sind. Derivirt man die beiden Seiten der zweiten Gleichung $(m-1)$mal nach a, $(n-1)$mal nach b, $(p-1)$mal nach c u. s. f., so findet man die Formel zur Zerlegung von

$$\frac{fx}{(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots}$$

in einfache Brüche. Mn. (O.)

A. E. PELLET. Sur la décomposition d'une fonction entière en facteurs irréductibles suivant un module premier. C. R. LXXXVI. 1071-1072.

Das Product $\varDelta$ der Quadrate der Wurzeldifferenzen von $f(x)\equiv 0\ (\text{mod}\ p)$ ist Nichtrest $(\text{mod}\ p)$, wenn $f(x)$ eine ungrade Anzahl irreductibler Factoren graden Grades hat, und $\varDelta$ ist quadratischer Rest, wenn $f(x)$ eine grade Anzahl oder gar keine irreductible Factoren enthält. Die Anwendung auf die Function $\dfrac{x^q-1}{x-1}$ ergiebt das Legendre'sche Reciprocitätsgesetz. M.

A. S. Hathaway. A case of symbolic operative expansion. Analyst V. 38-39.

Wenn D^m die Entwickelung von

$$\left(a_1\frac{d}{da_1}+a_2\frac{d}{da_2}+\cdots\right)^m$$

bezeichnet, wo die Symbole nicht aufeinander wirken, und wenn $(D)^m$ die Operation D m-mal wiederholt bezeichnet, so lässt sich, wie der Verfasser zeigt, $(D)^m$ ausdrücken in D, D^2, ... D^m als Determinante m^{ter} Ordnung. Es wird auch bewiesen, dass

$$(D)^m=\Sigma\frac{\varDelta^i 0^m}{i!}D^i.$$

Glr. (O.)

Bäcklund. Entwickelung der negativen ungraden Potenzen der Quadratwurzeln der Function $1+2\eta U+\eta^2$. Bull. de St. Pét. XXIV. 509-518.

R. Lipschitz. Demonstration of a fundamental theorem obtained by Mr. Sylvester. Am. J. I. 336-340.

J. J. Sylvester. Note on the theorem contained in Professor Lipschitz's Paper. Am. J. I. 341-343.

Das betreffende Theorem findet sich in der Abhandlung des Herrn Sylvester: Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées (Borchardt J. LXXXV. 89—114; siehe p. 84) und lautet: „In einer vorbereiteten Form geben zwei entgegengesetzte

Substitutionen", die an den Veränderlichen ausgeführt werden, zwei entgegengesetzte Substitutionen, die an den Elementen ausgeführt werden". M.

W. J. Stringham. Investigations in quaternions.
Proc. Am. Acad. XIII. 310-341.

Die Arbeit besteht aus zwei Theilen. Der erste behandelt die Theorie der Logarithmen von Quaternionen. Der Herr Verfasser geht von dem Fundamentalsatze für die complanaren Quaternionen aus, der dem Hauptgesetze für die Exponentialfunction entspricht, entwickelt dann eine Reihe von Sätzen für Logarithmen von Quaternionen und schliesst mit der Untersuchung des Logarithmus eines Productes aus einer Anzahl complanarer Vectoren. Im zweiten Theile werden Anwendungen des Quaternionen-Calculs auf Rectification von Curven, Quadratur von Flächen und Cubatur von Körpern gegeben. M.

Clifford. Application of Grassmann's extensive algebra.
Am. J. I. 350.

Der Verfasser weist nach, wie die Quaternionen und Biquaternionen mit der Ausdehnungslehre Grassmann's in Verbindung zu setzen sind. Mi.

Capitel 2.
Besondere Functionen.

W. A. Whitworth. Sub-factorial *N*. Messenger (2) VII. 145-147.

Der Verfasser schlägt ein neues Symbol ILn vor, welches er folgendermassen definirt: Man schreibe 1 hin und subtrahire 1, so ist das Resultat IL, multiplicire mit 2 und addire 1, so ist das Resultat IL^2, multiplicire mit 3 und subtrahire 1, so ist das Resultat

IL^3, u. s. f., so dass 1 abwechselnd addirt oder subtrahirt **wird.** Es wird bewiesen, dass

$$IL^n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Auch wird eine Tafel der Werthe von IL^n und seiner reciproken Werthe bis zu $n = 12$ gegeben. Glr. (O.)

A. Cayley. An algebraic identity. Messenger (2) VIII. 45-46.

Wenn

$$a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h \ = \ \beta-\gamma,\ \gamma-\alpha,\ \alpha-\beta,\ \alpha-\delta,\ \beta-\delta,\ \gamma-\delta,$$

so heisst die Identität:

$$agh(-ga+ah-hg)^7 + bhf(-hb+bf-fh)^7 + cfg(-fc+cg-gf)^7 + abc(bc+ca+ab)^7 = 0$$

oder, wie man auch schreiben kann:

$$agh(g^2+h^2+a^2)^2 + bhf(h^2+f^2+b^2)^2 + cfg(f^2+g^2+c^2)^2 + abc(a^2+b^2+c^2)^2 = 0.$$

Hergeleitet wird sie aus der Cauchy'schen Identität:

$$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.$$

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. Note on the above. Messenger (2) VIII. 46-47.

1) Die obige Identität wird bewiesen, indem die Glieder siebenter Ordnung in der trigonometrischen Identität

$$\sin a.\sin g \sin h + \sin b \sin h \sin f + \sin c \sin f \sin g + \sin a \sin b \sin c = 0$$

der Null gleichgesetzt werden. 2) Es wird bemerkt, dass eine Identität n^{ter} Ordnung, welche die von Cayley einschliesst, existirt. 3) Die Zerlegung von $(x+y)^n - x^n - y^n$ in Factoren, die nur x^2+xy+y^2 und $xy(x+y)$ enthalten, wird für $n = 7,\ 11,\ 13$ gegeben. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On a class of algebraical identities. Messenger (2) VIII. 53-56.

1) Die Zerlegungen von

$$(x+y)^n-x^n-y^n \quad \text{für} \quad n=3,5,7,\ldots 13$$

werden in symmetrische Formen gebracht, indem man setzt:

$$-x,\ -y,\ x+y\ =\ b-c,\ c-a,\ a-b.$$

2) Die 5 anderen Identitäten, ähnlich der Cayley'schen, auf welche diese führen, werden gegeben. Setzt man

$L=a^2+g^2+h^2,\ M=b^2+h^2+f^2,\ N=c^2+f^2+g^2,\ X=a^2+b^2+c^2$

(a, b, c, f, g, h in der Bedeutung wie in der Note von Cayley oben), so hat man z. B., entsprechend der zweiten Form der Identität:

$$3aghL^2+3bhfM^2+3cfgN^2+3abcX^2$$
$$+8a^2g^2h^2+8b^2h^2f^2+8c^2f^2g^2+8a^2b^2c^2\ =\ 0.$$

Die analogen Identitäten für L^4 u. s. f., L^5 u. s. f. werden ebenfalls aufgestellt. Drittens wird die Identität

$$(\gamma-\beta)(\beta+\gamma-2\alpha)^5+(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)^5+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)^5\ =\ 0$$

gegeben. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. Note on Cayley's theorem. Messenger (2) VIII. 121.

Gegenstand dieser Note ist die Bemerkung, dass die Zerlegungen von $(x+y)^n-x^n-y^n$ in Factoren für $n=9,\ 11,\ 13$ von Cauchy selbst gegeben sind, und dass die Auflösung für den allgemeinen Fall ebenfalls 1867 publicirt ist; ferner wird auf Arbeiten von Muir und dem Verfasser im Quart. J. 1878 (siehe unten) aufmerksam gemacht. Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. Note on Cauchy's theorem relating to the factors of $(x+y)^n-x^n-y^n$. Quart. J. XV. 365-366.

Th. Muir. On an expansion of $(x+y)^n+(-x)^n+(-y)^n$. Quart. J. XVI. 9-15.

J. W. L. Glaisher. On Cauchy's theorem relating to the factors of $(x+y)^n-x^n-y^n$. Quart. J. XVI. 89-96.

Das Cauchy'sche Theorem, mit welchem sich die drei oben-

stehenden Arbeiten beschäftigen, lautet: Der Ausdruck

$$(x+y)^n - x^n - y^n$$

ist durch x^2+xy+y^2 theilbar, wenn n eine positive ganze Zahl von der Form $6m-1$ oder $6m+1$ ist; im letzteren Falle ist derselbe auch noch durch $(x^2+xy+y^2)^2$ theilbar. In der ersten kurzen Notiz giebt Glaisher dem erwähnten Ausdrucke die Form

$$P_n = (b-c)^n+(c-a)^n+(a-b)^n$$

und findet, dass P_n durch P_2, P_3 und P_4 theilbar wird, wenn n von der Form $6m+1$ ist. In der zweiten Abhandlung setzt Muir

$$(x+y)^n+(-x)^n+(-y)^n = S_n$$

und beweist die rekurrente Formel

$$6S_n = 3S_2 S_{n-2}+2S_3 S_{n-3}.$$

Ferner zeigt er, dass der Ausdruck $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$, worin n eine ungrade ganze Zahl bedeutet, stets durch

$$\tfrac{1}{3}\{(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3\}$$

getheilt werden kann. In der dritten Abhandlung, deren Schluss noch nicht erschienen ist, leitet Glaisher dieselben Resultate in anderer Weise her, indem er von der Form $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ mit der Bedingungsgleichung $\alpha+\beta+\gamma=0$ ausgeht und verallgemeinert dieselben in mancher Beziehung. Schl.

TH. MUIR. Cauchy's theorem regarding the divisibility of $(x+y)^n+(-x)^n+(-y)^n$. Messenger (2) VIII. 119-120.

Einfache, von der von Cauchy verschiedene Methode zur Bestimmung der Formen von n, für welche

$$(x+y)^n+(-x)^n+(-y)^n$$

theilbar ist durch

$$xy(x+y),\quad x^2+xy+y^2 \quad \text{und} \quad (x^2+xy+y^2)^2.$$

Glr. (O.)

Aufgaben über specielle Functionen, mit Lösungen von C. LEUDESDORF, WOLSTENHOLME u. a., siehe Educ. Times XXIX. 63-65 und 100-101.

M.

W. Trzaska. Ueber Multiplication der goniometrischen und hyperbolischen Functionen. Par. Denkschr. 1878. (Polnisch).

Eine auf den Eigenschaften der Determinanten beruhende Methode der Multiplication genannter Functionen. Bcki.

O. Schlömilch. Ueber die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen. Schlömilch Z. XXIII. 135-137.

Ebenso wie früher (Grunert Arch. XII.) von dem Herrn Verfasser ein Zusammenhang zwischen der Function

$$\psi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \frac{1}{7^\mu} + \cdots \quad (0<\mu<1)$$

und der complementären Function $\psi(1-\mu)$ nachgewiesen worden ist, wird hier eine ähnliche Relation zwischen den Functionen

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

und $\varphi(1-\mu)$ gegeben. Es gelingt dies mit Hülfe des Integrals

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}}\right\} x^{\mu-1} dx \quad (\mu>0),$$

indem man dieses auf zwei verschiedene Weisen entwickelt. Aehnlich lässt sich die früher gegebene Relation zwischen $\psi(\mu)$ und $\psi(1-\mu)$ mit Hülfe des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} x^{\mu-1} dx$$

gewinnen. M.

Fr. Hejzlar. Hyperbolische Logarithmen. Casopis VII. 8-20. (Böhmisch).

Enthält eine kurze Geschichte und Theorie dieser häufig in Schulbüchern falsch aufgefassten besonderen Logarithmen.

Std.

Y. Villarceau. Théorie des sinus des ordres supérieurs. C. R. LXXXVI. 1160-1166, 1216-1222, 1287-1290.

Die hier untersuchten Sinus höherer Ordnung entstehen auf folgende Weise: Giebt man in der Fundamentalgleichung für die Exponentialfunction

$$a^{mx_1}.a^{mx_2}\ldots = a^{m(x_1+x_2+\ldots)}$$

dem m den allgemeinsten Werth $p+qi$, so zerfällt a^{mx} in die beiden Factoren

$$a^{mx} = a^{px}a^{qix} = e^{x'}e^{x''i} \quad (x' = xp\log a,\ x'' = xq\log a).$$

Jeder dieser Factoren wird nun einzeln betrachtet. Das Studium des ersteren liefert die Theorie der hyperbolischen Functionen $\mathfrak{Sin}\,x$ und $\mathfrak{Cos}\,x$; das des zweiten ebenso die Theorie der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ (vgl. C. R. LXXXIII. 594; F. d. M. VIII. 252). Setzt man

$$\varrho\cos\vartheta = p,\ \varrho\sin\vartheta = q,\ a^{mx} = e^{x\varrho\log a.e^{\vartheta i}},$$

so wird die allgemeinste Form der Exponentialfunction

$$e^{xe^{\vartheta i}} = e^{xe^{\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}i}},$$

wo n und m ganze Zahlen, relativ prim zu einander und endlich oder unendlich, je nachdem ϑ und π commensurabel oder incommensurabel sind. Die Reihe

$$e^{xe^{\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}i}} = 1 + \frac{x}{1}e^{\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}i} + \frac{x^2}{1.2}e^{2\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}i} + \cdots$$

lässt sich nun in m partielle Reihen zerlegen. Man erhält

$$e^{xe^{\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}i}} = \varphi_0 x + \varphi_1 x.e^{1\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}i} + \varphi_2 x.e^{2\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}i} + \cdots$$
$$\cdots + \varphi_{m-1}x.e^{(m-1)\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}i},$$

wo

$$\varphi_{m-1}(x) = \frac{x^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}$$
$$\pm \frac{x^{2m-1}}{1.2.3\ldots(2m-1)} + \frac{x^{3m-1}}{1.2.3\ldots(3m-1)} \pm \frac{x^{4m-1}}{1.2.3\ldots(4m-1)} + \cdots.$$

Diese Functionen φx sind schon vor mehr als 50 Jahren von H. Wronski untersucht worden; er nennt φ_0 cosinus und die übrigen φ sinus, die nach der Ordnung $(m-1)$ benannt werden. Herr Villarceau unterscheidet eine „hyperbolische“ Gattung, für welche n grade, und eine „elliptische“, für welche n ungrade ist.

Sind n und m zugleich unendlich, so lässt sich eine dritte Gattung, die „parabolische“, unterscheiden. Es werden nun die Haupteigenschaften dieser Gattungen entwickelt. Als Additionstheoreme ergeben sich die $\varphi(x+y)$ gleich einer Summe von Producten aus je zweien der φx und φy. Ferner lassen sich die Sinus höherer Ordnung, unter endlicher Form, ausdrücken durch Exponential-, hyperbolische und Kreis-Functionen, und aus dieser Form fliessen mehrere interessante Eigenschaften, sowie auch die numerische Darstellung. Hierauf werden die Formeln für die Multiplication der Argumente gegeben. Durch Division der Functionen φ durch φ_0 erhält man sogenannte Tangentialfunctionen, die ebenfalls sehr bemerkenswerthe Eigenschaften besitzen. M.

H. Durège. Theorie der elliptischen Functionen. 3. Aufl. Leipzig. Teubner.

H. Laurent. Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Nouv. Ann. (2) XVII. 119-129, 247-252, 385-408, 537-557.

Fortsetzung der Arbeit, über welche F. d. M. IX. 327 berichtet wurde. Es werden hier zunächst Differentialgleichungen für die Hülfsfunctionen gegeben, dann folgen die zahlreichen Beziehungen zwischen sn u, cn u, dn u, hierauf die Additionstheoreme. Alsdann schliesst sich an die Betrachtung der elementaren Perioden eine Reihe von allgemeinen Sätzen über doppeltperiodische Functionen, die mit der Entwickelung in trigonometrische Reihen endet. Hierauf folgt die Transformationstheorie, und den Schluss bildet die Anwendung auf das Poncelet'sche Theorem. M.

D. Bierens de Haan. Over het differentieeren van eenige elliptische integralen naar den modulus of eene functie daarvan. Verh. v. Amst. XVIII. 1-33.

Hier werden einige Eigenschaften der elliptischen Integrale untersucht mittels der Differentiation nach dem Modul oder einer

Function des Moduls. In dieser Weise werden die einfachsten Integrale behandelt, in welchen die Form $\sqrt{1-p^2\sin^2 x}$ oder $\sqrt{1+p^2\sin^2 x}$ vorkommt. Mehrere neue Integrale, welche mit den elliptischen verwandt oder darauf reducirbar sind, werden auf demselben Wege gefunden. G.

A. Cayley. Note on a definite integral. Messenger (2) VIII. 126.

Beweis, dass das Weierstrass'sche Integral F', d. h.

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

gleich E' ist. Glr. (O.)

R. Rawson, J. Hammond a. o. Solution of a question (5498). Educ. Times XXIX. 92-93.

Das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung lässt sich in folgender Form darstellen:

$$E = \tfrac{1}{2}(\pi k'^2)\left\{1+\sum_{n=1..\infty}(2n+1)\left(\frac{1.3.5...2n-1}{2.4.6...2n}k^n\right)^2\right\}.$$

M.

J. Thomae. Ueber elliptische Integrale. Schlömilch Z. XXIII. 406-409.

Es wird das überall endliche elliptische Integral

$$u(\xi) = \tfrac{1}{2}\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k\xi)}}$$

durch zwei bestimmte Integrale dritter Gattung dargestellt, nämlich

$$u\pi+\alpha K\pi+\alpha' iK'\pi$$

$$= \frac{\sigma K'}{1-k\xi}\int_0^1 \frac{1-k\lambda}{\xi-\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)} + \frac{i\sigma.K}{1-k\xi}\int_0^{\infty}\frac{1-k\lambda}{\xi-\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)},$$

wo

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\xi(1-\xi)(1-k\xi)},\ u(1) = K,\ u(\infty) = iK',$$

und α', α' ungrade, aber unbestimmte Zahlen sind. Dieses Resultat, das mit Hülfe der Thetafunctionen leicht zu verificiren ist, wie hier auch a posteriori geschieht, wird zunächst auf einem Wege hergeleitet, der deshalb von Wichtigkeit ist, weil er in gleicher Weise eine Darstellung von Abel'schen Integralen durch andere gestattet, bei denen die Veränderliche der ersteren nur noch als Parameter auftritt, also durch bestimmte Integrale. Es genügen nämlich die Abel'schen Integrale linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten in Bezug auf die Klassenmoduln algebraisch sind. Die Lösung dieser completen Differentialgleichungen findet man aber durch blosse Quadratur aus der Lösung der reducirten Differentialgleichung, in der das von der Unbekannten freie Glied fortgelassen ist; und diese letztere wird durch bestimmte Abel'sche Integrale, nämlich durch Periodicitätsmoduln befriedigt. M.

J. Hammond, Wolstenholme a. o. Solution of a question (5508). Educ. Times XXX. 55-58.

Für $a>b>c$ ist

$$\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)}} = \int_{-\infty}^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)}}.$$

M.

J. Neuberg. Sur l'addition des fonctions elliptiques. N. C. M. IV. 343-346.

I. Vereinfachung der Methode von Lagrange und Darboux, um die Gleichung

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} + \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} = 0$$

zu integriren. Setzt man

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha},\quad \frac{d\beta}{dt} = -\sqrt{1-k^2\sin^2\beta},$$

so findet man sofort

$$\frac{\frac{d^2\alpha}{dt^2} \pm \frac{d^2\beta}{dt^2}}{\frac{d\alpha}{dt} \pm \frac{d\beta}{dt}} = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin(\alpha \mp \beta)} \left(\frac{d\alpha}{dt} \mp \frac{d\beta}{dt}\right),$$

deren Integral ist

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} \mp \sqrt{1-k^2\sin^2\beta} = C\sin(\alpha \mp \beta).$$

II. Geometrische Deutung. Es seien $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ zwei Punkte der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, so dass $k^2a^2=a^2-b^2$, $x_1 = a\cos\alpha$, $x_2 = a\cos\beta$. Dann wird die Gleichung

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} - \sqrt{1-k^2\sin^2\beta} = C\sin(\alpha-\beta),$$

$$\frac{1}{M_1H_1} - \frac{1}{M_2H_2} = \text{const.},$$

wo M_1H_1, M_2H_2 die Höhen von OM_1M_2 sind. Da die Gleichung

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} - \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} = 0$$

das Integral

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} + \sqrt{1-k^2\sin^2\beta} = C\sin(\alpha-\beta)$$

ergiebt, so hat man auch

$$\frac{1}{M_1H_1} + \frac{1}{M_2H_2} = \text{const.}$$

Daraus leitet man folgendes Theorem ab: „Bestimmt man auf einer Ellipse eine Folge von Punkten $M_1 M_2 M_3 \ldots$ so, dass in den Dreiecken OM_1M_2, OM_2M_3, etc. die Reciproken der Höhen, welche von den Punkten M ausgehen, eine constante Summe haben, und fällt dann der Punkt M_n mit M_1 zusammen, so schliesst sich das Polygon $M_1M_2 \ldots M_n$, welches auch der Punkt M_1 der Ellipse sei“. Mn. (M.)

C. H. Kummell. Remarks on Mr. Meech's article on elliptic functions. Analyst V. 17-19.

Diese Bemerkungen zu L. W. Meech's „Short method of elliptic functions“, Analyst 1877 (s. F. d. M. IX. 328), betreffen

folgende Punkte: 1) die Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie, nach einer von der Legendre'schen abweichenden Methode; 2) die Methode der Entwickelung der elliptischen Integrale erster Gattung nach steigenden Potenzen des Moduls, abweichend von Legendre; 3) die Gauss'sche Methode mit einer Reihe, die nach absteigenden Potenzen des Moduls geordnet ist, angewendet zum Beweise, dass

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\varphi_n}{2^n a_n},$$

wo a_n das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b ist.

Glr. (M.)

C. H. Kummell. Evaluation of elliptic functions of the second and third species. Analyst V. 97-104.

Fortsetzung der obigen Arbeit. Für die Entwickelung nach steigenden Potenzen wird das Integral in der Form

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

geschrieben und durch die Substitutionen

$$a\sin(2\varphi' - \varphi) = c\sin\varphi, \quad a' = \tfrac{1}{2}(a+c), \quad c' = \sqrt{ac}$$

transformirt. Für die Entwickelung nach fallenden Potenzen wird die Gauss'sche Form

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

benutzt und durch die Substitution

$$(a+b)\sin(2\varphi - \varphi_1) = (a-b)\sin\varphi_1, \quad a_1 = \tfrac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}$$

transformirt. Diese Transformationen werden vollständig ausgeführt. In gleicher Weise wird das Integral dritter Gattung behandelt, und zwar auch nach steigenden und fallenden Potenzen entwickelt.

Glr. (M.)

J. W. L. Glaisher. On expressions for the theta-functions as definite integrals. Proc. of Cambr. III. 61-66.

Die Function $\Theta(x)$ wird nach Jacobi definirt durch die Gleichung:

$$(1) \quad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots;$$

und in vorliegender Arbeit wird die rechte Seite dieser Gleichung als bestimmtes Integral dargestellt. Derselbe Gegenstand ist bereits von Kummer in seiner Abhandlung: De integralibus definitis et seriebus infinitis, Crelle J. XVII, berührt worden. Kummer giebt die Werthe von $1\pm q+q^4\pm q^9+$ etc. als bestimmte Integrale und bemerkt, dass dieselbe Methode auch die Werthe der Reihen für Θ und H ergeben würde. In der vorliegenden Arbeit wird die Function Θ auf 4 verschiedene Arten als bestimmtes Integral dargestellt. Die beiden ersten Arten werden nach Kummer's Methode gewonnen, mit Hülfe des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2at\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-a^2},$$

und zwar einmal direct aus der Reihe (1), dann durch die Exponentialreihe, die aus (1) mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left(1+2e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}\cos\frac{2\pi x}{a}+2e^{-\frac{4\pi^2}{a^2}}\cos\frac{4\pi x}{a}+\cdots\right)$$
$$= e^{-x^2}+e^{-(x-a)^2}+e^{-(x+a)^2}+\cdots$$

gewonnen wird. Die beiden andern Arten ergeben sich aus derselben Reihe mit Hülfe der Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos ct}{a^2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{a}\,e^{-ac}, \quad \int_0^\infty \frac{t\sin ct}{a^2+t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ac}.$$

Setzt man, als Beispiel, in diese letztere Form $x=0$, so erhält man

$$1\pm 2q+2q^4\pm 2q^9+\cdots$$
$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sinh\beta t\mp\sin\beta t}{\cosh\beta t\mp\cos\beta t}\cos(t^2)\,dt$$
$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sinh\beta t\pm\sin\beta t}{\cosh\beta t\mp\cos\beta t}\sin(t^2)\,dt,$$

wo

$$\beta = \sqrt{2}\frac{\pi K'}{K} = \sqrt{2}\log\left(\frac{1}{q}\right).$$

In der Arbeit sind nur die Resultate mitgetheilt und ist die Methode nur angedeutet. Glr. (M.)

A. Cayley. On the double ϑ-functions. Proc. L. M. S. IX. 29-30.

Der Herr Verfasser wendet hier die Methode, welche er bei der Untersuchung der doppelten Thetafunctionen verfolgt hat, auf einfache Thetafunctionen an und gelangt so zu folgenden Resultaten: Ist

$$\delta u = \frac{\delta x}{\sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x}}$$

und bezeichnen A, B, C, D, Ω Functionen von u, so dass A, B, C, D resp. $= \Omega\sqrt{a-x}, \Omega\sqrt{b-x}, \Omega\sqrt{c-x}, \Omega\sqrt{d-x}$, so ergeben sich eine Reihe von Differentialgleichungen von der Form

$$A\delta B - B\delta A = C.D,$$

welche die Quotienten $A:B:C:D$ bestimmen. Durch abermalige Differentiation gelangt man zu Gleichungen von der Form

$$\Omega\delta^2\Omega - (\delta\Omega)^2 = \Omega^2 M(\delta u)^2,$$

wo M eine Function von x ist. Am geeignetsten ist der folgende Werth für M:

$$M = -2x^2 + x(a+b+c+d) + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ -2bc - 2ca - 2ab - 2ad - 2bd - 2cd.$$

Alsdann ergeben sich 4 Gleichungen von der Form

$$A\delta^2 A - (\delta A)^2 = \Omega^2\mathfrak{A}(\delta u)^2,$$

wo $\mathfrak{A}$ eine lineare Function von x; mithin kann $\Omega^2\mathfrak{A}$ als lineare Function von zweien der vier Quadrate A^2, B^2, C^2, D^2 ausgedrückt werden. Der Zusammenhang mit den Jacobi'schen Functionen Θ und H ist leicht herzustellen. M.

A. Cayley. New formulae for the integration of
$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0.$$
Messenger (2) VIII. 60-62.

Für die Integration der Differentialgleichung
$$\frac{dx}{\sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x}}+\frac{dy}{\sqrt{a-y.b-y.c-y.d-y}}=0$$
giebt Herr Cayley eine Reihe von Formeln, welche denjenigen ähnlich sind, die sich für $\operatorname{sn}(u+v)$ etc. auf p. 63 seines „Treatise on elliptic functions" finden. Die Formeln lauten:
$$\sqrt{\frac{a-z}{d-z}}=\frac{A(\sqrt{(\alpha\delta\beta_1\gamma_1)}+\sqrt{(\alpha_1\delta_1\beta\gamma)})}{(bc,ad)}=\frac{A(x-y)}{\sqrt{(\alpha\delta\beta_1\gamma_1)}-\sqrt{(\alpha_1\delta_1\beta\gamma)}}$$
$$=\frac{A(\sqrt{(\alpha\beta\gamma_1\delta_1)}+\sqrt{(\alpha_1\beta_1\gamma\delta)})}{(a-c)\sqrt{(\beta\delta\beta_1\delta_1)}-(b-d)\sqrt{(\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1)}}$$
$$=\frac{A(\sqrt{(\alpha\gamma\beta_1\delta_1)}+\sqrt{(\alpha_1\gamma_1\beta\delta)})}{(a-b)\sqrt{(\gamma\delta\gamma_1\delta_1)}-(c-d)\sqrt{(\alpha\beta\alpha_1\beta_1)}};$$
und ähnliche Systeme für
$$\sqrt{\frac{b-z}{d-z}},\quad\sqrt{\frac{c-z}{d-z}}.$$
Hier ist
$$A=\sqrt{(a-b)(a-c)},$$
$$\alpha,\beta,\gamma,\delta=a-x,\ b-x,\ c-x,\ d-x$$
$$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1=a-y,\ b-y,\ c-y,\ d-y$$
und
$$(bc,ad)=\begin{vmatrix}1, & x+y, & xy\\ 1, & b+c, & bc\\ 1, & a+d, & ad\end{vmatrix}.$$
Glr. (M.)

A. Cayley. On a formula in elliptic functions.
Messenger (2) VIII. 127.

Wenn $enu=\frac{cnu}{dnu}$ gesetzt wird, so ist
$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u.\operatorname{en}v+\operatorname{sn}v.\operatorname{en}u}{1+k^2\operatorname{sn}u.\operatorname{en}u.\operatorname{sn}v.\operatorname{en}v},\ \operatorname{cn}(u+v)=\text{etc.}$$

Diese Formeln sind schon früher von Gudermann gegeben (Crelle J. XVIII. 147). Glr. (M.)

J. W. L. Glaisher. On a formula in elliptic functions. Messenger (2) VII. 144-145.

Es wird folgender Satz bewiesen: Bezeichnet $\varphi(u)$ das unendliche Product

$$(1-k^2\mathrm{sn}^4 u)\left(1-k^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}\right)^4\left(1-k^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{4}\right)^{16}\left(1-k^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{8}\right)^{64}\cdots,$$

so ist

$$\frac{\varphi\left(\frac{u}{2}+\frac{v}{2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)}{\varphi^2\left(\frac{u}{2}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{v}{2}\right)} = 1-k^2\mathrm{sn}^2u.\mathrm{sn}^2v.$$

Glr. (M.)

M. M. V. Wilkinson. An elliptic function identity. Messenger (2) VII. 156.

Die hier aufgestellte Identität lautet:

$$\mathrm{sn}\,\alpha.\mathrm{sn}\,\beta.\mathrm{sn}(\alpha-\beta)+\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}(\beta-\gamma)+\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}(\gamma-\alpha)$$
$$+\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\beta-\gamma)\,\mathrm{sn}(\gamma-\alpha) = 0;$$

dieselbe ist jedoch schon früher von Gudermann (Crelle J. XVIII. 167) gegeben. Glr. (M.)

D. André. Sur les développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances. C. R. LXXXVI. 1323-1325.

D. André. Sur le développement de la fonction elliptique $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module. Bull. S. M. F. VI. 163-165.

Die Form der Entwickelungen der Functionen $\lambda^n(x)$, $\mu^n(x)$, $\nu^n(x)$ nach Potenzen von k^2, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, war bereits früher von Herrn André, C. R. LXXXIII. 135 (siehe F. d. M. VIII. 263) gegeben. In der ersten der obigen

Noten wird die Methode, welche auf diese Entwickelungen geführt, in Kurzem auseinandergesetzt; die zweite Note enthält die Resultate für die Function $\mu(x)$. Ueber die ausführliche Abhandlung, welche Ann. de l'Éc. Norm. (2) VI. erschienen, ist bereits F. d. M. IX. 340 berichtet. M.

Laguerre. Sur la transformation des fonctions elliptiques. Bull. S. M. F. VI. 72-78.

Die einleitenden Betrachtungen dieser Transformationstheorie beschäftigen sich mit Folgerungen aus der Formel:

$$T = YX' - XY',$$

wo $x_1 = \frac{X}{Y}$ der Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = dr$$

genügt, und die Ableitungen in Bezug auf r genommen sind. Alsdann folgen die Jacobi'schen Formeln, welche aus der Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1, y_1)}} = \frac{dx}{\sqrt{f(x, y)}}$$

fliessen, und eine Transformation dieser Formeln.

M.

F. Klein. Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Clebsch Ann. XVI. 111-172.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 69-73.

F. Klein. On the transformation of elliptic functions. Proc. L. M. S. IX. 123-126.

Einige Mittheilungen aus der obigen Arbeit, betreffend die Gleichungen zwischen der absoluten Invariante der ursprünglichen Function und der der transformirten Function. Es wird gezeigt, dass für $n = 5, 7, 13$ diese Invarianten J und J' rationale

Functionen eines Parameters sind, und dass diese Functionen vollständig bestimmt sind durch die Art der Verzweigung von J' in Bezug auf J. M.

F. Brioschi. Su di alcune formole nella teorica delle funzioni ellittiche. Acc. R. d. Linc. (3) II. 115-118.

Der Herr Verfasser gelangt zunächst von der Weierstrass'schen Normalform

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$$

zu dem Differential

$$\frac{dx\sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{\varphi(x)}} = (2kk')^{\frac{1}{3}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

wo $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$, drückt die Perioden ω, ω' des entsprechenden Integrals durch K und K' aus und leitet die lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung für ω her. Hierauf wird das der analogen Function

$$\psi(x) = 4y^3 - G_2y - G_3$$

entsprechende Differential

$$\frac{dy\sqrt[12]{\Delta}}{\sqrt{\psi(y)}} = (2\lambda\lambda')^{\frac{1}{3}} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\lambda^2\eta^2)}}$$

betrachtet und für die Transformation

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\lambda^2\eta^2)}} = \mu \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

eine Reihe von Formeln gewonnen. M.

H. J. Stephen Smith. On the singularities of the modular equations and curves. Proc. L. M. S. IX. 242-272.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. B.

F. Brioschi. Sopra una classe di equazioni modulari. Brioschi Ann. (2) IX. 167-172.

Die hier betrachteten Modulargleichungen gehören zu den

Jacobi'schen, weil sie eine zuerst von Jacobi gefundene Eigenschaft besitzen. Sind

$$z_\infty,\ z_0,\ z_1,\ z_2, \dots z_{n-1}$$

die Wurzeln einer solchen Gleichung, so ist bekanntlich

$$\sqrt{z_\infty} = \pm a_0\sqrt{\pm n}, \quad \sqrt{z_s} = a_0 + \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \varepsilon^{m_r s} a_r \quad (s = 0,\ 1, \dots n-1).$$

Setzt man für irgend eine dieser Wurzeln

$$z\sqrt{z} = \sqrt{Z},$$

so genügt eine Klasse dieser Jacobi'schen Gleichungen den anderen Bedingungen:

$$\sqrt{Z_\infty} = \pm A_0\sqrt{\pm n}, \quad \sqrt{Z_s} = A_0 + \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \varepsilon^{m_r s} A_r,$$

aus denen eine Reihe von Relationen zwischen den a_0, a_1, $a_2, \dots$ sich ergiebt, die auf besondere Eigenschaften für die Coefficienten der Gleichungen in z führt. Dies wird für $n = 5$, 7 und 11 näher durchgeführt. M.

A. Cayley. Addition to the memoir on the transformation of elliptic functions. Phil. Trans. CLXIX. 419-425.

Die Arbeit vervollständigt die Theorie der Transformation 7ten Grades, $n = 7$, wie sie in des Verfasser's „Memoir on the transformation of elliptic functions", Phil. Trans. CLXIV. (1874, siehe F. d. M. VI. p. 277) entwickelt worden ist.

Cly. (M.)

H. J. S. Smith. On quadric transformation. Rep. Brit. Ass. 1878.

Csy.

H. J. S. Smith. On the modular curves. Rep. Brit. Ass. 1878.

Csy.

J. SOCHOCKI. Bestimmung der constanten Factoren in den Formeln für die lineare Transformation der Thetafunctionen. Die Gauss'schen Summen und das Reciprocitätsgesetz der Legendre'schen Symbole. Par. Denkschr. 1878. (Polnisch.).

Wenn zwei Thetafunctionen $\theta_i(\omega, \omega', z)$ und $\theta_j(\Omega, \Omega', z)$, deren Parameter den Bedingungen

$$\Omega = a\omega + b\omega', \quad \Omega' = a_1\omega + b_1\omega', \quad ab_1 - a_1b = 1,$$

in welchen a, b, a_1, b_1 ganze Zahlen sind, Genüge leisten, und wenn i und j so gewählt sind, dass θ_i und θ_j für dieselben Werthe der Grösse z verschwinden, so findet folgende Beziehung statt:

$$\theta_j(\Omega, \Omega', z) = C.e^{\frac{b\pi z^2 i}{\omega\omega'}}.\theta_i(\omega, \omega', z).$$

Den Ausdruck für den Factor C hat Hermite in seiner Arbeit: „Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques" (Liouville J. 1858) gegeben und die Frage endgültig gelöst.

Der Verfasser giebt hier eine andere, auf den elementaren Eigenschaften der Thetafunctionen beruhende Methode zur Bestimmung des Factors C und erhält auf demselben Wege die in Hermite's Arbeit benutzten Formeln von Gauss und Cauchy. Auch die wichtigsten Eigenschaften der Legendre'schen und Jacobi'schen Symbole werden auf eine einfache Weise abgeleitet.

Bcki.

CH. HERMITE. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. C. R. LXXXVI. 271-277, 422-428, 622-628, 777-781, 850-854.

Fortsetzung der Anwendungen, über welche F. d. M. IX. 349 berichtet worden ist. Der Schluss fehlt noch. M.

A. MARTIN. Rectification of the hyperbola. Analyst V. 52-53.

Der Bogen der Hyperbel wird mit Hülfe elliptischer Functionen zweiter Gattung mit reellen Moduln ausgedrückt. Glr. (O.)

V. Puiseux. Note sur les polygones qui sont à la fois inscrits dans un circle et circonscrits à un autre cercle. Ann. Soc. scient. Brux. II. B. 1-12.

Damit ein Polygon von n Seiten einem Kreise vom Radius R eingeschrieben und einem andern vom Radius r umschrieben sei, deren Centrale a ist, genügt es, wie man bewiesen hat, dass zwischen R, r und a eine algebraische Gleichung existirt, deren Grad mit n wächst. Jacobi (Crelle J. III.) hat eine Formel gegeben, mit der man successive die Gleichungen für die verschiedenen Werthe von n erhalten kann. Diese Gleichungen hängen von Functionen P_n, Q_n ab, die sich aus früheren P_{n-1}, Q_{n-1}, P_{n-2}, Q_{n-2} leicht herleiten lassen. Herr Puiseux untersucht diese Functionen in elementarer Weise, woraus folgt: 1) Wenn $n=4i+2$, kann man $r=0$ machen. 2) Wenn $n=6i+3$, so ist $2Rr=R^2-a^2$. 3) Jeder Werth von r in R und a, der einem $n=2p+1$ entspricht, entspricht auch einem $n=(2p+1)(2q+1)$. 4) Jeder Werth von r, der einem $n=2p$ entspricht, entspricht auch einem $n=2p(2q+1)$. 5) Der Grad D in r der Gleichung in r, R, a für $n=2p$, ist so, dass

$$D+\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2p}-(1-\sqrt{2})^{2p},$$

für $n=2p+1$

$$4D+2=(1+\sqrt{2})^{2p+2}+(1-\sqrt{2})^{2p-2}.$$

Mn. (O.)

J. W. L. Glaisher. On the caustic by refraction of a cercle for parallel rays. Messenger (2) VIII. 44-45.

Die Gleichung der kaustischen Linie

$$(1-\mu^2)x=(1-\mu^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}+\mu(1-\mu^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

wird, wie in Cayley's Abhandlung (Phil. Trans. 1857. 281—282) hergeleitet. Nur wird die Elimination durch Benutzung elliptischer Functionen etwas vereinfacht. Glr. (O.)

E. Ghysens. Sur les aires partielles de l'ellipsoïde. Ann. Soc. scient. Brux. II. B. 89-98.

Vereinfachung und Ausdehnung der Untersuchungen, die sich im zweiten Bande von Schlömilch's Compendium der höheren Analysis über diesen Gegenstand finden. Mn. (M.)

Y. Villarceau. Origine géométrique et représentation géométrique des fonctions elliptiques, abéliennes et de transcendantes d'ordres supérieurs. Liouville J. (3) IV. 305-314.

Schon früher war es dem Herrn Verfasser gelungen, nicht blos einzelne elliptische Functionen, sondern die Gesammtheit der Functionen *amu*, *snu*, *cnu*, *dnu* durch eine einzige Curve 4ten Grades geometrisch darzustellen, und zwar dadurch, dass er das Argument (z. B. beim Kreise) nicht als Quotient aus Bogen und Radius, sondern als Quotient aus dem doppelten Sector, dividirt durch das Quadrat des Radius, als „argument aréolaire", auffasste. Diese Betrachtung führt nun zur geometrischen Darstellung der elliptischen, Abel'schen und höheren Transcendenten mit Hülfe algebraischer Curven, die geschlossen sind, aus einem einzigen Zweige bestehen und zu beiden Seiten der senkrechten Coordinaten-Axen symmetrisch liegen. Ist S der Sector zwischen der x-Axe, dem Radiusvector r und der Curve, und a die halbe grosse Axe parallel der x-Axe, so ist $u = \frac{S}{a^2}$ das „argument aréolaire"; ferner ist $du = \frac{r^2}{a^2}\,d\varphi$, und wenn $\frac{a^2}{r^2} = \varDelta$ gesetzt wird,

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

wo also $\varDelta$ eine Function von φ ist, die durch die Gleichung der Curve gegeben ist. Die Gleichung derjenigen algebraischen Curven, welche den oben angegebenen Bedingungen genügen, kann auf die Form

$$x^{2m} + px^{2m-2}y^2 + qx^{2m-4}y^4 + \cdots + ty^{2m} = a^{2m}$$

gebracht werden, oder auf die Form

$$(x^2 + b^2y^2)(x^2 + b'^2y^2)(x^2 + b''^2y^2)\ldots(x^2 + b^{(m-1)2}y^2) = a^{2m},$$

wo die Parameter b, b', b'', ... reelle Grössen sein müssen. Die Function $\Delta(\varphi)$ wird dann bestimmt durch die Gleichung

$$\Delta^m = (1-c^2\sin^2\varphi)(1-c'^2\sin^2\varphi)(1-c''^2\sin^2\varphi)\ldots,$$

wo die c mit den b durch die Relationen $c^2 = 1-b^2$ etc. verbunden sind. M.

K. Schering. Zur Theorie des Borchardt'schen arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen. Borchardt J. LXXXV. 115-170.

Herr Borchardt hat einen Algorithmus für das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen ausgebildet und dieses Mittel durch hyperelliptische Integrale dargestellt (Berl. Monatsber. 1876, 611—621; s. F. d. M. VIII. 300). Herr Karl Schering stellt hier einen Algorithmus für ein Mittel aus drei Elementen auf, der mit dem ersteren übereinstimmt, sobald zwei von den vier Elementen einander gleich werden. Sind nämlich f, φ, ψ reelle positive Grössen, und $f<\varphi<\psi$; sind ferner $M(f,\varphi)$ und $M(f,\psi)$ zwei Gauss'sche arithmetisch-geometrische Mittel (Gauss' Werke III. 352), so führen die successiven Substitutionen

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} f_{n+1} = \sqrt{\varphi_n\psi_n} \\ \varphi_{n+1} = \dfrac{f_n+\varphi_n}{2}\sqrt{\dfrac{\psi_n}{f_n}} \\ \psi_{n+1} = \dfrac{f_n+\psi_n}{2}\sqrt{\dfrac{\varphi_n}{f_n}} \end{cases}$$

zu der Gleichung:

$$\frac{M(f,\varphi).M(f,\psi)}{f} = \frac{M(f_n,\varphi_n).M(f_n,\psi_n)}{f_n} = \frac{M(f_{n+1},\varphi_{n+1}).M(f_{n+1},\psi_{n+1})}{f_{n+1}}$$

für $n = 1, 2, 3 \ldots$ Die Function

$$F(f,\varphi,\psi) = \frac{M(f,\varphi).M(f,\psi)}{f}$$

ist ihrem Werthe nach durch den Algorithmus (I.) vollkommen bestimmt; ihr Werth ist gleich dem gemeinsamen Grenzwerth der Grössen f_n, φ_n, ψ_n für $n=\infty$. Der Algorithmus (I.) lässt sich auch nach rückwärts fortsetzen, d. h., es lassen sich f_n, φ_n, ψ_n

durch f_{n+1}, φ_{n+1}, ψ_{n+1} ausdrücken, und zwar mit Hülfe der Differenzenquadrate

$$\varrho_{n+1}^2 = \varphi_{n+1}^2 - f_{n+1}^2, \quad \sigma_{n+1}^2 = \psi_{n+1}^2 - f_{n+1}^2.$$

Nun wird aus den Grössen f_n, φ_n, ψ_n ein neuer Algorithmus gebildet. Setzt man

$$a_{n+1} = \left(\frac{f_{n+1}+f_n}{2\sqrt{f_n}}\right)^2, \quad b_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{\varphi_n}+\sqrt{\psi_n}}{2}\right)^2, \quad c_{n+1} = f_{n+2},$$

so ergiebt sich der neue Algorithmus in der Form

$$(\text{V.}) \quad \begin{cases} 2a_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} + c_n \\ 2b_n = \sqrt{a_n . b_n} + c_n \\ 2c_n = (\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})\sqrt{c_n}\,; \end{cases}$$

und umgekehrt werden f_n, φ_n, ψ_n durch a_n, b_n, c_n auf folgende Weise ausgedrückt:

$$(\text{VI.}) \quad \begin{cases} f_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 - c_n^2} \\ \varphi_n = \sqrt{a_n b_n} - \sqrt{(\sqrt{a_n b_n})^2 - c_n^2} \\ \psi_n = \sqrt{a_n b_n} + \sqrt{(\sqrt{a_n b_n})^2 - c_n^2}. \end{cases}$$

Auch für die Grenzwerthe von a_n, b_n, c_n folgt, dass sie einander gleich sind, und es wird der Grenzwerth

$$m(a,b,c) = \frac{M(f,\varphi).M(f,\psi)}{f} = \frac{M(f_n,\varphi_n).M(f_n,\psi_n)}{f_n} = m(a_n, b_n, c_n).$$

Diese Function $m(a, b, c)$ wird nun zunächst durch die ganzen elliptischen Integrale dargestellt; es ist

$$\frac{1}{m(a,b,c)} = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{f}{\varphi . \psi} .K.L.$$

Um aber die Analogie des Mittels $m(a, b, c)$ mit einem Mittel aus zwei Elementen, das durch das reelle ganze elliptische Integral erster Gattung darstellbar ist, deutlicher hervortreten zu lassen, wird m durch die reellen ganzen hyperelliptischen Integrale erster Gattung ausgedrückt. Mit Benutzung einer von Jacobi (Crelle J. VIII. 416) gegebenen Reduction gewisser hyperelliptischer Integrale auf eine Summe und Differenz zweier elliptischer Integrale, und mit Hülfe der Theorie der Riemann'schen

Flächen, ergiebt sich folgendes Resultat: Setzt man

$$k' = \frac{f_\nu}{\varphi_\nu}, \quad l' = \frac{f_\nu}{\psi_\nu} \quad (k'<1, l'<1), \quad 1-k'^2 = k^2, \quad 1-l'^2 = l^2,$$

$$\left(\frac{k-l}{k'+l'}\right)^2 = m, \quad \left(\frac{k+l}{k'+l'}\right)^2 = n, \quad t^2 = \frac{(1+m)(1+n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{f_\nu}{\varphi_\nu \psi_\nu},$$

$$R_1(z) = z\left(z-\frac{1}{t}\right)\left(z-\frac{1}{mnt}\right)\left(z+\frac{1}{nt}\right)\left(z+\frac{1}{mt}\right),$$

so ist

$$\frac{\pi^2}{m(a_\nu, b_\nu, c_\nu)} = \int_{z=0}^{z=\frac{1}{t}} \int_{z_1=-\frac{1}{nt}}^{z_1=-\frac{1}{mt}} \frac{(z-z_1)\,dz\,dz_1}{\sqrt{R_1(z)}\sqrt{R_1(z_1)}}.$$

Im Folgenden wird nun gezeigt, wie diese Darstellung von $m(a, b, c)$ sich umgekehrt aus dem von Herrn Borchardt (l. c. p. 617) gegebenen allgemeinen Theoreme ableiten lässt. Dazu werden die Bedingungen aufgesucht, denen die 4 Elemente des Mittels genügen müssen, damit die Nullwerthe m_1, m_2, m_3, m_4 der ganzen rationalen Function, deren Quadratwurzel im Nenner unter den hyperelliptischen Integralen steht, die Gleichung

$$m_1 m_2 - m_3 m_4 = 0$$

erfüllen, also die Integrale auf elliptische Integrale reducirbar sind. M.

L. Königsberger. Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. Leipzig. Teubner.

Nachdem durch eine Reihe von Abhandlungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale, welche Herr Königsberger in Borchardt's Journal und in den Math. Ann. veröffentlicht hat (s. F. d. M. VII. VIII. IX), einzelne damit zusammenhängende Probleme der Integralrechnung ihre Beantwortung gefunden, stellt der Herr Verfasser in dem vorliegenden Werke die Hauptpunkte der Theorie der hyperelliptischen Integrale im Zusammenhange dar, um zugleich eine Basis für eine spätere eingehendere Bearbeitung der Theorie der hyperelliptischen Functionen, der durch Umkehrung der hyperelliptischen Integrale entstehenden

Transcendenten, zu haben. Da uns der hier zugewiesene Raum eine ausführliche Besprechung des Werkes nicht gestattet, so müssen wir uns mit einer flüchtigen Skizzirung des Inhaltes dieser Vorlesungen begnügen; wir verweisen deshalb den Leser auf die eingehende Inhaltsangabe, welche der Herr Verfasser von seinem Werke in dem von ihm herausgegebenen „Repertorium", II. 202—223 gegeben hat. Die Grundlage der Theorie bilden die Riemann'schen Principien der allgemeinen Functionentheorie, wie sie in des Herrn Verfassers „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen" auseinandergesetzt worden sind. Gegenstand der ersten Vorlesung ist die Frage, ob die Lage und die Zahl der Unstetigkeitspunkte auf einem oder beiden Blättern einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche für eine auf derselben eindeutige algebraische Function beliebig angenommen werden könne, und welche nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen Function mit vorgeschriebenen Unstetigkeitspunkten erfüllt sein müssen. In der zweiten Vorlesung werden die Formen für die hyperelliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung, nach Riemann's Definitionen aufgestellt, und in der dritten Vorlesung wird dasjenige hyperelliptische Integral analytisch bestimmt, das in den ν Punkten $z_\alpha (\alpha = 1, 2 \dots \nu)$ wie

$$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha (z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha (z - z_\alpha)^{-2} + \dots + K_\alpha (z - z_\alpha)^{-k\alpha}$$

unendlich wird, wobei vorausgesetzt wird, dass die Summe

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} A_\alpha = 0$$

ist. Dies führt zur Darstellung des Dirichlet'schen Princips für die vorgelegte Fläche. Hierauf wird, in der vierten Vorlesung, ein beliebiges hyperelliptisches Integral auf drei Arten von Normalintegralen reducirt. Die fünfte Vorlesung beschäftigt sich mit der Aufstellung von Relationen zwischen den Periodicitäts-Moduln der verschiedenen, zu derselben Irrationalität gehörenden Integrale, Relationen, wie sie von Legendre für die Periodicitäts-Moduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, von Weierstrass für die der hyperelliptischen Integrale gegeben wurden. In der sechsten Vorlesung folgt nun das Abel'sche Theorem für

die hyperelliptischen Integrale. Dieses kann in der Art ausgedrückt werden, dass eine Summe von beliebig vielen $(2m-p)$ gleichartigen hyperelliptischen Integralen mit irgend welchen Grenzen sich als Summe von p ebensolchen Integralen darstellen lässt, deren obere Grenzen durch eine Gleichung p^{ten} Grades gefunden werden, deren Coefficienten rationale Functionen der $(2m-p)$ willkürlich angenommenen Grenzen und der zugehörigen Irrationalitäten sind. Dieses Theorem führt, in der siebenten Vorlesung, zu der Betrachtung der allgemeinsten algebraischen Beziehungen, welche zwischen hyperelliptischen Integralen für dieselbe oder verschiedene Riemann'sche Flächen bestehen, wenn die oberen Grenzen dieser Integrale algebraisch miteinander verknüpft sind. Durch den Nachweis, dass eine solche Beziehung eine lineare Function der hyperelliptischen Integrale mit constanten Coefficienten sein muss, wird das Transformations-Problem wesentlich vereinfacht. Daran schliesst sich die Frage nach den allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen derselben Ordnung und algebraisch-logarithmischen Functionen. Es ergiebt sich als Folgerung, dass in diesen allgemeinen Relationen keine Umkehrungsfunctionen der Integrale niederer Gattungen auftreten können. In der achten Vorlesung wird dann die Frage behandelt, wann sich ein hyperelliptisches Integral auf solche Integrale niederer Ordnung reduciren lässt; die vollständige Beantwortung dieser Frage ist bis jetzt noch nicht möglich. Gegenstand der letzten Vorlesung ist die Multiplication und Division der hyperelliptischen Integrale.

M.

L. Königsberger. Reduction des Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale. Clebsch Ann. XIII. 540-545.

In einer früheren Arbeit: „Ueber die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen“ (Borchardt J. LXXXI. 193; s. F. d. M. VIII. 286) hatte der Herr Verfasser gezeigt, dass, wenn zwischen hyperelliptischen Integralen ver-

schiedener Ordnung irgend eine lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht, ein System von Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{y_1^k dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^k dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_k(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} \quad (k=0,1\ldots\sigma-1)$$

existirt. Im Vorliegenden wird nun mit Hülfe des Abel'schen Theorems dieses System durch ein anderes von der Form

$$\frac{Y_1^k dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^k dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^k dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = \frac{2F_k(z_1)dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} \quad (k=0,1\ldots\sigma-1)$$

ersetzt, worin $Y_1, Y_2, \ldots Y_\sigma$ die Lösungen einer algebraischen Gleichung darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von z_1 sind, und

$$\sqrt{R_1(Y_1)},\ \sqrt{R_1(Y_2)},\ \ldots\ \sqrt{R_1(Y_\sigma)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y-Grössen und z_1, multiplicirt mit $\sqrt{R(z_1)}$, ausdrücken lassen. M.

L. Königsberger. Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. Borchardt J. LXXXV. 273-294.

Von der in der eben besprochenen Arbeit gegebenen Vereinfachung des Transformationsproblems wird hier eine Anwendung gemacht auf die Herstellung beliebig vieler hyperelliptischer Integrale, die sich auf ebensolche Integrale niederer Ordnung zurückführen lassen. Die Reduction geschieht nicht mit Hülfe der zu den Integralen gehörigen Thetafunctionen, sondern auf dem Wege der algebraischen Transformation, wie ihn Jacobi für die Reduction eines elliptischen Integrales auf ein anderes oder die Transformation der elliptischen Integrale auf einander eingeschlagen hat. Als einfachste Fälle der gefundenen Resultate ergeben sich die von Jacobi und Hermite ausgeführten Reductionen (s. F. d. M. VIII. 278). M.

G. Janni. Saggio di una teorica delle funzioni abeliani d'indice 2. Acc. Pontan. XIX.

D. André. Sur les développements des fonctions $Al(x)$, $Al_1(x)$, $Al_2(x)$, suivant les puissances croissantes du module. C. R. LXXXVI. 1498-1499.

Die Weierstrass'schen Functionen lassen sich bekanntlich sowohl nach Potenzen der Veränderlichen x, als auch nach Potenzen des Moduls k entwickeln. Die Form der Coefficienten in der ersteren Entwickelung hat Herr André früher aufgestellt (C. R. LXXXV. 1108; s. F. d. M. IX. 362). In der vorliegenden Note werden in Kurzem die Methode und die Resultate für die Entwickelung nach steigenden Potenzen von k mitgetheilt. Die Methode ist ähnlich der für die elliptischen Functionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ angewandten (s. oben p. 311). Auch die Resultate sind analog den dort gegebenen, nur weichen sie in Bezug auf die Bedingungen für die Summation ab. Die Form für die Coefficienten in $Al(x)$ ist übrigens schon früher von P. Joubert gegeben (C. R. LXXXII.; s. F. d. M. VIII. 264). M.

A. Cayley. A memoir on the double ϑ-functions. Borchardt J. LXXXV. 214-245.

Fortsetzung der Untersuchungen über Thetafunctionen zweier Argumente (Borchardt J. LXXXIII. 210—233; s. F. d. M. IX. 365 und 366). Als Einleitung werden in analoger Weise, wie dort die doppelten Thetafunctionen, hier die Kreis- oder Exponentialfunctionen und die einfachen Thetafunctionen behandelt (s. oben p. 309). Mit Hülfe der Differentialgleichungen 1ter und 2ter Ordnung für die Functionen $A(u)$, $B(u)$, $\Omega(u)$, die durch die Relationen

$$A = \Omega\sqrt{a-x}, \quad B = \Omega\sqrt{b-x},$$

denen die Gleichung

$$\Omega\partial^2\Omega - (\partial\Omega)^2 = 0$$

zugefügt wird, verbunden sind, ergiebt sich als Integral der Differentialgleichung

$$\partial u = \frac{\partial x}{\sqrt{a-x.b-x}},$$

$$\sqrt{a-x} = \sqrt{a-b}.\cosh \tfrac{1}{2}u, \quad \sqrt{b-x} = -\sqrt{a-b}.\sinh \tfrac{1}{2}u.$$

Ebenso wird bei der Behandlung der einfachen Thetafunctionen ausgegangen von den Definitionen

$$A = \Omega\sqrt{a-x},\ B = \Omega\sqrt{b-x},\ C = \Omega\sqrt{c-x},\ D = \Omega\sqrt{d-x},$$

denen die Gleichung

$$\Omega\partial^2\Omega-(\partial\Omega)^2 = \Omega^2 M, \quad M = \tfrac{1}{4}(\partial u)^2\{-2x^2+x(a+b+d)+k\}$$

hinzugefügt wird, wo die Constante

$$k = a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd.$$

Für die Doppel-Thetafunctionen hat man entsprechend 16 ϑ-Functionen A, B, C, D, E, F, AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, denen eine ω-Function Ω zugesellt wird (s. die oben angeführten Referate). Es wird nun die Form der algebraischen Relationen bestimmt, die zwischen diesen 16 Thetafunctionen bestehen. Jede der quadratischen Functionen $A^2, \dots (AB)^2, \dots$ ist eine Summe von Quadraten, und wenn man 4 dieser quadratischen Functionen beliebig auswählt, so lassen sich die 12 übrigen alle als eine Summe aus jenen vier Quadraten, multiplicirt mit entsprechenden Coefficienten, darstellen. In gleicher Weise bilden die 120 Producte von zweien dieser 16 Functionen 30 Gruppen, so dass, wenn man beliebig 2 aus jeder Gruppe auswählt, die übrigen beiden in dieser Gruppe lineare Functionen jener sind. Im Folgenden wird die analytische Darstellung dieser Relationen vollständig durchgeführt. M.

H. Weber. Ueber die Transformationstheorie der Thetafunctionen, insbesondere derer von drei Veränderlichen. Brioschi Ann. (2) IX. 126-166.

Durch Einführung passender Variabeln kann man stets eine $2p$-fach periodische Function von p Veränderlichen so umformen,

dass jede Veränderliche die Periode πi hat, und dass ausserdem p Periodensysteme

$$a_{1,\nu} \quad a_{2,\nu} \dots a_{p,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \dots p)$$

bestehen, um welche sich die Variabeln resp. gleichzeitig ändern. Es muss

$$a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$$

und der reelle Theil von $\sum_{\mu,\nu} a_{\mu,\nu} x_\mu x_\nu$ negativ sein, damit die Function sich durch Thetafunctionen darstellen lasse. Nun wird diese Function transformirt durch die Substitution

$$u_h = \sum_{i=1}^{p} Q_i^{(h)} v_i \quad (h = 1, 2, \dots p),$$

wo die Coefficienten $Q_i^{(h)}$, deren Determinante nicht verschwinden darf, so zu bestimmen sind, dass die neue $2p$-fach periodische Function ebenfalls für jede der Variabeln $v_1, v_2, \dots v_p$ die Periode πi hat, und dass die andern Periodensysteme $(b_{1,\nu}\ b_{2,\nu} \dots b_{\mu,\nu})$ den für die Darstellbarkeit durch Thetafunctionen erforderlichen Bedingungen genügen. Versteht man nun unter

$$\alpha_i^k \quad (i = 1, 2 \dots 2p, \quad k = 1, 2 \dots 2p)$$

ein System von $4p^2$ ganzen Zahlen, so ist

$$Q_\mu^{(\nu)} \pi i = \alpha_\mu^{(\nu)} \pi i + \sum_{1,p}^{i} \alpha_\mu^{(p+i)} a_{i,\nu},$$

$$\sum_{1,p}^{i} Q_i^{(\nu)} b_{i,\mu} = \alpha_{p+\mu}^{(\nu)} \pi i + \sum_{1,p}^{i} \alpha_{p+\mu}^{(p+i)} a_{i,\nu},$$

und es bestehen zwischen den $a_{i,k}$ und $b_{i,k}$ die linearen Gleichungen:

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{1,p}^{i,i'} \alpha_i^{p+i} b_{i,\nu} a_{i',\mu} = \alpha_{p+\mu}^{(\nu)} \pi i + \sum_{1,p}^{i} \alpha_{p+\mu}^{(p+i)} a_{i,\nu} - \sum_{1,p}^{i} \alpha_i^{(\nu)} b_{i,\mu}.$$

Aus den Bedingungen $b_{i,i'} = b_{i',i}$ ergeben sich, wenn n eine ganze Zahl ist, die Relationen:

$$\sum_{1,p}^{i} (\alpha_{p+i}^{(\nu)} \alpha_i^{(\mu)} - \alpha_{p+i}^{(\mu)} \alpha_i^{\nu}) = \begin{cases} \pm n, \text{ wenn } \nu - \mu = \pm p, \\ 0 \text{ in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \dots 2p)$$

Genügt ein Zahlensystem $\alpha_i^{(k)}$ dieser Bedingung, so hat die Determinante

$$\varDelta = \Sigma \pm \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(2)} \dots \alpha_{2p}^{(2p)}$$

den Werth n^p. Die ganze positive Zahl n heisst der Grad der Transformation; letztere heisst linear, wenn $n = 1$ ist. Nun werden zwei Transformationen durch wiederholte Substitution zusammengesetzt zu einer dritten:

$$(R) = (P)(Q).$$

Wie bei Jacobi fund. nov. p. 71, in den elliptischen Functionen, werden solche Transformationen (Q), welche (P) zur Multiplication ergänzen, zu (P) supplementäre genannt; und zwei Transformationen (P), (Q) heissen äquivalent, wenn die eine aus der andern durch eine lineare Transformation (B) entsteht, so dass

$$(P) = (Q)(B), \qquad (Q) = (P)(B)^{-1}.$$

Alle äquivalenten Transformationen bilden Eine Classe. Mit Hülfe des von Kronecker (Ueber bilineare Formen, Berl. Ber. 1866 und Borchardt J. LXVIII.) angegebenen und schon von Clebsch und Gordan in der Theorie der Abel'schen Functionen angewandten Verfahrens wird dann ein möglichst einfacher Repräsentant einer jeden Classe erhalten. Eine so charakterisirte Normalform (N) hat in jeder Classe nur Eine Transformation. Für eine Primzahl n, als Transformationsgrad, werden 8 Typen als Repräsentanten der nicht äquivalenten Transformationsclassen aufgestellt. Schliesslich wird das von Kronecker (l. c.) gefundene Resultat erwiesen, dass es singuläre Werthe der Moduln $a_{i,k}$ giebt, für welche die $b_{i,k}$ den entsprechenden $a_{i,k}$ gleich werden, und dass diese singulären Moduln durch die Wurzeln einer reciproken Gleichung $2p^{\text{ten}}$ Grades mit ganzzahligen Coefficienten sich bestimmen lassen. Es existirt für eine gegebene Transformation, für welche diese Gleichung $2p^{\text{ten}}$ Grades lauter von einander verschiedene imaginäre Wurzeln hat, höchstens Ein den Convergenzbedingungen genügendes Grössensystem

$$\omega_{i,k} = \frac{b_{i,k}}{\pi i} = \frac{a_{i,k}}{\pi i},$$

welches dem entsprechenden transformirten Grössensystem gleich wird; aber es existirt, wie Beispiele lehren, nicht immer ein solches Grössensystem. Hat die Gleichung $2p^{\text{ten}}$ Grades gleiche Wurzeln, dann können unendlich viele solcher Grössensysteme existiren.

Diese hier entwickelten allgemeinen Transformationsprinci-

pien werden nun auf die Thetafunction dreier Variabeln

$$\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}(u_1, u_2, u_3)$$

angewendet. Es wird eine Function von der Form

$$\Pi_{(\varpi)}(u_1, u_2, u_3) = e^{f(u_1, u_2, u_3)}\,\vartheta_{(\varpi)}(u_1, u_2, u_3;\ a)$$

betrachtet, in welcher die homogene Function zweiten Grades

$$f(u_1, u_2, u_3) = \sum^{i}\sum^{k} c_{i,k}\, u_i\, u_k$$

so bestimmt wird, dass dieselbe in eine ϑ-Function der Variabeln v_1, v_2, v_3 übergeht. Nach Behandlung der Transformation ersten Grades wird der Hauptsatz der allgemeinen Transformationstheorie bewiesen, dass sich nämlich die Function $\Pi_{(\varpi)}(u_1, u_2, u_3)$ als homogene ganze rationale Function n^{ten} Grades der Functionen

$$\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_1 & g_3 \\ h_1 & h_1 & h_3 \end{Bmatrix}(v_1, v_2, v_3;\ b)$$

darstellen lässt. Hierauf werden speciell die Transformationen des zweiten Grades behandelt und hier die vollständigen Transformationsformeln für die Repräsentanten der 135 Transformationsclassen gegeben. M.

H. Weber. Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle. Clebsch Ann. XIII. 35-48.

Es wird im Vorliegenden für die einer besonderen Classe von algebraischen Functionen zugehörigen algebraischen Integrale und Thetafunctionen eine Reihe von Ausnahmefällen begründet, von denen die speciellsten die hyperelliptischen Functionen bilden. Setzt man in die Thetafunction

$$\vartheta(v_1, v_2, \dots v_n) = \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\right)^{p} e^{\sum\limits_{p=1}^{i}\sum\limits_{p=1}^{k} a_{i,k} h_i h_k + 2\sum\limits_{p=1}^{i} h_i v_i}$$

für die Moduln $a_{i,k}$ die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale erster Gattung an den Querschnitten b_i und für die Argumente v_i die um Constanten vermehrten Normalintegrale erster Gattung:

$$v_i = \int_{\varepsilon}^{\zeta} du_i - e_i,$$

wo ε, ζ zwei beliebige Punkte in der $(2p+1)$-fach zusammenhängenden Fläche T sind, und ζ variabel, so entsteht die Function

$$\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - e_h\right)\right],$$

welche eine in der einfach zusammenhängenden Fläche T' stetige Function von ζ ist, die entweder identisch verschwindet oder in p Punkten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Nun betrachten wir den Quotienten

$$\frac{\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - e_h\right)\right]\cdot\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + e_h\right)\right]}{\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - f_h\right)\right]\cdot\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + f_h\right)\right]};$$

dieser ist eine wie T verzweigte Function von ζ, die sich als Quotient zweier Functionen φ, $= \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, darstellen lässt. Es werden für die Grössensysteme e, f derartige Annahmen gemacht, dass die Nullpunkte des Zählers sowohl als des Nenners paarweise zusammenfallen; dadurch entstehen Functionen φ, welche in $p-1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden. Die Quadratwurzeln aus diesen Functionen werden „Abel'sche Functionen" im engeren Sinne genannt. Wenn von den 2^{2p} Functionen

$$\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right] \quad \text{oder} \quad \vartheta\{\varpi\}\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h\right)\right]$$

keine identisch für alle Lagen von ε, ζ verschwindet, so existiren $2^{p-1}(2^p-1)$ Abel'sche Functionen. Hier werden nun diejenigen Ausnahmefälle, in denen eine oder einige der Functionen

$$\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h \pm \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right]$$

identisch verschwinden, untersucht, und das Verhalten der Abel'schen Functionen in diesen Fällen studirt. Es ergiebt sich der Satz: „Wenn die Function

$$\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{i=1}^{m-1}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right]$$

identisch für alle ε_i, ζ_i verschwindet, dagegen

$$\vartheta\left[\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right]$$

nicht identisch für alle ε_i, ζ_i verschwindet, oder, was dasselbe ist, wenn für die Argumentwerthe $(\frac{1}{2}\varpi_1, \frac{1}{2}\varpi_2, \ldots \frac{1}{2}\varpi_p)$ die Function ϑ mit ihren sämmtlichen Derivirten bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich, aber nicht sämmtlichen Derivirten der m^{ten} Ordnung verschwindet, so entspricht der Charakteristik (ϖ) ein ganzes System Abel'scher Functionen, welche linear und homogen mit willkürlichen constanten Coefficienten aus m solchen Functionen zusammengesetzt sind.“ Und umgekehrt: „Wenn ein System von Abel'schen Functionen existirt, welches linear und homogen mit willkürlichen constanten Coefficienten aus m linear unabhängigen Abel'schen Functionen zusammensetzbar ist, so lässt sich eine Charakteristik (ϖ) bestimmen von der Eigenschaft, dass die Function ϑ sammt allen ihren Derivirten bis zur Ordnung $m-1$ einschliesslich verschwindet für die Argumentwerthe

$$(\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \ldots \tfrac{1}{2}\varpi_p).“$$

Die Anwendung dieses Satzes auf die hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht p ergiebt, dass $\frac{p+2.p+3\ldots 2p+1}{1.2.3\ldots p}$ Thetafunctionen übrig bleiben, welchen keine Abel'schen Functionen entsprechen, und diese müssen grade Thetafunctionen sein, welche für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwinden. Nun werden, unter Betrachtung der zwischen den Functionen φ bestehenden Relationen, die aus der Anzahl und Beschaffenheit der vorhandenen Systeme von unendlich vielen Abel'schen Functionen sich ergebenden Ausnahmefälle näher untersucht, von denen die hyperelliptischen Functionen die speciellste Classe bilden, und es wird diese Untersuchung für die Werthe $p = 3, 4, 5$ eingehender durchgeführt. M.

M. Nöther. Ueber die Thetafunctionen von vier Argumenten. Erl. Ber. 1878. 87-91.

Die Charakteristiken der ϑ-Functionen sind von Herrn Weier-

strass so gruppirt, dass sich hieraus die Additionstheoreme für die hyperelliptischen ϑ-Functionen in einfacher Form ergeben. Dasselbe ist von Herrn Weber für die allgemeinen ϑ-Functionen von drei Argumenten geliefert. Der Herr Verfasser hat, von algebraischen Betrachtungen über Berührungscurven für $p=4$ ausgehend, solche vollständigen Systeme von je 8 Charakteristiken auch für die ϑ-Functionen von 4 Variabeln aufgestellt. Die Abhandlung, deren Resultate hier mitgetheilt werden, ist später in Clebsch Ann. erschienen. M.

F. Lindemann. Ueber eine Verallgemeinerung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abel'schen Integrale. Freib. Ber. VII 273-291.

Es wird folgende, das Jacobi'sche Umkehrproblem erweiternde Aufgabe gelöst: Es seien: $u_1, u_2 \dots u_p$ die Normalintegrale erster Gattung einer Curve p^{ten} Geschlechts und $v_1, v_2 \dots v_p$ gegebene Grössen; man soll aus den p Gleichungen

$$q_1\int_\mu^{x_1} du_h + q_2\int_\mu^{x_2} du_h + \cdots + q_p\int_\mu^{x_p} du_h = v_h$$
$$(h = 1, 2, \dots p,)$$

in denen $q_1, q_2, \dots q_p$ beliebige ganze Zahlen ($\geqq 1$) bedeuten, die oberen Grenzen $x_1, x_2, \dots x_p$ bestimmen. M.

F. Lindemann. Extrait d'une lettre, concernant l'application des intégrales abéliennes à la géométrie des courbes planes, adressée à M. Hermite.

Ch. Hermite. Extrait d'une lettre à M. Lindemann (Observations algébriques sur les courbes planes).

F. Lindemann. Extrait d'une seconde lettre, concernant l'application etc., à M. Hermite. Borchardt J. LXXXIV. 294-305.

Lindemann macht die Bemerkung, dass sich der Beweis des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts einer Curve bei eindeutiger Transformation in der Weise führen lässt, dass man

die zur Transformation verwandten Functionen der Coordinaten nach Riemann als Summen von Abel'schen Integralen zweiter Gattung darstellt. Die gleiche Bemerkung lässt sich, wie Lindemann in dem anderen Briefe ausführt, zum Beweise desjenigen Correspondenzsatzes verwenden, welcher auf einer allgemeinen algebraischen Curve dem Chasles'schen Correspondenzprincip für die gerade Linie entspricht.

In dem Antwortschreiben beschäftigt sich Hermite mit der Aufstellung einer Bedingung für das Auftreten mehrerer Doppelpunkte auf einer ebenen Curve. Bl.

E. Heine. Handbuch der Kugelfunctionen. Theorie und Anwendungen. Erster Band, zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Berlin. G. Reimer.

Ch. Hermite. Sur la théorie des fonctions sphériques. C. R. LXXXVI. 1515-1519.

Das bekannte Heine'sche Handbuch hat in der vorliegenden zweiten Auflage eine wesentliche Erweiterung und zum Theil völlige Umgestaltung erfahren. Der hauptsächlichste Grund dafür ist die erschöpfende Berücksichtigung der zahlreichen, seit dem Druck der ersten Auflage erschienenen Arbeiten aus dem Gebiete der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen. Ausserdem hat der Verfasser hier auch viel eignes neues Material beigebracht. Eine vollständige Uebersicht über alle Einzelnheiten des inhaltreichen Buches zu geben, würde den zu Gebote stehenden Raum weit überschreiten; Referent beschränkt sich daher auf die Hervorhebung einzelner weniger, besonders wichtiger Punkte. Der Abschnitt über die Kugelfunctionen der zweiten Art ($Q^n(x)$) und ihre verschiedenen Darstellungen ist als eine ganz neue Arbeit anzusehen. Bemerkenswerth ist die Art, Q so zu definiren, dass diese Function für alle Werthe der Variabeln eindeutig wird. An Stelle des Dirichlet'schen Beweises für die Entwickelung von Functionen zweier Veränderlichen nach Kugelfunctionen ist ein völlig anderer getreten, bei dem die Arbeiten von Dini benutzt wurden, der aber in wesentlichen Punkten

Herrn Heine eigenthümlich ist. Die schon in der ersten Auflage vorhandenen Capitel über die Lamé'schen Functionen sind erweitert, und ausserdem ist ein neuer Abschnitt über die Lamé'schen Functionen der verschiedenen Ordnungen hinzugefügt, der auch eine Theorie der Kugelfunctionen höherer Ordnung giebt. Zu erwähnen ist sodann, dass der Verfasser eine ausführlichere und strengere Begründung überall dort giebt, wo Formeln, die zunächst für reelle Grössen gelten, auf complexe Variabele auszudehnen sind. Neben der systematischen Darstellung aller auf die Kugelfunctionen und die Lamé'schen Functionen bezüglichen Untersuchungen enthält das Buch noch grössere Zusätze über trigonometrische Reihen und ihre Convergenz in gleichem Grade, über hypergeometrische Reihen und über Kettenbrüche. In diesen Zusätzen, die durch kleineren Druck von dem Haupttext unterschieden sind, werden die darin behandelten Gegenstände weiter geführt, als es ihre Beziehung zu den Kugelfunctionen nöthig macht, und es findet sich hier eine grosse Zahl von interessanten und zum Theil neuen Resultaten. Endlich werden auch die hauptsächlichsten Formeln über Cylinderfunctionen (Bessel'sche Functionen) den entsprechenden Formeln der Kugelfunctionen angereiht, wobei die ersteren Functionen als Grenze der letzteren für den Fall auftreten, dass der Index $n = \infty$ wird. Aus den Lamé'schen Functionen ergeben sich auf ähnliche Weise die Functionen des elliptischen Cylinders.

Der vorliegende erste Band enthält nur die Theorie, die Anwendungen sollen in einem besonderen Bande später folgen.

Der Aufsatz des Herrn Hermite enthält eine Anzeige des Heine'schen Buches. Speciell hervorgehoben wird als etwas wesentlich Neues der Abschnitt über die Lamé'schen Functionen höherer Ordnung und die Functionen des elliptischen Cylinders.

Wn.

F. Neumann. Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. Erste und zweite Abtheilung. Leipzig. Teubner.

Die erste Abtheilung des Neumann'schen Buches beschäftigt

sich mit der Darstellung der Kugelfunctionen mittelst unendlicher Reihen und bestimmter Integrale. Nachdem die Kugelfunctionen als particuläre Integrale der bekannten Differentialgleichung definirt sind, derart, dass sich die beiden Arten der Kugelfunctionen durch ihr Verhalten in den singulären Punkten $+1$, -1, ∞ unterscheiden, werden für die abgeleiteten Kugelfunctionen (so nennt der Verfasser die Kugelfunctionen mit 2 Indices, die bei Heine zugeordnete Functionen heissen; die zugeordneten Functionen unterscheiden sich übrigens von den abgeleiteten durch einen constanten Factor,) nach der gewöhnlichen Methode aus der Differentialgleichung zwei nach Potenzen von $(x-1)$ fortschreitende Reihen aufgestellt, die mit dem Factor $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}}$ (j der zweite Index) multiplicirt sind. Eine von diesen Reihen ist mit der Kugelfunction erster Art $P_{nj}(x)$, die andere mit der zweiten Art $Q_{nj}(x)$ gleichwerthig, d. h. unterscheidet sich von diesen Functionen nur durch einen constanten Factor, wie sich aus dem Verhalten in den singulären Punkten ergiebt. Aus den so erhaltenen Reihen werden andere abgeleitet durch Vertauschung von x mit $-x$, von j mit $-j$, von n mit $-(n+1)$, resp. dadurch, dass mehrere dieser Vertauschungen, durch welche die Differentialgleichung nicht geändert wird, vorgenommen werden. Es wird dann untersucht, mit welcher der beiden Arten der Kugelfunctionen die neuen Reihen gleichwerthig sind. Dabei ergiebt sich nun, dass man für die Kugelfunctionen erster Art zwei Fälle unterscheiden muss: 1) der zweite Index j ist kleiner als der Hauptindex n oder ihm gleich; 2) $n > j$. Für den ersten (gewöhnlich allein untersuchten) Fall giebt es ein particuläres Integral der Differentialgleichung, das in den beiden Punkten $+1$ und -1 endlich ist, $P_{nj}(x)$. Im zweiten Falle dagegen kann ein particuläres Integral nur in einem dieser Punkte endlich sein, während es im zweiten unendlich ist. Hier existiren also zwei Functionen, $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ genannt, deren erste für $x = +1$ unendlich wird, für $x = -1$ verschwindet, während die zweite umgekehrt für $x = -1$ unendlich wird, $x = +1$ verschwindet. Die constanten Factoren dieser Integrale werden so bestimmt, dass

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - T_{nj}(x)$$

wird. Bei $Q_{nj}(x)$ existirt ein derartiger Unterschied nicht.

Sodann wird gezeigt, dass die für die neuen Functionen $S_{nj}(x)$, $T_{nj}(x)$ erhaltenen Reihen sich durch bestimmte Integrale summiren lassen. Nämlich:

$$S_{nj}(x) = h(1-x^2)^{\frac{1}{2}j} \int_{\infty}^{1} \frac{P_n(z)\,dz}{(x-z)^{j+1}},$$

$$T_{nj}(x) = h(1-x^2)^{\frac{1}{2}j} \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,dz}{(x-z)^{j+1}},$$

wobei $P_n(z)$ die einfache Kugelfunction, h eine Constante ist, während der Integrationsweg so zu wählen ist, dass die Stelle $z = x$ vermieden wird. Aus den Integralen werden neue Reihen für $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ abgeleitet, und aus diesen ergiebt sich eine zweite Darstellung jener Reihen durch bestimmte Integrale, nämlich durch solche von der Form

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_{x}^{\pm 1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,dz.$$

Durch Integrale von analoger Form lassen sich auch die Functionen $P_{nj}(x)$ und $Q_{nj}(x)$ darstellen. Schliesslich werden die sämmtlichen Functionen $P_{nj}(x)$, $Q_{nj}(x)$, $S_{nj}(x)$, $T_{nj}(x)$ in Reihen nach steigenden Potenzen von x entwickelt. Diese Reihen lassen sich sämmtlich auf die Form bringen

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}j}\{C\mathfrak{R}_{nj}(x) + C_1\mathfrak{S}_{nj}(x)\}.$$

Die Reihen $\mathfrak{R}_{nj}$ und $\mathfrak{S}_{nj}$, deren erste nur grade, die zweite nur ungrade Potenzen enthält, sind dieselben für alle 4 Functionen. Die Constanten C und C_1 ändern ihre Werthe, wenn man von einer Function zur anderen übergeht. Dieselben sind entweder reell oder gleich einer reellen Zahl mal $\log(-1)$. Die Reihen convergiren, soweit sie nicht endlich sind, für $x^2 < 1$; zu bemerken ist, dass wegen des Factors $\log(-1)$ die Function $Q_{nj}(x)$ für $x^2 < 1$ vieldeutig wird. Auf imaginäre Werthe der Variabeln geht der Verfasser nicht ein.

In einem Anhange stellt der Verfasser eine grosse Anzahl von recurrenten Relationen für die einfachen und die abgeleiteten

Kugelfunctionen zusammen, die zum Theil bekannt, zum Theil eine weitere Ausführung von Bekanntem sind.

In der zweiten Abtheilung wird die Aufgabe, das Product zweier Kugelfunctionen in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe zu entwickeln, auf eine neue und einfache Art gelöst. Es wird gezeigt, dass ein solches Product einer linearen homogenen Differentialgleichung der vierten Ordnung genügt. Ihre vier particulären Integrale sind die vier Producte $P_p P_q$, $Q_p Q_q$, $P_p Q_q$, $P_q Q_p$, wenn P und Q einfache Kugelfunctionen der ersten und zweiten Art, p, q ihre Indices sind. Andrerseits kann man jene Differentialgleichung durch eine nach einfachen Kugelfunctionen fortschreitende Reihe integriren und erhält vier particuläre Integrale in anderer Form. Die Vergleichung beider Arten von Integralen giebt die gesuchten Reihen. Unter den verschiedenen Anwendungen auf specielle Fälle ist die Entwickelung von $\log\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ in eine nach Kugelfunctionen $P_n(z)$ geordnete unendliche Reihe hervorzuheben. Ferner wird das Product zweier abgeleiteten Kugelfunctionen ersten Grades, z. B. $P_{p1} . P_{q1}$ etc., sowie das einer Kugelfunction und einer abgeleiteten Kugelfunction ersten Grades in eine ähnliche Reihe entwickelt. Endlich werden verschiedene Integrale der Form ermittelt

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)dz}{\sigma - z},$$

wo $F(z)$ eines der zuletzt entwickelten Producte ist.

Wn.

W. D. Niven. On spherical harmonics. Messenger (2) VII. 131-136.

Das hauptsächlichste der hier bewiesenen Theoreme ist folgendes: Ist V der Werth, den eine der Laplace'schen Gleichung genügende Function im Punkte x, y, z annimmt; ist V_0 der Werth derselben Function im Anfangspunkte der Coordinaten; sind ferner V', V'_0 die Werthe einer anderen analogen Function, so findet die Gleichung statt:

$$\iint \frac{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^i V}{i!}\,\frac{\left(x\frac{\partial'}{\partial x}+y\frac{\partial'}{\partial y}+z\frac{\partial'}{\partial z}\right)^i V'}{i!}\,dS$$
$$= \frac{4\pi 2^i R^{2i+2}}{(2i+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial'}{\partial z}\right)V_0 V_0'.$$

Dabei ist die Integration links über die Oberfläche einer Kugel erstreckt, die mit dem Radius R um den Anfangspunkt beschrieben ist; $\frac{\partial}{\partial x}V_0$ bezeichnet $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$ etc., und die Differentiationen $\frac{\partial}{\partial x}$ etc. sind allein auf die Function V, $\frac{\partial'}{\partial x}$ etc. allein auf V' zu beziehen. Aus diesem allgemeinen Satze werden dann noch andere, als specielle Fälle hergeleitet. Die Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren (Vergl. F. d. M. IX. 372).

Glr. (Wn.)

J. C. Adams. On the expression for the product of any two Legendre's coefficients by means of a series of Legendre's coefficients. Proc. of London XXVII. 63-71.

Der Verfasser hat früher (Febr. 1873) den Satz gefunden:

$$\int_{-1}^{1} P_m P_n P_p\, dp = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\,\frac{A(s-m)A(s-n)A(s-p)}{A(s)},$$

wo

$$s = \tfrac{1}{2}(m+n+p) \quad \text{und} \quad A(m) = 2^m.\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots m-\frac{1}{2}}{1.2\ldots m} = 2^n.\frac{\Pi(m-\frac{1}{2})}{\Pi(m)\Pi(-\frac{1}{2})}.$$

Der Satz wurde unabhängig auch 1874 von Herrn Ferrers entdeckt und ist in seinen „Spherical harmonics“ London 1877 publicirt.

Cly. (O.)

J. Todhunter. Note on Legendre's coefficients. Proc. of London XXVII. 381-383.

Enthält einen kürzeren Beweis des Adams'schen Satzes über

das Integral $\int_{-1}^{1} P_m P_n P_p dp$. Das Integral war, wie der Verfasser bemerkt, schon in einer Dissertation von N. C. Schmidt (Brüssel 1858) behandelt; dort war die Untersuchung aber zu keinem einfachen Resultat gelangt. Cly. (O.)

Escary. Sur les fonctions qui naissent du développement de l'expression

$$(1-2ax+a^2\alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}}.$$

C. R. LXXXVI. 114-116.

Escary. Sur les fonctions qui naissent du développement de l'expression

$$(1-2ax+a^2\alpha^2)^{\frac{2l+1}{2}}.$$

C. R. LXXXVI. 1451-1454.

Escary. Remarque relative à deux intégrales obtenues par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur. C. R. LXXXVII. 646-648.

Aus der bekannten Entwickelung des Ausdrucks

$$(1-2\alpha x+a^2\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

nach Potenzen von α (durch welche Entwickelung die einfachen Kugelfunctionen erster Art definirt werden) leitet der Verfasser durch l-malige Differentiation, resp. durch $(l+1)$-malige Integration nach x die Entwickelung von

$$(1-2ax+a^2\alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}},$$

resp. von

$$(1-2ax+a^2\alpha^2)^{\frac{2l+1}{2}},$$

ab. Den Coefficienten von α^n in diesen Reihen bezeichnet er mit $X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}$, resp. mit $X^{(n)}_{+\frac{2l+1}{2}}$. Für diese Functionen ergeben sich sofort Darstellungen als vielfache Differentialquotienten. Dann werden die Differentialgleichungen angegeben, denen diese Functionen genügen, sowie Recursionsformeln für je drei solcher Functionen mit auf einander folgenden Indices n. Diese Re-

sultate sind nicht neu, sondern finden sich schon bei Gauss und in der nachgelassenen Arbeit von Jacobi über die hypergeometrische Reihe in Borchardt's J. LVI.; (vergl. auch Heine, Kugelfunctionen, zweite Auflage, sowie F. d. M. IX. 374). Einige weitere vom Verfasser aufgestellte Sätze sind falsch. Es ist nicht, wie der Verfasser meint

$$\int_{-a}^{+a} X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} \,.\, X^{(\nu)}_{-\frac{2l+1}{2}}\, dx = 0,$$

sondern

$$\int_{-a}^{+a} X^{n}_{-\frac{2l+1}{2}} \,.\, X^{(\nu)}_{-\frac{2l+1}{2}} (a^2-x^2)^l dx = 0.$$

Ein ähnlicher Fehler findet sich bei der Function $X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}}$, sowie bei den Werthen der analogen Integrale für $n=\nu$.

Es folgt eine Bemerkung über die Wurzeln der Gleichung $X^{(n)}_{\mu}=0$, wenn $X^{(n)}_{\mu}$ der Coefficient von α^n in der Entwickelung von $(1-2\alpha x+a^2\alpha^2)^{\mu}$ ist. Je nach der Realität, resp. der Grösse der Wurzeln lassen sich die $X^{(n)}_{\mu}$ in fünf Kategorien theilen.

In dem dritten Aufsatze zeigt der Verfasser, dass sich zwei von Lamé in seinen „Leçons sur les fonctions inverses" p. 255 gegebene Ausdrücke auf obige Functionen $X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ mit reellen oder imaginären Argumenten reduciren. Uebrigens wiederholt sich hier der oben bemerkte Fehler. Wn.

Escary. Sur une proposition de Didon. C. R. LXXXVI. 1014-1017.

Durch Specialisirung einer von Herrn Didon in den Nouv. Ann. (2) XI. 96 gegebenen Formel erhält der Verfasser die Entwickelung der Function

$$[1-2a(h_1+h_2+\cdots+h_\nu)x + a^2(h_1+h_2+\cdots+h_\nu)(h_1A_1^2+h_2A_2^2+\cdots+h_\nu A_\nu^2)]^{-\frac{2l+1}{2}}$$

nach steigenden Potenzen von a, und die Coefficienten, die mit $P^{n}_{-\frac{2l+1}{2}}$ bezeichnet werden, sind ganze Functionen von x, die

analoge Eigenschaften mit denen haben, die **Lamé** bei der Bestimmung der stationären Temperaturen im Innern eines dreiachsigen Ellipsoids eingeführt hat. Sie genügen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(A_1^2+A_2^2+\cdots+A_\nu^2-\nu x^2)y''-2\nu(l+1)xy'+\nu n(n+2l+1)y = 0;$$

und zwischen 3 auf einander folgenden Polynomen $P^n_{-\frac{2l+1}{2}}$, in denen l constant bleibt, findet eine lineare Relation statt.

Hr.

Lord Rayleigh. On the relation between the functions of Laplace and Bessel. Proc. L. M. S. IX. 61-64.

Dass die Bessel'sche Function $J_0(z)$ die Grenze der Kugelfunction $P^n\left(\cos\frac{z}{n}\right)$ für $n=\infty$ ist, ist zuerst von **Mehler** gezeigt, und die analogen Formeln für die Bessel'schen Functionen mit anderen ganzzahligen Indices sind von **Heine** abgeleitet (cf. F. d. M. I. p. 147). Diese Formeln reproducirt der Verfasser der vorliegenden Arbeit, ohne die oben genannten Quellen anzugeben. Er zeigt weiter, dass man auch gewisse, die Bessel'schen Functionen betreffende Recursionsformeln, z. B. die Formel

$$\tfrac{1}{2}z\{J_{m-1}(z)+J_{m+1}(z)\} = mJ_m(z)$$

und ähnliche, aus den analogen Formeln für Kugelfunctionen durch Grenzbetrachtungen ableiten kann.

Wn.

Worms de Romilly. Note sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx}+V=0.$$

Liouville J. (3) III. 177-187.

Weder die in der vorliegenden Arbeit gegebenen Resultate, noch die Methode der Ableitung sind neu. Das Hauptresultat, dass die im Titel genannte Gleichung stets ein Integral der Form hat

$$V = A\int^{\pi}\cos(x\cos w)\sin^{\mu}w\,dw,$$

ist nichts Anderes, als die längst bekannte Darstellung der Bessel'schen Functionen in Form eines bestimmten Integrals (denn es ist $V = C.x^{-\frac{1}{2}\mu} J_{\frac{1}{2}\mu}(x)$, wo C eine Constante, J die Besselsche Function mit dem Index $\frac{1}{2}\mu$ ist). Das Resultat wird hier dadurch abgeleitet, dass für das obige Integral und drei analoge, die durch Vertauschung der Functionen Sinus und Cosinus unter dem Integral entstehen, Recursionsformeln gebildet werden, aus denen die Differentialgleichung folgt. Auch diese Art der Ableitung ist nicht neu; u. A. geht Lommel in seinen Studien über Bessel'sche Functionen ebenfalls von der Definition jener Functionen durch das obige Integral aus. Auch die weiter gegebenen Reihenentwickelungen der oben genannten Integrale, sowie die Darstellung von V in der Form

$$V = R\cos x + R_1 \sin x,$$

wo R und R_1 gewisse Potenzreihen bezeichnen, sind längst bekannt. Wn.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

E. Netto. Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.
Borchardt J. LXXXVI. 263-268.

Im LXXXIV. Bande von Borchardt's J. hat Herr G. Cantor (s. F. d. M. IX. 379) nachgewiesen, dass eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen und eine solche von m Dimensionen unter gegenseitiger Eindeutigkeit auf einander bezogen werden können. Der Nachweis, dass diese Beziehung nicht zugleich stetig sein kann, bildet den Inhalt der vorliegenden Arbeit. Dem gleichen Ziele strebten bereits die Herren Lüroth, Jürgens und Thomae auf dem Wege zu, dass sie die Stetigkeit der Beziehung zu Grunde legten und daraus die Existenz der Mehrdeutigkeit folgerten. Hier wird aus gleichzeitiger Annahme der Eindeutigkeit und Stetigkeit ein Widerspruch gegen die letztere gefolgert. Der Gedankengang des Beweises, der zuerst für ein, zwei und drei Dimensionen aus Raumanschauungen, dann nach Feststellung der Begriffe eines Gebildes r^{ter} Dimension, der Grenze eines Gebildes u. s. w., allgemein geführt wird, ist im Wesentlichen folgender: Zu Grunde gelegt wird das Princip: „In einer Mannigfaltigkeit r^{ten} Grades

wird jedes Gebilde r^{ten} Grades durch ein anderes von geringerem Grade begrenzt; in einer Mannigfaltigkeit $(r+1)^{ten}$ Grades fällt jedes Gebilde r^{ten} Grades mit seiner Grenze zusammen." Nimmt man nun in der Mannigfaltigkeit $(r+1)^{ten}$ Grades, welche eindeutig und stetig auf diejenige r^{ten} Grades bezogen sei, ein Gebilde 𝔄 r^{ten} Grades an, so bildet es sich in der Mannigfaltigkeit r^{ten} Grades als ein Gebilde 𝔄 r^{ten} Grades ab. Letzteres wird durch ein Gebilde geringeren Grades begrenzt. Von einem Punkte, der zu 𝔄 gehört, kann man zu einem nicht zu 𝔄 gehörigen Punkte auf stetigem Wege nur gelangen, wenn man die Grenze von 𝔄 überschreitet. Dieser entspricht ein gewisses Gebilde a in der Mannigfaltigkeit $(r+1)^{ten}$ Grades. Bei stetiger Abbildung könnte man also auch von einem zu 𝔄 gehörigen Punkte zu einem nicht zu 𝔄 gehörigen nur gelangen, wenn man das Gebilde a überschreitet, denn Entsprechendes findet für 𝔄 statt. Aber 𝔄 ist in allen Punkten seine eigene Grenze gegen den Rest der Mannigfaltigkeit $(r+1)^{ten}$ Grades. Also kann man von einem zu 𝔄 gehörigen Punkte zu einem nicht zu 𝔄 gehörigen gelangen, ohne das Gebilde a zu überschreiten. Mithin kann die Stetigkeit der Abbildung nicht stattfinden. B. K.

G. B. Halsted. Bibliography of hyperspace and non-euclidian geometry. Am. J. I. 262-276, 384-385.

Enthält in chronologischer Folge Titel und kurze Inhaltsangabe der wichtigeren Schriften, welche seit Gauss und Bolyai bis zum Jahre 1878 über allgemeine Raumtheorien erschienen sind. V.

S. Newcomb. Note on a class of transformations which surfaces may undergo in space of more than three dimensions. Am J. I. 1-4.

Herr Zöllner hat gelegentlich in seinen wissenschaftlichen Abhandlungen auf Bewegungsphänomene hingewiesen, welche

unter Zuhilfenahme einer vierten Dimension möglich sein würden. Der Verfasser giebt ein weiteres Beispiel zu diesen, indem er unter der genannten Voraussetzung an dem Fall einer unendlich dünnen Kugelschale mathematisch erläutert, wie eine geschlossene materielle Fläche durch reine Biegung so deformirt werden kann, dass die innere Seite mit der äusseren vertauscht wird. V.

W. Killing. Ueber zwei Raumformen mit constanter Krümmung. Borchardt J. LXXXVI. 72-83.

Herr S. Newcomb hatte (Borchardt J. LXXXIII. S. 293) auf synthetischem Wege die Existenz eines Raumes constanter positiver Krümmung nachgewiesen (vgl. F. d. M. IX. 381, VIII. 313) in welchem die Gerade ausnahmslos durch zwei Punkte bestimmt ist, die Ebene durch eine Gerade in ihr nicht zerlegt wird, u. s. w. Herr Killing zeigt nun, von den Beltrami'schen Ausdrücken für die Mannigfaltigkeit constanten (positiven) Krümmungsmasses ausgehend, dass in demselben zwei (und nur zwei) verschiedene Raumformen enthalten sind, je nachdem man festsetzt, dass Punkte mit verschiedenen Coordinaten unter gewissen Umständen als identisch angesehen werden sollen oder nicht, von denen die erste den Charakter der Geometrie auf der Kugel trägt, die zweite mit der von Herrn Newcomb untersuchten übereinstimmt, auf welche Herr Klein bereits früher (Clebsch Ann. VI. S. 125, s. F. d. M. V. p. 271) hingewiesen hatte. V.

G. Battaglini. Sull' affinità circolare non-euclidea. Battaglini G. XVI. 256-263.

Die Transformation durch reciproke Radien (Möbius'sche Kreisverwandtschaft) in der Ebene stellt sich bekanntlich im projectivischen Sinne als eine solche dar, bei der doppelte Berührung eines Kegelschnittes mit einem festen Kegelschnitte eine invariante Beziehung ist. Verfasser entwickelt analytisch diese Transformation, erläutert die geometrische Construction entsprechender Punkte und beweist schliesslich die Unveränderlichkeit des Doppel-

verhältnisses, d. h. die Gleichheit der Winkel, welche von entsprechenden Curven gebildet werden. V.

G. Frattini. Un caso particolare del teorema dei nove punti di Feuerbach, sua generalizzazione nella geometria non euclidea. Battaglini G. XVI. 298-305.

Schl.

A. Genocchi. Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes. Mem. di Torino (3) XXIX. 1877, Darboux Bull. (2) II. 207-209.

Aus dem dem Referenten vorliegenden Bericht in dem Darboux'schen Bulletin ist nur ersichtlich, dass der erste Theil der Arbeit sich im Anschluss an eine Abhandlung von Daviet de Foncenex mit der Zusammensetzung der Kräfte beschäftigt, während der 2. Theil einer Kritik der nicht-euklidischen Geometrie gewidmet ist. O.

V. Schlegel. Ueber die geometrische Darstellung des Imaginären vom Standpunkte der Ausdehnungslehre. Schlömilch Z. XXIII. 141-157.

Herr Schlegel ist von Seiten der Ausdehnungslehre zu einer Auffassung des Imaginären gelangt, welche ihm die Forderung des Zusammenhanges zwischen dem geometrisch Reellen und Imaginären besser zu erfüllen scheint, wie die bisherige. Imaginäre Punkte einer Geraden in der Ebene sind hiernach die symmetrisch zu derselben gelegenen Punkte. Diese Auffassung deckt sich mit der Gauss'-Möbius'schen Repräsentation; sie ist zugleich in den Elementen der Functionentheorie längst gebräuchlich. Dagegen muss Referent die Behandlung des Imaginären im Raume als verfehlt bezeichnen. Die dreifach unendlich vielen Punkte des Raumes können nicht mehr die ∞^4 imaginären Punkte der Ebene zur Darstellung bringen, und der eingeschlagene Gesichtspunkt muss hier nothwendig in Widerspruch mit der massgebenden analytischen Theorie gerathen. V.

P. Appell. Sur une représentation des points imaginaires en géométrie plane. Grunert Arch. LXI. 359-361.

Herr Appell stellt den imaginären Punkt der Ebene

$$x = \alpha + \beta i, \quad y = \gamma + \delta i$$

durch den Raumpunkt

$$X = \alpha, \quad Y = \beta, \quad Z = \sqrt{\beta^2 + \delta^2}$$

dar. Da keine Anwendung dieser Darstellung gegeben wird, so ist der Zweck derselben um so weniger ersichtlich, als dabei unendlich vielen imaginären Punkten der Ebene derselbe Punkt des Raumes entspricht. V.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

C. L. Landré. Over veelvlakkige lichamen. Nieuw Arch. IV. 194-199.

Kurze Betrachtung des Theorems von Euler über Vielflache, in welcher gezeigt wird, unter welchen Bedingungen dieses Gesetz giltig ist, und welchen Beziehungen die Vielflache unterworfen sind, für welche das Euler'sche Theorem nicht gilt.

G.

E. Hess. Vier archimedeische Polyeder höherer Art. Cassel. Th. Kay.

Der Verfasser setzt hier seine Untersuchungen über gleicheckige und über gleichflächige Polyeder von höherer Art-Zahl fort (cfr. die Referate in den früheren Bänden des Jahrbuches). Er leitet hier als Beispiele die beiden höheren Arten des Triakontaeders und die beiden diesen polar entsprechenden, gleicheckigen Polyeder ab. Ein Triakontaeder ist ein von 30 con-

gruenten Rhomben begrenztes Polyeder, dessen Flächen in gleichem Abstande senkrecht auf den Kantenaxen eines regulären Ikosaeders oder Pentagon - Dodekaeders stehen. Von seinen 32 Ecken sind 12 regulär fünfflächig, den Ecken eines Ikosaeders entsprechend, und 20 regulär dreiflächig, den Ecken eines Dodekaeders entsprechend. Um aus diesem Körper erster Art die Triakontaeder höherer Art abzuleiten, verfährt der Verfasser zuerst nach einer schon früher auseinandergesetzten Methode, indem er nämlich auf einer der Grenzflächen die Schnittlinien der sämmtlichen übrigen Grenzflächen construirt, wodurch er in der Ebene der Zeichnung die Grenzflächen der möglichen gleichflächigen Körper höherer Art erhält. Nach dieser Methode findet der Verfasser die genaue Beschreibung von noch 2 Triakontaedern, von denen das eine 3ter, das zweite 7ter Art ist. Am Schluss wird noch eine zweite Methode der Herleitung angedeutet. Man kann nämlich das dem Triakontaeder erster Art polar entsprechende gleicheckige (12+20)-flächige 30-Eck aus dem regulären Ikosaeder und Dodekaeder dadurch gewinnen, dass man das eine die Ecken des anderen abstumpfen lässt, bis die Kanten des abgestumpften Polyeders verschwinden. Ganz ebenso resultiren die beiden neuen Polyeder 3ter und 7ter Art, wenn die Ecken eines Poinsot'schen 12-flächigen Stern-12-Ecks 3ter Art resp. die Ecken eines Poinsot'schen 20-flächigen Stern-12-Ecks 7ter Art durch die Flächen eines regulären Dodekaeders bis zum Verschwinden der Kanten abgestumpft werden. Scht.

A. Badoureau. Sur les figures isocèles. C. R. LXXXVII. 823-825.

Die Note ist ein kurzgefasster Auszug aus einer grösseren, der Akademie vorgelegten Arbeit über convexe und sternartige, gleichflächige Polyeder. Die Arbeiten von Poinsot und Bertrand über dieses Gebiet werden erwähnt, die von Hess in Marburg nicht. Ausser einer Aufzählung der behandelten Körper findet man in der Note auch eine Besprechung der der Euler'schen Formel analogen Formeln, welche die Art-Zahl des Polyeders

enthalten. Unter Art eines Polyeders versteht man bekanntlich die Zahl der Kugel-Bedeckungen, welche man erhält, wenn man die sämmtlichen Flächen nach einander von einem innerhalb gelegenen Punkte aus auf eine umschliessende Kugel projicirt.

Scht.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

Fr. Polster. Geometrie der Ebene. Würzburg. Staudinger.

Der Verfasser führt in seiner kleinen Schrift die Geometrie bis zum Abschluss der Parallelentheorie, in der Absicht, durch Annahme des Bertrand'schen Winkelbegriffes und durch Umänderung des neunten euklidischen Axioms das elfte Axiom entbehrlich oder beweisbar zu machen. Die Theorie des Verfassers beansprucht, in sich ohne jeden Widerspruch und ohne jede Lücke zu sein. Die Gerade wird definirt als eine Linie, welche zwischen jeden beliebigen 2 in ihr liegenden Punkten eine einzige mögliche Lage hat. Der Winkel ist jeder von beiden Ausschnitten, in welche eine Ebene durch zwei von demselben Punkte auslaufende Strahlen getheilt wird. Parallele Gerade sind solche, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, ohne einander zu schneiden. An Stelle des achten und neunten Axioms Euklid's treten folgende Grundsätze: 1) Was in irgend einer möglichen Lage mit Anderem sich deckt, ist einander gleich. 2) Was in keiner möglichen Lage mit Anderem sich deckt, was jedoch als Ganzes in irgend einer möglichen Lage das Andere als Theil enthält, ist grösser als sein Theil. Ausführlich, scharf und wohlgeordnet ist die Longimetrie behandelt, ebenso die Beziehungen der Geraden und der Ebene; den wichtigsten Theil bildet die Theorie der Convergenz und des Parallelismus. Der Verfasser stellt 10 Criterien der Convergenz (von denen das fünfte dem

elften Axiom Euklid's entspricht) und 4 Criterien des Parallelismus auf. Die Parallelentheorie wird übrigens noch auf zwei andere, in der Ordnung sich unterscheidende, im Princip unter sich und mit der ersten Darstellung übereinstimmende Arten behandelt. — Dem Versuche des Verfassers kann die Anerkennung nicht versagt werden, dass seine Deductionen in sich geschlossen, vollständig und möglichst einfach sind. Aber auch er muss zugeben, dass ohne Annahme eines besonderen Axioms in der Parallelentheorie nicht auszukommen ist. Deswegen eben formt er das neunte Axiom Euklid's um. Beseitigt wird also durch seine Theorie die Schwierigkeit nicht. Ein unbeweisbarer Rest bleibt auch hier. Nur in der Beschränkung also, dass die Schwierigkeit in einen Punkt zusammengedrängt, und die Darstellung vereinfacht wird, können wir dem Verfasser beistimmen, mit dem über das Einzelne (z. B. gerade Linie, Winkel) zu rechten, hier nicht der Ort ist. Mi.

Dietrich. Anfangsgründe der Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der parallelen geraden Linien. Pr. Greiffenberg i. P.

Der Verfasser will seine Ansichten über die Fundamente der Geometrie darlegen. Seine Auseinandersetzung zerfällt in eine Einleitung und vier Paragraphen: von den ebenen Figuren, der Congruenz, den ebenen Winkeln und den parallelen Geraden.

Der Begriff des Raumes entsteht ihm durch Beobachtung bewegter Gegenstände. Aus dem mit Materie erfüllten Raum abstrahirt man den mathematischen Raum. Aus dem Raumbegriff wird der des Körpers, aus diesem der der Fläche, aus diesem der der Linie und aus diesem endlich der des Punktes abgeleitet. Eine gerade Linie ist der Weg eines Lichtstrahles in demselben Mittel; da der Lichtstrahl aus dem Unendlichen kommend und in's Unendliche gehend vorgestellt werden kann, so ist auch die gerade Linie unendlich. Eine Linie, bei welcher kein Theil gerade ist, heisst krumm. Eine Ebene ist eine Fläche von der Beschaffenheit, dass jede gerade Linie, welche durch 2 Punkte

derselben geht, ganz in dieselbe hineinfällt. Theilt man eine Ebene durch eine gerade Linie, so nennt man jeden der beiden Theile einen Flächenstrahl. Ein Winkel ist ein Theil der unendlichen Ebene, welcher durch 2 von einem Punkte ausgehende Strahlen eingeschlossen wird. Das Mass eines Winkels ist die unendliche Ebene selbst, oder ein bestimmter Theil derselben. Ein rechter Winkel z. B. ist der vierte Theil der unendlichen Ebene. Ein Flächenwinkel ist ein Theil des unendlichen Raumes, welcher durch 2 von einer Geraden ausgehende Flächenstrahlen eingeschlossen wird. Es giebt vier Raumbegriffe: Raum, Fläche, Linie und Punkt, und fünf Raumgrössen: Körper, Figuren, Seiten ebene Winkel und Flächenwinkel.

Die Entwickelung der Planimetrie geht aus von der Bestimmung des *N*-Ecks, *N*-Seits und des Kreises. Congruent heissen zwei Figuren, wenn alle gleichliegenden Stücke beider Figuren der Reihe nach gleich sind und nach derselben Richtung liegen. Die Sätze von der Congruenz der Polygone beruhen auf den zwei Sätzen, dass gleiche gerade Seiten und dass gleiche gerade Winkel congruent sind. Aus der Congruenz der Polygone wird die der Dreiecke und der Kreise resp. Kreistheile gefolgert. Die Lehre von den ebenen Winkeln, die sich an die Congruenzsätze anschliesst, umfasst die Sätze von den Winkelpaaren mit Ausschluss des Begriffs der parallelen Linien, die Sätze von der Summe der Aussen- und Innenwinkel des Polygons und die hieraus gezogenen Folgerungen für das Dreieck und die Winkel am Kreise. Die Theorie der parallelen Geraden wird eingeleitet mit dem Satz: Wenn 2 gerade Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so sind beide überall gleich weit entfernt. Hieran schliesst sich die Definition: zwei gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und überall gleich weit von einander entfernt sind, heissen parallel. Das Ganze beschliesst eine Herleitung der bekannten Sätze von den Gegenwinkeln etc. — So weit der Verfasser. — Ob Viele, dem Wunsche desselben, seine Ansichten günstig aufzunehmen, entsprechen werden, erscheint dem Referenten zweifelhaft. Ihm scheinen dieselben zum mindesten wenig in sich zusammenhängend. Von vornherein ist ein unbestimmter und fehlerhafter Be-

griff der Unendlichkeit zu Grunde gelegt. Hierauf gründet sich dann der Begriff des Winkels; der Satz von der Summe der Aussenwinkel eines Polygons wird durch die Behauptung erwiesen: „das Endliche kann das Unendliche weder vermehren noch vermindern". Wie sein Winkelbegriff mit dem Winkel einer allseitig begrenzten Figur in Zusammenhang gebracht werden soll, sagt der Verfasser nicht. Der Begriff der Diagonale ist gegen die Definition auch auf das vollständige N-Seit angewandt. Der Begriff Richtung begegnet uns in der Definition der Congruenz, ohne vorher abgeleitet zu sein. Ob die Definition, die der Verfasser von der geraden Linie giebt, von Jemand für mathematisch gehalten wird, weiss ich nicht. Dass der Verfasser die Sätze von den Parallelen wirklich bewiesen hat, scheint mir zweifelhaft. Mi.

W. Fiedler. Sulla riforma dell' insegnamento geometrico. Battaglini G. XVI. 243-256.

Dieser Artikel ist nur eine Uebersetzung einer Abhandlung Fiedler's (Wolf Z. XXII. 82—97; s. F. d. M. IX. 396—397). Angehängt sind der Uebersetzung von Torelli drei Briefe Fiedler's an den Uebersetzer, in denen Fiedler ausspricht, dass er eine Amalgamirung der euclidischen Geometrie mit der descriptiven für unthunlich hält. Er fordert für den Unterricht erst einen Cursus nach Euclid, dann einen in der descriptiven Geometrie. Zugleich macht er auf seine Behandlung der Lehre von der Symmetrie aufmerksam. Mi.

R. Hoppe. Rein geometrische Proportionslehre. Grunert Arch. LXII. 153-164.

Der Verfasser geht von der Ansicht aus, dass die Gründung der Lehre von den Linienproportionen auf Messung und die Hineinziehung der Irrationalzahl in dieselbe weder nothwendig noch vortheilhaft sei, dass somit eine rein geometrische Ableitung der Proportionslehre ein methodischer Fortschritt sein würde.

Er sucht diese Verbesserung der Methode auf zwei Wegen zu erreichen. Zuerst leitet er die Aehnlichkeitslehre von der Gleichheit der Winkel und von dieser die Lehre von den Linienproportionen ab. Fundamentalsatz ist hierbei: Sind in einem ebenen Viereck die 4 Winkel, welche eine Seite mit den 2 anstossenden Seiten und den Diagonalen bildet, gleich den entsprechenden 4 Winkeln in einem andern Viereck, so sind auch die entsprechenden 4 Paar Winkel in beiden gleich, welche die Gegenseite mit denselben 4 Geraden bildet. Dieser Satz ist nur mit Hilfe einiger stereometischer Voraussetzungen beweisbar. Als Definition der Aehnlichkeit ergiebt sich: Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn alle von Seiten und Diagonalen an den Ecken gebildeten Winkel im einen Vieleck den in gleicher Ordnung entsprechenden im andern gleich sind. Die Definition der Proportionalität folgt dann aus dem zweiten Satz von der Aehnlichkeit der Dreiecke (Satz 6 p. 157): Aus 2 Paar entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke lassen sich ähnliche Dreiecke mit beliebigen Winkeln zwischen ihnen bilden. Zwei Paar Strecken, die diese Eigenschaft haben, heissen proportionirt. Hieraus ergeben sich schliesslich rein geometrisch die Lehrsätze von den Proportionen und der Begriff des Verhältnisses, sowie weitere Beziehungen der Aehnlichkeit.

Der zweite Weg, den der Verfasser einschlägt, beginnt mit der Definition der Proportionalität: Vier Strecken in bestimmter Reihenfolge bilden eine Proportion, wenn das Rechteck aus der ersten und vierten gleich dem Rechteck aus der zweiten und dritten ist. Hier ergeben sich die bekannten Sätze von den Proportionen sehr einfach, aber der Satz: Die Strecken, welche zwei Parallelen auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels begrenzen, stehen in gleichem Verhältniss, muss wiederum auf den Fundamentalsatz der ersten Methode, mithin auf stereometrische Voraussetzungen zurückgeführt werden. Mi.

HÜTTIG. Planimetrische Fundamental-Constructionen, ausgeführt mit dem Lineal. Pr. Zeitz.

Der mathematische Unterricht in den oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen leidet vielfach an einer Ueberfülle algebraischer Rechnungen, und der Sinn für räumliche Anschauung wird zu wenig geweckt. Die neuere Geometrie bietet gegen diese Einseitigkeit ein gutes Gegengewicht vermöge der Eigenthümlichkeit ihrer Methode, sie geht auf Massverhältnisse nur in so weit ein, als dieselben sich aus der gegenseitigen Lage der Gebilde selbst ergeben. Der Unterricht soll auch diese Seite berücksichtigen und auf die Behandlungsweise der geometrischen Constructionsaufgaben im Sinne der Geometrie der Lage aufmerksam machen. Von diesen in der Einleitung ausgesprochenen Gesichtspunkten ist die Schrift abgefasst. Sie enthält in 12 Abschnitten reichhaltigen Uebungsstoff, nämlich die Construction der harmonischen Punkte und Strahlen mit Anwendungen auf das Parallelogramm, die Construction der Pole und Polaren; Aufgaben über die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise und die Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise, endlich Aufgaben über das vollständige Sehnen- und Tangentenvierseit. Alle Constructionen sind nur mit dem Lineal ausgeführt und die nöthigen Erläuterungen vorausgeschickt. Schl.

LIBRARY 16 OCT 30

W. W. Johnson and C. Ladd. Solution of a problem. Analyst V. 29-31.

Beweis des bekannten Satzes: A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 seien drei Paare von Punkten in einer Ebene, dergestalt, dass die drei Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sich in einem gemeinsamen Punkte O schneiden; ferner mögen sich B_1C_1 und B_2C_2 in a schneiden, dann liegen a, b, c in einer geraden Linie, wobei b und c die analoge Bedeutung von a haben. Glr. (O.)

H. Eggers. A problem and its solution. Analyst V. 181-183.

Die Aufgabe heisst: L_1, L_2, L_3 seien drei gegebene gerade Linien und A_1, A_2, A_3 drei gegebene Punkte in ihnen. Man

soll eine gerade Linie ziehen, die L_1, L_2, L_3 in drei Punkten B_1, B_2, B_3 so schneidet, dass $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$.

Glr. (O.)

A. Sýkora. Neue Ableitung der Pythagoräischen Lehrsätze. Grunert Arch. LXI. 447-448.

Einige Folgerungen aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, die durch das auf die Hypotenuse gefällte Loth entstehen. O.

E. W. Hyde. Proposition in transversals. Analyst V. 113-115.

Eine Transversale OY sei in dem Dreieck ABC so gezogen, dass sie die Seiten in P_1, P_2, P_3 schneidet. Von einem Punkte O auf der Transversale trage man die Entfernungen OP', OP'', OP''' (entweder alle auf derselben Seite von O wie resp. P_1, P_2, P_3 oder entgegengesetzt) ab, so dass

$$OP_1 . OP' = OP_2 . OP'' = OP_3 . OP''' = \text{const.}$$

Dann schneiden sich $P'A$, $P''B$, $P'''C$ in einem Punkte. Dieser Satz wird bewiesen und auf den speciellen Fall angewandt, wo ABC ein einem Kegelschnitt eingeschriebenes Dreieck ist.

Glr. (O.)

H. Franke. Sätze aus der neueren Geometrie. Pr. Altenburg

Die Arbeit enthält in sechs Abschnitten die bekannten Sätze über die Dreieckstransversalen, die harmonischen Verhältnisse, Pole und Polaren, Chordalen und dergleichen mehr. Schl.

M. Baker. A collection of proofs of the relation

$$r' + r'' + r''' - r = 4R.$$

Analyst V. 82-86.

r', r'', r''' sind die Radien der angeschriebenen, r und R die des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises. Der Verfasser stellt 11 von ihm gesammelte Beweise zusammen.

Glr. (O.)

W. Fuhrmann. Ueber den Neunpunktekreis des Dreiecks. Grunert Arch. LXII. 218-220.

Ein lediglich auf den harmonischen Eigenschaften des Kreises beruhender Beweis, dass der Neunpunktekreis den Inkreis des Dreiecks berührt. Der Berührungspunkt wird auf folgende Weise konstruirt: Die Mittelpunkte der Seiten *BC, CA* und *AB* sind mit *a*, *b*, *c*, die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten mit *a'*, *b'*, *c'* bezeichnet. *M* ist der Schnittpunkt von *ab* und *a'b'* und *D* der Schnittpunkt von *BM* und *AC*. Die von *D* an den Inkreis gezogene Tangente berührt denselben im Punkte *d*, welcher zugleich der Berührungspunkt mit dem Neunpunktekreise ist.

Schl.

P. Mennesson. Sur le cercle des neuf points. N. C. M. IV. 241-242.

Es sei *ABC* ein Dreieck, *M*, *M'*, *M''* die Mitten der Seiten, *S* der Schnittpunkt der Höhen, *N*, *N'*, *N''* die Mitten von *SA*, *SB*, *SC* und *O* der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Die Eigenschaften des Neunpunktekreises können ohne Schwierigkeit gefunden werden, indem man *NM''N'SM'OMN''* als Projection eines Parallelepipedons, das in *S* mit der Pyramide *SABC* eine körperliche Ecke gemeinsam hat, auf die Ebene *ABC* betrachtet und dann die diesem Parallepipedon umschriebene Kugel berücksichtigt.

Mn. (O.)

R. F. Davis. Geometrical investigation of the distance between the centres of the inscribed and nine-point cercles of any triangle. Educ. Times XXX. 99.

Elementare geometrische Sätze über diese Entfernungen.

O.

F. Reidt. Ein weiterer Beitrag zu den Kleinigkeiten aus der Schulstube. Hoffmann Z. IX. 267-274.

Enthält Lehrsätze und Aufgaben über Höhenabschnitte, Abstände der Mittelpunkte der Berührungskreise des Dreiecks.

O.

Townsend, R. Tucker, E. Rutter. Solutions of a question (5479). Educ. Times XXIX. 50-52.

Wenn man über einem Paar gegenüberliegender Seiten eines Quadrates Kreise zeichnet, so schneiden sich die Polaren der Punkte der einen Diagonale in Bezug auf die beiden Kreise auf der anderen Diagonale, und die 4 Tangenten von dem Punkte sind harmonische Strahlen. O.

L. W. Meech and D. J. McAdam. Demonstration of a proposition. Analyst V. 8, 87-88.

ABCD sei ein in einen Halbkreis beschriebenes Viereck, *AB* der Durchmesser. Es wird bewiesen, dass *AB*, *BC*, *CD*, *DA* proportional sein müssen den reciproken Werthen von r, α, β, γ, wo r der Radius des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises, α, β, γ die Entfernungen seines Mittelpunktes von den Eckpunkten desselben sind. Glr. (O.)

G. Eastwood. A question and its solution. Analyst V. 50-51.

Gegeben sind die 4 Seiten eines Vierecks; man bestimme, ob es in einen Kreis einbeschrieben werden kann. Glr. (O.)

K. Milinowski. Ueber einen geometrischen Satz. Schlömilch Z. XXIII. 139-140.

Wenn r und ϱ die Radien der um resp. in ein Viereck gezeichneten Kreise und d ihre Centrale ist, so gilt die Gleichung

$$\varrho^4 = (r+\varrho+d)(r+\varrho-d)(r-\varrho+d)(r-\varrho-d)$$

oder

$$2\varrho^2(r^2+d^2) = (r^2-d^2)^2.$$

M.

L. F. M. TERREIRA. Sobra un problema di geometria. Jorn. sc. math. e astr. I. 102-104, 133-137.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über das Dreieck und Viereck von CH. LADD, D. EDWARDES, J. O'REGAN, A. W. CAVE, R. F. DAVIS, W. J. C. SHARPE, EVANS, R. RAWSON, D. J. MCADAM, W. F. S. LONG, W. J. C. MILLER, COCHEZ, H. MURPHY, E. RUTTER, J. F. WILSON, E. W. SYMONS, A. BUCHHEIM, A. ESCOTT, G. G. STORR, TOWNSEND, S. CONSTABLE, F. D. THOMSON, S. RUGGERO, JOHNSON, S. A. RENSHAW, T. MORLEY finden sich Educ. Times XXIX. 34, 40, 53, 80, 109; XXX. 26, 32, 52, 62, 64, 72, 76, 77, 91.

O.

W. H. PREUSS. Ueber einen das Sehnenfünfeck betreffenden Satz. Schlömilch Z. XXIII. 194-195.

Wählt man auf zweien, sich in einem Punkte B schneidenden Geraden die beliebigen Strecken BA und BC, und errichtet auf den Mitten m_0 und m_1 dieser Strecken die beiden Lothe DE und DF, von denen ersteres die Gerade BC in E und letzteres die Gerade AB in F schneidet, so liegen die 5 Punkte D, A, E, F, C auf einem Kreise.

M.

R. HOPPE. Bestimmung der Vielecke durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen. Grunert Arch. LXI. 439-444.

Sind in einem n-Eck alle Diagonalen gezogen, so gehen von jedem Eckpunkte $(n-1)$ Gerade aus, welche $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Winkel mit einander bilden. Es entstehen also an den n Ecken zusammen $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ Winkel, von denen $2(n-2)$ Winkel unabhängig sind und zur Bestimmung der übrigen ausreichen. Dazu sind $\frac{1}{2}(n-2)(n^2-n-4)$ Relationen erforderlich, von welchen

$\frac{1}{2}(n-2)(n^2-2n-1)$ Relationen linear, die übrigen $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ aber nicht linear sind. Unter den linearen giebt es $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Relationen zwischen den Winkeln eines Dreiecks; die übrigen $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)$ beziehen sich auf Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitelpunkte. Von den 12 Winkeln eines Vierecks sind 4 unabhängig; und nur eine von den 8 erforderlichen Relationen ist nicht linear. Es empfiehlt sich die 4 an einer Diagonale des Vierecks liegenden Winkel (α), (β), (γ), (δ) als unabhängige auszuwählen und den Winkel (k) zwischen den beiden Diagonalen als Hilfswinkel einzuführen. Werden die Cotangenten dieser Winkel mit denselben Buchstaben aber ohne Klammern bezeichnet, so ist $k=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ die einzige transcendente Vierecksrelation. Die übrigen Viereckswinkel sind linear aus den vier gegebenen und dem Hilfswinkel zu berechnen. Im Vieleck bilden zwei benachbarte Eckpunkte A und B mit je zwei der übrigen ein Viereck, so dass $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Vierecke über der Seite AB entstehen. Für dieselben ist die Auswahl der unabhängigen und Hilfswinkel zu modificiren, wie im letzten Theile der Abhandlung auseinandergesetzt wird. Schl.

P. Meutzner. Sätze über reguläre Polygone. Clebsch Ann. XIII. 566-571.

Beschreibt man zwei concentrische Kreise mit den Radien R und r, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen der Perpendikel, welche man von den Eckpunkten oder Berührungspunkten eines dem ersten Kreise ein- bez. umgeschriebenen regulären Polygons von m Seiten auf eine der Tangenten des zweiten Kreises fällen kann, eine constante Grösse. Dieser Satz ist eine Folgerung aus einem allgemeineren in dieser Abhandlung bewiesenen Satze.

Schl.

G. Dostor. Nombres relatifs des polygones réguliers de n et de $2n$ côtés, suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair. Grunert Arch. LXII. 148-153.

G. DOSTOR. Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit le double de la surface de l'autre. Grunert Arch. LXI. 407-410.

Die Fläche eines regulären $2n$-Ecks von der Gattung $n-2$ (n ungrade) ist doppelt so gross als die Fläche des regulären n-Ecks von der Gattung $\frac{n-1}{2}$, welches mit dem $2n$-Eck demselben Kreise eingeschrieben ist. Schl.

G. DOSTOR. Inscription dans le cercle des quatre polygones réguliers de trente côtés. Nouv. Ann. (2) XVIII. 370-374.

G. DOSTOR. Inscription dans le cercle des polygones réguliers de 15, 30, 60, 120, etc. côtés. Calcul des côtés. Grunert Arch. LXV. 103-111.

Die regulären Fünfzehnecke sind in vier verschiedenen Gattungen vorhanden, deren Gattungszahlen 1, 2, 4 oder 7 sind. Die regulären Dreissigecke sind von der Gattung 1, 7, 11 oder 13; u. s. f. Die Formeln für die Seiten dieser Polygone sind angegeben. Aus der Vergleichung der Formeln ergeben sich mannigfache Beziehungen. Ueber die Gattungen der regulären Vielecke siehe die in Grunert Arch. 59, 375—387 (s F. d. M. VIII. 331) enthaltene Arbeit desselben Verfassers: Les polygones rayonnés et les polygones étoilés. Schl.

WEILL. Sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux cercles. Liouville J. (3) IV. 265-305.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Theile. In dem ersten Theile ist die Aufgabe, die Relation zwischen den Radien R, r der beiden Kreise und der Distanz δ ihrer Mittelpunkte zu finden, welche stattfinden muss, damit ein Polygon von n Seiten $ABC\ldots$ dem einen Kreise eingeschrieben und zugleich dem andern umschrieben werden könne, vollständig und mit einfachen Hilfs-

mitteln gelöst. Dazu entwickelt der Verfasser einige Sätze über dasjenige Polygon, welches durch die auf dem innern Kreise liegenden Berührungspunkte $\alpha\beta\gamma\ldots$ gebildet wird. Ich führe die beiden wichtigsten an: Das Centrum der mittleren Entfernungen von m aufeinander folgenden Eckpunkten des Vielecks $\alpha\beta\gamma\ldots$ $(m<n)$ beschreibt einen festen Kreis, wenn das Polygon $ABC\ldots$ auf den beiden Kreisen sich fortbewegt. Wenn das Polygon $\alpha\beta\gamma\ldots$ sich schliesst, so bleibt es auch während des Weiterrückens der Figur stets geschlossen und das Centrum der mittleren Entfernungen aller n Eckpunkte bleibt fest. Wird zur Abkürzung $\alpha=\frac{\delta}{R}$ und $z=\frac{2Rr}{R^2-\delta^2}$ gesetzt, so haben die erwähnten Relationen für das 3-, 4-, 5- und 6-Eck folgende Form: $z=1$; $z^2(1+\alpha^2)=2$; $\alpha^2z^3+z^2-z+1=0$; $\alpha^2z^4+z^2(1+\alpha^2)=3$. In dem zweiten Theile der Arbeit werden noch manche besonderen Eigenschaften der Polygone, welche zwei Kreisen zugleich ein- und umgeschrieben sind, bewiesen; darunter befindet sich auch der bekannte Satz für ein Polygon mit $2n$ Seiten: Die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten liegen auf einer und derselben Geraden, welche während des Fortrückens der Figur unverändert bleibt, und die Hauptdiagonalen schneiden sich in einem und demselben festen Punkte. Schl.

G. Darboux. Sur un problème de géométrie élémentaire. Darboux Bull. (2) II. 298-304.

Aus einem ebenen oder windschiefen Polygon von n Seiten bilde man ein zweites, indem man die Mittelpunkte der Seiten der Reihe nach verbindet; aus diesem Polygon durch dieselbe Construction ein drittes und so fort. Die Polygone in dieser unbeschränkten Reihe werden immer kleiner und dabei immer mehr ebenen halbregulären Vielecken ähnlich, welche in Ellipsen eingeschrieben sind, während die Eckpunkte sämmtlich einem und demselben Punkte sich nähern, welcher das Centrum der mittleren Entfernungen der Eckpunkte des ursprünglichen Polygons ist. Schl.

J. PETERSEN. Et Par geometriske Sätniger. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 178-180.

Einige zum Theil bekannte Sätze und Constructionen über Kreise und zugehörige Gerade. Gm.

L. MACK. Ueber den in der Definition der Potenzlinie enthaltenen Kreis. Grunert Arch. LXII. 405-422

Die Aufgabe: „Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, dessen Potenzen mit Bezug auf zwei gegebene Kreise einander gleich sind," führt, wenn man die betreffenden Potenzwerthe nicht sowohl als absolut gleich, wie auch als algebraisch gleichartig betrachtet, auf eine gerade Linie. Zieht man aber auch nicht gleichartige Werthe in Betracht, so gelangt man zu einem kreisförmigen Ort, den der Verfasser als Chordalkreis bezeichnet. Ueber diesen wird eine Anzahl von Sätzen bewiesen und seine Anwendbarkeit an der Aufgabe erläutert: Gegeben 4 Punkte AB, $\alpha\beta$ beliebig auf einer Geraden. Man soll auf derselben *alle* die Punkte X ermitteln, für welche das Rechteck aus XA und XB gleich dem Rechteck aus $X\alpha$ und $X\beta$ ist. O.

H. M. TAYLOR. On the porism of the ring of circles touching two circles. Messenger (2) VII. 148-150.

Soll in einem Ring von Kreisen jeder die benachbarten auf beiden Seiten und gleichzeitig immer zwei ursprüngliche Kreise berühren, so heisst die Bedingung dafür:

$$mc^2 = (a-mb)(am-b),$$

wo a und b die Radien der ursprünglichen Kreise sind und c ihre Centrale ist, und

$$m = \frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}},$$

wo n eine rationale, aber nicht nothwendig auch eine ganze Zahl ist. Bruchwerthe von n müssen auf ihre kleinste Form ge-

bracht werden. Der Zähler bezeichnet dann die Anzahl von Kreisen, die den Ring bilden, der Nenner die Zahl von vollständigen Cykeln, die diese Kreise in Beziehung auf die ursprünglichen Kreise bilden. Der Satz wird durch Inversion bewiesen. Glr. (O)

W. W. Taylor. On the ring of circles touching two circles, and kindred porisms. Messenger (2) VII. 167-170.

Die Note bezieht sich auf die obige Arbeit des Herrn H. M. Taylor und enthält eine Ausdehnung auf den Fall, in dem einer der ursprünglichen Kreise nicht in den andern eingeschlossen ist. Es finden sich einige Diagramme zur Erläuterung der verschiedenen Formen. Herr W. W. Taylor dehnt das Resultat auch auf den Fall aus, wo ein körperlicher Ring einen Ring von n Kugeln so enthält, dass jede Kugel den körperlichen Ring längs eines Kreises und die folgenden Kugeln auf beiden Seiten berührt. Durch Inversion erhält er folgenden Satz: „Wenn in einer binodalen Cyclide ein Ring von n Kugeln so beschrieben werden kann, dass jede die zwei anliegenden und auch die Cyclide längs eines Kreises berührt, dann kann eine beliebige Zahl von solchen Ringen von Kugeln beschrieben werden, abbrechend mit irgend einer Kugel, die die Cyclide so (entweder innerlich oder äusserlich) berührt. Die Zahl der Kugeln in jedem Ring eines solchen Systems (innerlich oder äusserlich, je nachdem der erste Ring innerlich oder äusserlich war) ist n und die Zahl der Kugeln in jedem Ring des andern Systems p, wo

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p} = \tfrac{1}{2}.“$$

Glr. (O.)

J. H. Jurrell. To draw a circle tangent to three given circles. Analyst V. 166-168.

Die Auflösung beruht auf folgenden Sätzen: 1) Ein zu 2 berührenden Kreisen orthogonaler Kreis geht durch ihren Be-

rührungspunkt. 2) Alle 2 gegebene Kreise aussen berührende Kreise werden orthogonal von einem Hülfskreis geschnitten, dessen Mittelpunkt der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist. 3) Die Aehnlichkeitsaxe dreier gegebener Kreise und die (Radical-) Axe eines Paars von Kreisen, die sie berühren, fallen zusammen. Glr. (O.)

J. H. JURRELL. Solution of a problem (187). Analyst V. 56-57.

Beweis, dass, wenn 6 Kreise gezeichnet werden, von denen jeder 4 der übrigen berührt, sich die Verbindungslinien der Mittelpunkte der nicht berührenden Kreise in einem Punkte schneiden. Glr. (O.)

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über den Kreis von H. POLLEXTEN, C. BICKERDIKE, C. VINCENZO, S. RUGGERO, J. S. JENKINS, J. O. JELLY, V. JACOBINI, W. S. F. LONG, W. S. MCCUY. MINCHIN, J. J. WALKER finden sich Educ. Times XXIX. 24, 25, 26, 73, 101; XXX. 94.

O.

L. G. BARBOUR. Quinquisection of the circumference of a circle. Analyst V. 180-181.

Geometrischer Beweis des Satzes: C sei der Mittelpunkt eines Kreises und AD ein Durchmesser. Man theile AC so in B, dass $AB.AC = BC^2$ und beschreibe mit dem Radius BD um D als Mittelpunkt einen Kreis, der den ursprünglichen Kreis in F schneidet. Dann ist AF ein Fünftel der Peripherie.

Glr. (O.)

C. H. KUMMELL. Approximate multisection of an angle and hints for reducing the unevitable error to the smallest amount. Analyst V. 172-176.

Um den Winkel BCD angenähert in n Theile zu theilen, ziehe man ACA' senkrecht zu BC und beschreibe mit einem beliebigen Radius CA den Halbkreis $ADBA'$. In der Verlängerung von BC nehme man Punkt E so an, dass $AE = AA' = A'E$, ziehe ED, das AA' in F schneidet, theile CF in n gleiche Theile, dann theilen die Verbindungslinien von E mit den Theilpunkten den Winkel BCD in n gleiche Theile. Der Verfasser betrachtet auch den speciellen Fall der Dreitheilung und untersucht, welcher der drei Theile der richtigste sei. Glr. (O.)

F. J. van den Berg. Over de benaderde rectificatie van een cirkelboog. Nieuw Arch. IV. 200-204.

Der Verfasser fängt an mit der Mittheilung zweier Constructionen für die annähernde Rectification eines Kreisbogens; die erstere ist Cremona's „Elementen des graphischen Calculs" entlehnt, die andere aus Rankine's „Machinery and Millwork". Der Verfasser bemerkt, dass in Rankine's Berechnung ein Fehler begangen ist, welchen er verbessert.

Weiter giebt er ein Paar andere Annäherungsformeln und Constructionen, welche mit den genannten grosse Aehnlichkeit zeigen. G.

C. W. Bourne. On the value of π. Educ. Times XXX. 103-104.

Verification des Werthes $3\frac{1}{7}$. O.

A. Cayley. On Mr. Cotterill's goniometrical problem. Quart. J. XV. 196-198.

Herr Cayley macht auf die inhaltreiche Abhandlung des Herrn Cotterill: „A goniometrical problem, to be solved analytically in one move, or more simply synthetically in two moves", Quart. J. VII. (1866), p. 259—272, aufmerksam. Die dort gegebenen Relationen zwischen den 9 Winkeln

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ d, & e, & f, \\ x, & y, & z, \end{matrix}$$

deren 3 in einer Vertical- oder Horizontalreihe zusammen ein ungrades Vielfaches von π geben, und deren sinus und cosinus enthalten zahlreiche interessante Formeln. M.

J. W. L. Glaisher. Euler's formula in trigonometry. Messenger (2) VII. 191-192.

Geometrischer Beweis, dass:

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \cos\tfrac{1}{2}\theta.\cos\tfrac{1}{4}\theta.\cos\tfrac{1}{8}\theta\ldots.$$

Glr. (O.)

K. Zahradnik. Beitrag zur Trigonometrie. Grunert Arch. LXII. 330-332; Casopis VII. 245-248 (Böhmisch).

Aus dem Gleichungssystem

$$b\cos\gamma + c\cos\beta = a$$
$$c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$$
$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c$$

entstehen durch Elimination der Seiten, oder einer Seite und des Gegenwinkels, oder zweier Winkel, u. s. w. die bekannten Sätze der ebenen Trigonometrie. Schl.

E. Czuber. Berechnung der dritten Seite eines Dreiecks aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel. Grunert Arch. LXII. 222-224.

Transformation des Cosinussatzes für die logarithmische Berechnung; geometrische Bedeutung der eingeführten Hilfswinkel. Schl.

N. Baker. Solution of a problem. Analyst V. 24-26.

Man verbinde die Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise eines Dreiecks. Bei diesem neu gebildeten Dreieck verbinde man wiederum die Mittelpunkte der angeschriebenen Dreiecke u. s. f. Verlangt wird ein Ausdruck für den Flächeninhalt des n^{ten} so gebildeten Dreiecks. Die Winkel dieses n^{ten} Dreiecks ergeben sich als gleich

$$(\tfrac{1}{2})^n\{a_n\pi+(-1)^nA\},\quad (\tfrac{1}{2})^n\{a_n\pi+(-1)^nB\},\quad (\tfrac{1}{2})^n\{a_n\pi+(-1)^nC\},$$

wo

$$a_{n+1}=2a_n+(-1)^n;$$

für den Flächeninhalt des Dreiecks ferner ergiebt sich:

$$2^{2n-1}R^2\{\cos(\tfrac{1}{2})^{n-1}(a_{n-2}\pi\pm A) + \cos(\tfrac{1}{2})^{n-1}a_{n-2}\pi\pm B+\cos(\tfrac{1}{2})^{n-1}(a_{n-2}\pi\pm C)\},$$

wo R der Radius des umschriebenen Kreises des ursprünglichen Dreiecks ist. Eine Tafel der Werthe von a_n bis zu $n=50$ ist beigefügt. Glr. (O.)

W. W. JOHNSON and E. B. SEITZ. Note on the above. Analyst V. 54-55.

Es wird bemerkt, dass $a_n=\frac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}$ ist. Die Werthe in der Tafel von Baker nach a_{18} sind daher ungenau.

Glr. (O.)

KOBERT. Die Harmonikalien. Pr. Pyritz.

Die Arbeit soll den fähigeren Schülern der Prima zur Anleitung und Uebung in der Anwendung von trigonometrischen und algebraischen Rechnungen auf die Geometrie dienen. Sie behandelt die harmonischen Punkte und Geraden, die Punktepaare und Linienpaare in Involution, die harmonischen Verhältnisse am Kreise, die Kreisschaaren, welche sich rechtwinklig durchschneiden, die Aehnlichkeitspunkte, den Orthogonalkreis von drei Kreisen und dergl. mehr. Die Resultate sind durch kurze und geschickt angelegte Rechnungen hergeleitet.

Schl.

L. Clariana y Ricart. Armonias notables entre il algebra y la trigonometria. Cron. cient. I. 265-270.

W. Gallenkamp. Sammlung trigonometrischer Aufgaben. 2te verbesserte Auflage. Berlin. Plahn.

Neue Auflage der bekannten Sammlung. O.

G. Guidotti. Trattato di trigonometria sferica. Milano. Paravia.

R. Tucker, Cochez. Solutions of a question (5406). Educ. Times XXX. 26.

Sind O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte der dem sphärischen Dreieck ABC angeschriebenen Kreise, so ist

$$\frac{\cos O_2 O_1 O_3}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\cos O_3 O_2 O_1}{\sin\frac{1}{2}B} = \frac{\cos O_1 O_3 O_2}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{1-\cos A-\cos B-\cos C}{4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}.$$

O.

E. B. Seitz. A problem and its solution. Analyst V. 45-48.

Das Problem ist folgendes: Auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1 werden drei kleine Kreise mit den Radien a, b, c beschrieben, deren jeder die beiden anderen berührt. Auf dem von ihnen eingeschlossenen Kreise werden andere kleine Kreise beschrieben mit den Radien x_1, y_1, z_1, so dass jeder die beiden anderen und zwei der ersten berührt; dann weiter, in dem System eingeschriebener Kreise werden wieder drei kleine Kreise mit den Radien x_2, y_2, z_2 beschrieben, deren jeder wieder die beiden anderen und zwei des ersten Systems eingeschriebener Kreise berührt, und so fort. Man soll x_n, y_n, z_n finden. Der Verfasser findet:

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} x_n \pm \operatorname{cotg} a &= \operatorname{cotg} y_n \pm \operatorname{cotg} b = \operatorname{cotg} z_n \pm \operatorname{cotg} c\\ &= \tfrac{1}{6}\{(5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n \pm 2\}(\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c)\\ &\quad + \tfrac{1}{6}\{(5+2\sqrt{6})^n - (5-2\sqrt{6})^n\}\\ &\quad .\sqrt{3\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg} b + 3\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg} c + 3\operatorname{cotg} b\operatorname{cotg} c - 3}.\end{aligned}$$

Er zeigt auch in einem Zusatz, dass wenn 4 kleine Kreise jeder einen fünften in demselben Wege berühren, und wenn t_1t_2, t_2t_3, t_3t_4, t_4t_1, t_1t_3, t_2t_4 die Bogen grösster Kreise sind, welche die 4 Kreise zu je 2 verbinden und berühren, so

$$\sin\tfrac{1}{2}t_1t_2 \sin\tfrac{1}{2}t_3t_4 + \sin\tfrac{1}{2}t_2t_3 \sin\tfrac{1}{2}t_4t_1 = \sin\tfrac{1}{2}t_1t_3 \sin\tfrac{1}{2}t_2t_4.$$

Glr. (O.)

KURTZE. Grundriss der mathematischen Geographie. Pr. Neu-Strelitz.

Enthält eine für den Standpunkt von Schülern der oberen Klassen von Gymnasien berechnete Darstellung der hauptsächlichsten Begriffe der mathematischen Geographie. O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie von W. J. C. MILLER, WOLSTENHOLME, R. TUCKER, D. EDWARDES, J. O. JELLY, MOREL, COCHEZ, H. L. ORCHARD, T. MITCHESON, E. W. SYMONS, A. BUCHHEIM, CH. LADD, J. O'REGAN finden sich Educ. Times XXIX. 22, 31, 71, 98; XXX. 22, 25, 71, 80, 88, 97.

O.

F. KOMMERELL'S Lehrbuch der Stereometrie. 4te Auflage bearbeitet von G. Hauck. Tübingen. H. Laupp.

Die vorliegende vierte Auflage des bekannten Lehrbuchs ist gegen die frühere dritte, die auch schon von Herrn Hauck bearbeitet war, in wesentlichen Stücken verändert und verbessert worden. Es würde indessen den hier gestatteten Raum überschreiten, wollte Referent auf diese Aenderungen selbst eingehen. Das Buch ist rein geometrisch gehalten. Der erste Abschnitt behandelt die Gerade und die Ebene, der zweite die krummen Flächen, d. h. Cylinder, Kegel, Kugel, wobei namentlich der Abschnitt über das Dreikant hervorzuheben ist. Der dritte Abschnitt behandelt Polyeder und Umdrehungskörper. Dabei werden na-

mentlich auch die Sätze über Volumina abgeleitet. Jedem Abschnitt ist ein reicher Uebungsstoff an Lehrsätzen und Aufgaben beigefügt. Die Figuren sind consequent in der Weise durchgeführt, dass die schiefe Parallelperspective mit einem Winkel von 120° und einer Verkürzung von $\frac{1}{2}$ angewandt wird. Dadurch wird eine grosse Einheit erzielt, wie überhaupt auf die Darstellung und Zeichnung räumlicher Gebilde in dem ganzen Buche besonderes Gewicht gelegt wird. O.

C. J. Matthes. Beginselen der Stereometrie. Amsterdam. v. d. Post.

Enthält die Elemente der Stereometrie bis zur Volumenbestimmung von Umdrehungskörpern mit Hülfe des Guldin'schen Theorems. O.

G. v. Biedermann. Zum Delischen Problem. Hoffmann Z. IX. 279-280.

Näherungsweise Construction. O.

J. K. Becker. Einfachste Formel für das Volumen des Prismatoids. Schlömilch Z. XXIII. 412-414.

Liegt ein Körper zwischen parallelen Grundflächen G und g, und ist der Inhalt seines Querschnittes Δ im Abstand x von einer derselben eine ganze rationale Function, die den zweiten Grad nicht übersteigt, also etwa

$$\Delta = ax^2 + bx + G,$$

so ist das Volumen, wenn h die Höhe bezeichnet, dargestellt durch die Formel

$$V = \tfrac{1}{3}ah^3 + \tfrac{1}{2}bh^2 + Gh.$$

Man kann die drei Constanten a, b, G ausdrücken, wenn man drei beliebige Querschnitte kennt. Wählt man dazu die beiden Grundflächen und den Mittelschnitt D, d. h. den Querschnitt in halber Höhe, so erhält man den unter dem Namen der Simpson'schen Formel bekannten Ausdruck für das Volumen. Wählt

man aber den Querschnitt in der Höhe $\frac{1}{n}h$ so erhält man

$$V = \frac{h}{6(n-1)}[(2n-3)g-(n-1)(n-3)G+n^2\Delta_{\frac{1}{n}}],$$

wenn jetzt $\Delta_{\frac{1}{n}}$ den zuletzt genannten Querschnitt bedeutet. Diese Formel wird besonders bequem für $n=3$ oder $n=\frac{3}{2}$ und ergiebt so die beiden speciellen Ausdrücke:

$$V=\frac{h}{4}(g+3\Delta_{\frac{1}{3}})=\frac{h}{4}(G+3\Delta_{\frac{2}{3}}).$$

Diese Formeln erfordern nur die Kenntniss einer Grundfläche und eines Querschnittes.

Referent möchte hierzu bemerken, dass die Formel nicht mehr gültig ist, wenn Δ bis zum dritten Grade ansteigt, während die Simpson'sche Formel, wie E. F. August nachgewiesen hat, auch für diesen Fall gilt. Die Berechnung der Schwerpunkte der wichtigsten Körper ist also in der bekannten Weise durch die Simpson'sche Formel möglich, durch die hier angegebene nicht. A.

P. Amarim Vianna. Demonstracao da theorema de M. Villarceau solue a toro. Jorn. sc. math. e astr. I. 84-85.

G. Dostor. Les trois sphères des polyèdres réguliers étoilés. Grunert Arch. LXII. 78-102.

G. Dostor. Propriétés relatives des polyèdres réguliers, qui sont conjugués entre eux. Grunert Arch. LXII. 285-289.

Die drei Kugeln sind die dem regulären Polyeder umgeschriebene und eingeschriebene und drittens die Kugel, welche sämmtliche Kanten des Polyeders berührt. Schon in früheren Arbeiten hat der Verfasser darauf aufmerksam gemacht, dass diese dritte Kugel von eben solcher Wichtigkeit ist, als die beiden andern. Die Radien derselben mögen mit R, r und ϱ bezeichnet werden; sie sind durch folgende Relationen mit einander

verbunden:

$$r \sin \frac{q\pi}{n} = \varrho \cos \frac{p\pi}{m}$$

und

$$R \cos \frac{q\pi}{n} = \varrho \sin \frac{p\pi}{m}.$$

m und p bedeuten hierin die Anzahl der Seiten (Kantenwinkel) und die Gattung einer Ecke und n und q die Anzahl der Seiten (Kanten) und die Gattung einer Fläche. Für die convexen Polyeder ist p und $q = 1$ zu setzen. Diese und andere Formeln, z. B. für die Kante des Polyeders und den Neigungswinkel zweier anstossenden Flächen sind für jedes einzelne der 5 convexen Polyeder und für die beiden Kepler'schen und die beiden Poinsot'schen Sternpolyeder besonders ausgerechnet. Durch Vergleichung der Formeln ist eine Reihe von Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten gefunden. — In der zweiten Abhandlung ist der Satz bewiesen: Die Volumina zweier regulären einander conjugirten Polyeder, welche einer und derselben Kugel eingeschrieben sind, verhalten sich wie die Radien der kantenberührenden Kugeln der beiden Polyeder. Schl.

L. Klug. Ueber die Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren. Grunert Arch. LXI. 361-366.

Von den acht Kugeln berührt eine die vier Flächen des Tetraeders auf der innern positiven Seite, vier Kugeln berühren je eine Fläche auf der äusseren negativen und die übrigen drei Flächen auf der positiven Seite, und drei Kugeln berühren je zwei Flächen auf der positiven und zwei Flächen auf der negativen Seite. Die drei letzteren Kugeln berühren sämmtlich entweder die grösste Fläche auf der positiven Seite oder sämmtlich die kleinste Fläche auf der negativen Seite, je nachdem die Differenz der zwei grössten Flächen grösser oder kleiner ist als die Differenz der zwei übrigen Flächen des Tetraeders. Die Formeln für die reciproken Werthe der Radien aller 8 Kugeln sind angegeben. Die Projectionen der Kugelmittelpunkte von

einem Eckpunkte aus auf die gegenüberliegende Fläche bestimmen ein Vierseit, dessen Diagonalpunkte die Ecken der Fläche sind. Auf jeder Fläche des Tetraeders sind die Berührungspunkte der acht Kugeln so gelegen, dass sie zusammen mit den drei Eckpunkten und dem Höhenfusspunkte in derselben Fläche 16 Gerade bestimmen. Durch jeden der 12 Punkte gehen 4 Gerade, und auf jeder Geraden liegen 3 dieser Punkte.

Schl.

C. W. Merrifield. Solutions of questions (4902, 5558). Educ. Times XXIX. 85-86.

Bezieht sich auf die grösstmögliche Anzahl gleicher Kugeln, die sich berühren können. O.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

R. Sturm. Elementi di geometria descrittiva. Traduzione dal Tedesco di G. Jung. Milano. Hoepli.

Uebersetzung des Buches, welches F. d. M. VI. p. 339 besprochen worden ist. O.

Fr. Šanda. Descriptive Geometrie für die Oberklassen der Realschulen. (Böhmisch.)

Std.

V. Jarolímek. Descriptive Geometrie. III. Theil, den Schluss eines für die Ober-Realschulen bestimmten Systems bildend. (Böhmisch.)

Std.

E. Czuber. Ableitung der Centralprojection aus einer cotirten Orthogonalprojection. Grunert Arch. LXII. 259-267.

Die Centralprojection eines Raumpunktes A, dessen Orthogonalprojection a und dessen Cote (normaler Abstand von der Bildebene) α ist, ist Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise; der eine wird um a als Mittelpunkt mit dem Radius α gezeichnet, der andere ist der Distanzkreis, das heisst derjenige Kreis, der die Orthogonalprojection des Projectionscentrums, den Hauptpunkt, zum Mittelpunkt und die Cote des Projectionscentrums, die Augdistanz, zum Radius hat. Liegt der Punkt A mit dem Centrum O auf derselben Seite der Bildebene, so ist die Centralprojection a' der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise, in diesem Falle ist die Cote α des Punktes A positiv zu rechnen. Die Centralprojection einer Geraden, von welcher zwei Punkte A und B durch ihre Orthogonalprojectionen a, b und ihre Coten α, β bestimmt sind, ist die Aehnlichkeitsaxe der zwei Kreise, welche um die Mittelpunkte a und b mit den Radien α bez. β construirt sind. Der Spurpunkt der Geraden in der Bildebene ist ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise, und zwar ist es der äussere oder innere, je nachdem A und B auf derselben Seite der Bildebene liegen oder nicht. Ist eine Ebene durch drei Punkte bestimmt, so ist ihre Spurlinie mit der Bildebene eine der Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise, die um die Orthogonalprojectionen der gegebenen Punkte mit den zugehörigen Coten als Radien gezeichnet sind. Der letzte Theil der Arbeit handelt von der Axenbestimmung in den Centralprojectionen der Kegelschnitte. Schl.

R. Rawson. Solution of a question (5643). Educ. Times XXX. 24-25.

Ein gegebenes Dreieck sei durch orthogonale Projection aus einem gleichseitigen Dreieck entstanden oder es sei orthogonal in ein gleichseitiges Dreieck projicirt. In beiden Fällen wird die Grösse des gleichseitigen Dreiecks durch geometrische Construction bestimmt. Die Herleitung ist analytisch. O.

K. Klekler. Neue Methode zur Auflösung des Dreikants. Grunert Arch. LXI. 337-344.

Das Dreikant wird in eine solche Lage zur Projectionsebene gebracht, dass die Axe des umschriebenen Kreiskegels senkrecht auf der Ebene steht und die Kanten gleiche Neigung zu derselben haben. Die Spuren der Seiten des Dreiecks bilden nun ein Dreieck, dessen Umkreismittelpunkt mit der Projection des Scheitels zusammenfällt. Die Kantenwinkel sind durch Umlegung der Seitenebenen zu finden. Ferner werden die drei zu den Kanten normalen Ebenen durch den Scheitel gelegt, ihre Spuren sind leicht zu zeichnen und durch Umlegung um dieselben sind auch die Winkel des Dreikants bestimmt. Nach diesen Einrichtungen sind die 6 Aufgaben über das Dreikant einfacher zu lösen, als sie in den Lehrbüchern der descriptiven Geometrie gewöhnlich gelöst werden. Schl.

B. Procházka. Stereographische Projection von Flächen zweiten Grades. Casopis VII. 213-218 (Böhmisch).

Enthält eine Reihe von Theoremen im Gewande von Tilšer's ikonognostischen Symbolen. Std.

C. Pelz. Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades. Wien. Ber. 1878.

Der Verfasser hat die Construction der Brennpunkte der Contourcurven von Rotations- und allgemeinen Flächen zweiten Grades für die centrale und auch für die Parallelprojection eingehend behandelt in der Abhandlung im 75. Bande der Berichte der Wiener Akademie: Ueber eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades, über die der IX. Band dieses Jahrbuchs S. 418 ein Referat enthält. Die vorliegende Abhandlung ist eine Ergänzung zu der früheren; sie betrifft nur die orthogonalen Projectionen der Ro-

tationsflächen zweiter Ordnung. Unter andern ergeben sich folgende einfache Resultate: Die Brennpunkte des zweischaligen Rotationshyperboloids, des verlängerten Rotationsellipsoids, und des Rotationsparaboloids projiciren sich bei der orthogonalen Projection als Brennpunkte der Contourcurve.

Schl.

H. Drach. Construction von Tangenten an die Berührungslinie einer Rotationsfläche und der ihr von einem Punkte umgeschriebenen Developpabeln. Wien. Ber. 1878.

Die Construction der Tangenten an die Berührungscurve einer gegebenen Rotationsfläche mit einem umschriebenen Kegel erfordert die Zuhilfenahme der windschiefen Normalenfläche der Rotationsfläche längs der Berührungscurve. Für diese Normalenfläche sind drei Leitelemente gegeben, die Rotationsaxe, die unendlich ferne Curve des Normalenkegels des umschriebenen Kegels und die von der Evolute des Meridians beschriebene Rotationsfläche. Drei Berührungsebenen und ihre entsprechenden Berührungspunkte sind für jede Erzeugende der Normalenfläche bekannt; für jeden anderen Punkt wird die Berührungsebene aus der Projectivität bestimmt, welche zwischen den Ebenen und den entsprechenden Berührungspunkten besteht. An zwei Beispielen ist die Ausführung dieses constructiven Verfahrens gezeigt. Es ergiebt sich noch folgender Satz: Nur diejenigen Tangenten der Berührungscurve schneiden die Rotationsaxe, deren Berührungspunkte entweder parabolische Punkte der Fläche sind, oder welche mit der Spitze des umschriebenen Kegels in einer und derselben Parallelkreisebene liegen. Schl.

A. S. Monteira. Note de géométrie descriptive sur l'intersection des surfaces de révolution d'un ordre quelconque. Jorn. sc. math. e astr. I. 177-179.

H. Wiechel. Theorie und Darstellung der Beleuchtung von nicht gesetzmässig gebildeten Flächen mit Rücksicht auf die Bergzeichnung. Civiling. XXIV. 335-364.

Der Verfasser giebt zunächst einige historische Notizen über die bisherigen Methoden der Darstellung. Die geometrische Projection von nicht gesetzmässig gebildeten Flächen geschieht mit Hülfe der Isohypsen, d. h. der Durchschnittslinien zwischen einem System paralleler, in gleichen Abständen von einander befindlichen Ebenen mit der Körperoberfläche. Zur vollständigen Darstellung gehört aber nicht nur die geometrische Festlegung der Körperoberfläche, sondern auch die Herausmodellirung des Formcharakters durch Einzeichnung der Licht- und Schattentöne. Dies wurde zuerst von J. G. Lehmann (Darstellung einer neuen Thorie der Bezeichnung schiefer Flächen im Grundriss, Leipzig 1799) durchgeführt, aber seine Methode durch Schraffirung hatte viele Mängel, namentlich durch die Willkürlichkeit in der Schattirung der schraffirenden Linien. Zur correcten Wiedergabe der Helligkeitsvertheilung kam es daher auf die Construction der Isophoten an, nämlich der Linien, welche alle Flächenelemente gleicher Helligkeit verbinden. Für gesetzmässig gestaltete Flächen ist diese Theorie von L. Burmester (Theorie und Darstellung gesetzmässig gestalteter Flächen, Leipzig 1875) eingehend behandelt. In der vorliegenden Arbeit giebt nun der Verfasser eine Anleitung zur Darstellung nicht gesetzmässig gestalteter Flächen. Er beginnt damit, aus dem Umkreis der auffallenden Strahlen, der Böschung etc. zunächst eine Formel für die Helligkeit aufzustellen, giebt sodann die nöthige Anleitung zur Construction des Helligkeitsmassstabes für die Ausführung der praktischen Zeichnung, die er an einer Reihe von Beispielen erläutert. Da die strenge Ausführung der Bestimmung der Helligkeit auf nicht gesetzmässig gebildeten Flächen im Allgemeinen Schwierigkeiten bietet, giebt er noch zwei Näherungsmethoden und schliesst mit einer Anleitung zur praktischen Ausführung seiner Methode, die auch in Zeichnungen an Beispielen ausgeführt ist. O.

L. Porfirio da Motta Pegado. Determinacao dos axos da sombra du projeccas obliqua di um circulo. Jorn. sc. math. phys. nat. 1878. 217-218.

M. Riccardi. Notizia bibliografica. Battaglini G. XVI. 378-379.

Kritik und Inhaltsangabe des in Turin erschienenen Buches des Prof. Domenico Tessari: Applicazioni della geometria descrittiva alla teoria delle ombre e del chiaro-scuro.

Schl.

V. Thallmayer. Ueber das Entwerfen von Apparaten zum Anreissen von Curven. Carl Rep. XIV. 713-729.

Der Verfasser hat bereits früher eine Anzahl von Instrumenten zum Verzeichnen ebener Curven in Dingler's Polyt. Journal beschrieben. Bei denselben wurden die zu zeichnenden Curven als die Spur eines in Bewegung befindlichen Stiftes auf einer senkrecht unter ihm in Bewegung befindlichen Ebene construirt. In dem vorliegenden Aufsatze leitet der Verfasser allgemein die Gleichungen der Bahn ab, in der die Bewegung eines, von mehreren in einer Ebene befindlichen Seitenbewegungen getriebenen Stiftes erfolgt und bestimmt dann die allgemeinen Gleichungen der Curve selbst. Es geschieht dies mit Hülfe rechtwinkliger Coordinaten und Polarcoordinaten. Die Herleitung selbst bietet nichts Bemerkenswerthes. Angewandt werden die Resultate auf Apparate, die zur Construction von Kegelschnitten, Cycloiden etc. dienen.

O.

H. Léauté. Sur le tracé mécanique des arcs de courbe. Bull. Soc. Philom. (7) II. 126-127.

Ueber eine mechanische Vorrichtung zum Curvenzeichnen.

Schl.

A. Cayley. Link-work for x^2. Am. J. I. 386.

A. W. Phillips. Linkwork for the lemniscate. Am. J. I. 386.

Die erste Arbeit enthält die Beschreibung eines Stabsystems zur graphischen Darstellung von x^2, die zweite einen Apparat zur Beschreibung von Lemniscaten. O.

P. Cassani. Sopra uno strumento, che realizza la trisezione meccanica dell' angolo. Atti dell' Aten. Ven. (3) I. 163-169.

Nach einem kurzen Rückblick auf die Geschichte des Problems der Dreitheilung des Winkels folgt die Beschreibung des Apparats. Er besteht aus einer Leitschiene und zwei Stäben. Die Stäbe sind durch Gelenke mit einander und mit der Schiene verbunden. Schl.

J. Hammond. On the mechanical description of the Cartesian. Am. J. I. 283.

Mittelst zweier Fäden, die um zwei kreisrunde concentrische Scheiben und durch zwei Ringe gespannt sind. Schl.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

J. Lüroth. Ueber cyclisch-projective Punktgruppen in der Ebene und im Raume. Clebsch Ann. XIII. 305-319.

In Erweiterung der Abh. im XI. Bande der Annalen p. 84 (F. d. M. IX. 385) sucht Herr Lüroth nun in der Ebene und im Raume solche Punktgruppen a_1, a_2, ... a_n auf, welche durch

projective (collineare) Transformation in a_2, a_3, ... a_n, a_1 übergehen.

Für die Ebene ergiebt sich der Satz: Wenn die n Punkte nicht auf einer Geraden liegen, so befinden sie sich auf einem Kegelschnitte, so dass das Problem auf das frühere zurückgeführt ist. Jedes andere Arrangement, das die cyclisch-projective Gruppe auf dem Kegelschnitt wieder zu einer solchen macht, ist auch bei dem Probleme der Ebene möglich. Die der Gruppe als Gruppe auf dem Kegelschnitte zugehörige Involutionsaxe g und der Pol sind sich selbst entsprechende Elemente der collinearen Beziehung. Auch hier inducirt jeder weitere Punkt b_1 der Ebene eine neue, derselben collinearen Beziehung angehörige cyclisch-projective Gruppe, und die verschiedenen sich so ergebenden Kegelschnitte haben zwei imaginäre Berührungen auf g.

Die räumliche collineare Transformation, bei der eine cyclisch-projective Gruppe möglich ist, bietet zwei Fälle. In beiden giebt es zwei reelle sich selbst entsprechende Gerade: in dem einen hat die eine Gerade zwei reelle, die andere zwei imaginäre sich selbst entsprechende Punkte, durch jene gehen zwei imaginäre, durch diese zwei reelle sich selbst entsprechende Ebenen; im zweiten Falle sind alle sich selbst entsprechenden Punkte und Ebenen imaginär.

In jenem Falle muss die Zahl der Punkte der Gruppe grade sein, und a_1, a_3, a_5, ... liegen auf der einen, a_2, a_4, ... auf der andern von zwei Ebenen, welche zu den reellen sich selbst entsprechenden Ebenen harmonisch sind. Ist P_1 einer der reellen sich selbst entsprechenden Punkte, so bildet $P_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine cyclisch-projective Gruppe im Strahlenbündel, also auf einem Kegel zweiten Grades gelegen, und die den Punkt P_1 enthaltende reelle sich selbst entsprechende Ebene ist die zugehörige Ebene (das Analogon der Involutionsaxe der Ebene). Im zweiten Falle liegen die Punkte der Gruppe auf einem geradlinigen Hyperboloid und die durch sie gehenden Geraden aus jeder der beiden Schaaren bilden eine cyclisch-projective Gruppe. Die derselben Collineation angehörigen weiteren cyclisch-projectiven Gruppen veranlassen neue Hyperboloide, und alle diese Flächen gehen durch

dasselbe imaginäre windschiefe Viereck, dessen Ecken die vier imaginären sich selbst entsprechenden Punkte sind.

Doch hat der Beweis für diesen Fall dem Ref. nicht recht eingeleuchtet; er enthält einen ihm nicht bekannten und auch nicht definirten Begriff: was versteht Herr Lüroth unter dem Aeusseren und Inneren eines geradlinigen Hyperboloids, an welches doch von jedem Punkte ein reeller Tangentialkegel kommt?

Sm.

M. Chasles. Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques.

Bull. S. M. F. VI. 208-250.

Herr Chasles veröffentlicht damit eine im Jahre 1829 verfasste Arbeit, welche in überaus durchsichtiger Darstellung die Elemente der kinematischen Geometrie bringt. Sie geht aus von dem Satze, dass, wenn eine ebene Figur in ihrer Ebene sich bewegt, die Normalen aller Punkte in einem bestimmten Momente an die Trajectorien durch einen und denselben Punkt gehen. Es werden eine Reihe von Principien aufgestellt und aus ihnen interessante Sätze gefolgert.

1) Wenn eine Curve durch einen Punkt einer in der Ebene beweglichen Figur von constanter Gestalt beschrieben wird, so genügt es, um die Normalen an diese Curve zu ziehen, die Bewegung zweier Punkte zu kennen; die Normalen an die von ihnen beschriebenen Curven geben jenen Punkt, durch den alle gehen. Durchlaufen z. B. zwei Punkte zwei Gerade, so thun es sämmtliche Punkte eines gewissen Kreises ebenfalls und die durchlaufenen Geraden bilden ein Büschel.

2) Durch den Punkt, durch den die Normalen der Trajectorien gehen, gehen auch die Normalen der Punkte, in denen der Perimeter der bewegten Figur in dem betreffenden Moment die Enveloppe des durchlaufenen Raums berührt.

Hieraus werden in überaus einfacher Weise die Sätze abgeleitet, dass der Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel an zwei confocalen Kegelschnitten oder an einem derselben hingleiten,

einen Kreis (bezw. bei Parabeln eine Gerade) beschreibt, und das Centrum einer Ellipse, die an dem einen Schenkel eines rechten Winkels hingleitet, während der eine Brennpunkt den andern durchläuft, ebenfalls einen Kreis beschreibt.

3) Geht der Perimeter der Figur stets durch einen festen Punkt, so geht auch die Normale des Perimeters in demselben in dem betreffenden Momente durch jenen Convergenzpunkt. Hieraus wird unter anderem abgeleitet, dass die Fusspunktcurve der Centralkegelschnitte für den Brennpunkt als Pol ein Kreis, bei der Parabel eine Gerade ist, und dass, wenn ein Kreis, bez. eine Gerade eine unendlich kleine Bewegung erfährt, die Tangenten an die Trajectorien seiner, bez. ihrer Punkte in einem bestimmten Momente einen Centralkegelschnitt, bez. eine Parabel umhüllen.

4) Berührt die bewegliche Curve mit einem unveränderlichen Punkte eine feste Curve, so fällt jener Normalen-Convergenzpunkt in den Krümmungsmittelpunkt der festen Curve in ihrem jedesmaligen Berührungspunkte mit der beweglichen. Dies wird zur Construction von Krümmungsmittelpunkten benutzt.

Es wird nun besprochen, dass jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene durch das Rollen einer gewissen Curve auf einer andern hervorgebracht werden kann, und also jede Curve eine Epicycloide im verallgemeinerten Sinne ist.

Es folgt dann mit Hilfe des oben gewonnenen analogen planen Satzes der Beweis des Satzes, dass die Scheitel der, einer centrischen Fläche zweiten Grades, bez. einem Paraboloide umgeschriebenen dreirechtwinkligen Dreiflache eine Kugel, bez. eine Ebene erzeugen. Ferner: wenn 2 Kegelschnitte gegeben sind, von denen jeder der Ort der Scheitel der den andern enthaltenden Rotationskegel ist, so ist der Ort der Schnittpunkte von 3 zu einander senkrechten Ebenen, von welchen zwei den einen, die dritte den andern tangiren, eine den Kegelschnitten concentrische Kugel, und ähnliches gilt, wenn die 3 Ebenen 3 confocale Flächen zweiten Grades berühren. Am Schlusse wird (analytisch) eine Verallgemeinerung des Satzes bewiesen, dass die Tangentialebenen in den Berührungspunkten einer gemein-

samen Tangente zweier confocalen Flächen zweiten Grades zu einander senkrecht sind. Sm.

P. H. Schoute. De voortbrenging van krommen door middel van projectivische krommenbundels. Nieuw Arch. IV. 182-193.

Da die Behandlung des Gegenstandes: „Erzeugung von Curven mittels projectivischer Curvenbüschel in dem bekannten Lehrbuche von M. Curtze viel zu wünschen übrig lässt, so dass derjenige, der hiermit näher bekannt werden will, verschiedene Zeitschriften zur Hand nehmen muss, ist es des Verfassers Zweck, diesen Gegenstand näher zu untersuchen. Nach einer kurzen Einleitung über mehrere allgemeine und bekannte Grundsätze der synthetischen Geometrie beweist er auf's Neue die folgenden Sätze, aus welchen dann einige Folgerungen abgeleitet werden.

I. Der geometrische Ort der Schnittpunkte der verwandten Curven zweier projectivischen Curvenbüschel C'_m und C'_n ist eine Curve C_{m+n}.

II. Ist es gelungen, auf einer gegebenen Curve C_{m+n}, die m^2 Basispunkte des Büschels C'_m zu finden, so kann man die n^2 Basispunkte des anderen Büschels C'_n leicht angeben und die projectivische Verwandtschaft zwischen den beiden Büscheln so bestimmen, dass die gegebene Curve der geometrische Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Curven ist (Chasles).

III. Von den m^2 Basispunkten des ersten Büschels kann man $\frac{1}{2}\{(m-n)^2+3(m+n)-2\}$ oder $3n-2$ willkürlich auf C_{m+n} annehmen, je nachdem $m>n$ oder $m \overline{\gtrless} n$ ist (Chasles).

IV. Von den bestimmenden Basispunkten zweier Büschel C'_m und C'_n, welche eine gegebene Curve C_{m+n} hervorbringen müssen, sind immer $mn-1$ durch die Uebrigen bestimmt (de Jonquières).

V. Wenn von einer Curve C_{m+n} die bestimmte Zahl Punkte $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+3)$ gegeben ist, kann man die Curve mittels projectivischer Curvenbüschel C'_m und C'_n construiren (de Jonquières).

G.

P. H. SCHOUTE. Eenige beschouwingen naar aanleiding van het grootste aantal veelvoudige punten eener algebraische kromme. Versl. en Mededeel. XIII. 96-143.

Der Ausgangspunkt dieser Abhandlung ist der bekannte Satz: „Eine einfache Curve n^{ten} Grades kann höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte besitzen.“ Die verschiedenen Beweise von Cremona, Plücker und Anderen werden untersucht und ungenügend gefunden, weiter ein neuer mitgetheilt. Ebenso wird die Zahl dreifacher und mehrfacher Punkte untersucht, hierzu eine Tafel dieser Zahlen gefügt. Hieran werden einige Folgerungen geknüpft und sodann untersucht, wie die Zahl der auf unbekanntem Ort gelegenen Doppelpunkte in einigen Fällen die Natur der Curve bestimmt; dieses wird an einigen einfachen Beispielen erläutert. Mittels des Princips der Dualität werden nächst den genannten Resultaten über geometrische Orte mit Doppel- und vielfachen Punkten unmittelbar die entsprechenden Sätze über Enveloppen mit doppel- und vielfachen Tangenten gefolgert. Drei Gruppen algebraicher Curven werden unterschieden: Curven mit reellen Zweigen, Curven mit singulären reellen Punkten und Curven ohne reelle Punkte, und diese Unterscheidung durch Beispiele erläutert. Schliesslich werden noch einige analoge Untersuchungen Plücker's besprochen und mit den Resultaten des Verfassers verglichen.

G.

TOWNSEND, S. ROBERTS, E. B. ELLIOTT. Solutions of a question (5580). Educ. Times XXIX. 96.

Wenn die Seiten eines veränderlichen Dreiecks durch 3 feste Punkte auf einer Geraden gehen, während eine Ecke sich auf einer anderen geraden Linie bewegt und eine zweite eine gegebene Curve beschreibt, so ist der Ort der dritten Ecke eine Curve, die durch homographische Transformation der gegebenen erhalten wird.

O.

P. Fuortes. Ricerche geometriche sopra alcune proprietà dei sistèmi di rette nel piano e dei sistemi di circoli che passano per un punto sul piano o sulla sfera. Battaglini G. XVI. 91-107.

Das bekannte Theorem über den gemeinsamen Schnittpunkt der 4 Kreise, welche zu den 4 Dreiecken eines vollständigen Vierecks gehören, ist in einer verallgemeinerten Fassung zuerst von Clifford für $2n$ Gerade ausgesprochen. Diesen Clifford'schen Satz (Educ. Times 1870) von welchem der Verfasser bereits früher einen Beweis veröffentlicht hatte, beweist derselbe hier vermöge der Eigenschaften eines Systems von Kreisen, welche zu Durchmessern die von einem Punkte der Peripherie auslaufenden Sehnen eines festen Kreises haben, in übersichtlicher Weise durch den Schluss von n auf $n+1$. Auf einen anderen Beweis wird zum Schlusse durch das folgende Theorem hingewiesen: Zu jedem System von $2n+1$ Geraden giebt es einen Kreis, so dass die Fusspunkte der von einem Punkte P derselben auf die Geraden gefällten Senkrechten in einer Curve n^{ter} Ordnung liegen, die in P einen $n-1$-fachen Punkt hat; und zu jedem System von $2n+2$ Geraden gehört ein Punkt, für welchen die Fusspunkte der von demselben auf jene Geraden gefällten Senkrechten in einer Curve n^{ter} Ordnung liegen, die in jenem Punkte einen $n-1$-fachen Punkt hat. V.

O. Schlömilch. Ueber das vollständige Viereck. Schlömilch Z. XXIII. 191-193.

Herr Schlömilch verallgemeinert den Gaussischen Satz vom vollständigen „Vierseit" (wie von Steiner, Schröter, Cremona, etc. gesagt wird; der Verfasser sagt in etwas anderer Auffassung „Viereck"), dass die Mitten der Diagonalen auf einer Geraden liegen. Sm.

O. Schlömilch. Ueber doppelt centrische Vierecke. Schlömilch Z. XXIII. 193-194.

Unter doppelt centrischen Vierecken versteht der Verfasser Vierecke, die einem Kreise um-, einem anderen eingeschrieben sind. Er theilt über dieselben einige Sätze ohne Beweis mit und regt weitere Fragen an. Sm.

S. Kantor. Ueber das vollständige Viereck und das Kreisviereck. Wien. Ber. 1878.

Die Arbeit ist eine Ergänzung und weitere Ausführung der Untersuchungen, welche der Verfasser in einer früheren Abhandlung „Ueber das Kreisviereck und Kreisvierseit insbesondere, und das vollständige Viereck im Allgemeinen" im LVI. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie veröffentlicht hat (cfr. F. d. M. IX. p. 424). Wichtige metrische Beziehungen beim vollständigen Vierseit bilden den hauptsächlichsten Inhalt. Schl.

S. Kantor. Ueber das vollständige Fünfseit. Wien. Ber. 1878.

S. Kantor. Ueber das vollständige Fünfseit und einige dabei auftretende Curvenreihen. Wien. Ber. 1878.

Beide Abhandlungen enthalten wesentliche Beiträge zur Geometrie des Fünfseits. In der ersten Arbeit werden besonders Beziehungen der Lage untersucht, wozu die Miquel'schen Punkte, der Miquel'sche Kreis, die Steiner'schen Mittelpunktskreise und der gemeinschaftliche Schnittpunkt derselben die Ausgangspunkte bilden. In der zweiten Arbeit, auf deren Inhalt Referent besonders aufmerksam macht, sind vorzugsweise metrische Beziehungen entwickelt. So sind unter andern Relationen zwischen den Radien der Steiner'schen Mittelpunktskreise und den Winkeln der die Diagonalen halbirenden Geraden darin enthalten. Hieran schliessen sich eingehende Untersuchungen über Fusspunktskegelschnitte beim Fünfseit. Der Miquel'sche Kreis ist der Ort der Brennpunkte aller Curven dritter Klasse, welche die fünf Seiten berühren und die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente

haben. Die Fusspunkte der von einem dieser Punkte auf die fünf Seiten gefällten Normalen liegen zugleich mit dem Brennpunkte auf einem Kegelschnitte. Der Schnittpunkt der fünf Steiner'schen Mittelpunktskreise besitzt die Eigenthümlichkeit, dass sein Fusspunktskegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist.

Schl.

S. Kantor. Ueber den Zusammenhang von n beliebigen Geraden in der Ebene. Wien. Ber. 1878.

Die Abhandlung ist die Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verfassers mit demselben Titel, über welche im IX. Bande dieses Jahrbuches p. 424 referirt worden ist. Sie enthält den Beweis für folgende zwei Sätze: Der Miquel'sche Punkt P_{2n}, welcher einem $2n$-Seit $g_1 g_2 \dots g_{2n}$ zugehört, ist identisch mit dem Brennpunkte derjenigen rationalen Curve n^{ter} Klasse, welche die $2n$ Geraden zu einfachen Tangenten und die unendlich ferne Gerade zur $(n-1)$-fachen Tangente hat. Der zu einem $(2n+1)$-Seit zugehörige Miquel'sche Kreis K_{2n+1} ist der Ort der Brennpunkte aller Curven $(n+1)^{ter}$ Klasse, welche die Geraden $g_1 g_2 \dots g_{2n+1}$ einmal und die unendlich ferne Gerade n-mal berühren.

Schl.

S. Kantor. Ueber eine Gattung merkwürdiger Geraden und Punkte bei vollständigen n-Ecken auf dem Kreise. Wien. Ber. 1878.

Auf einem Kreise liegen die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4. Wenn in den vier aus diesen Punkten gebildeten Dreiecken die Fusspunktsgeraden für zwei Punkte P_1 und P_2 desselben Kreises construirt werden, so liegen die Schnittpunkte der zu einem Dreiecke gehörigen Linienpaare auf einer und derselben Geraden G_{IV}. Ist P_3 ein dritter Punkt desselben Kreises, und sind bezüglich der Amben P_2P_3 und P_3P_1 die zwei neuen Geraden G_{IV} construirt, so schneiden sich dieselben mit der ersten zur Ambe P_1P_2 gehörigen in einem und demselben Punkte T_{IV}. Befinden

sich die 5 Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 auf demselben Kreise mit den 3 Punkten $P_1 P_2 P_3$, so kann nun in jedem der fünf Vierecke, welche sich aus je vier dieser Punkte bilden lassen, ein Punkt T_{IV} construirt werden; diese 5 Punkte T_{IV} liegen auf einer und derselben Geraden G_V, u. s. f. Diese Beziehungen werden im weiteren Verlaufe auf eine beliebige Anzahl der Punkte A und P ausgedehnt.

Schl.

W. Stammer. Die ersten Sätze der neueren Geometrie als Pensum einer Realschule I. Ordnung. Pr. Düsseldorf.

Die Methoden und Anschauungen der synthetischen Geometrie bilden einen würdigen Abschluss des geometrischen Unterrichts auf Realschulen. Dem Verfasser erscheint es wünschenswerth, dass die Lehrer der Mathematik sich gegenseitig ihre Ansichten und Erfahrungen mittheilen, damit die Grenzen, innerhalb deren sich der Unterricht zu bewegen hat, allmählich festgestellt werden. Deshalb hat der Verfasser die Anfänge der synthetischen Geometrie bis zur Erzeugung der Kegelschnitte dargestellt, wie er sie seit einigen Jahren in der Prima gelehrt hat. Die Bearbeitung interessirt durch Gründlichkeit und durch Uebersichtlichkeit, welche besonders durch die dogmatische Form des Vortrages gefördert wird.

Schl.

Buchbinder. Behandlung der Kegelschnitte auf Schulen in synthetischer Form nach Steiner. Pr. Pforta.

Die vorliegende Bearbeitung der Kegelschnitte für die Zwecke der Schule schliesst sich in der Anordnung und Behandlung des Stoffes sehr eng an das Geiser'sche Buch: „Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung“, § 8—16 an.

Schl.

H. G. Zeuthen. Skelet af en elementärgeometrisk Keglesnitslära. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 33-54, 65-76, 109-124, 132-148.

In diesem Aufsatze giebt der Verfasser in sehr gedrängter Form einen Umriss der elementaren synthetischen Kegelschnittstheorie, insbesondere als Leitfaden für Lehrer und beim Selbststudium bestimmt. Die mitgetheilten Sätze und Constructionen, 199 an Zahl, sind durchgängig ohne Beweise mitgetheilt, indem der Verfasser sich besonders bemüht hat, die Sätze in ihrer natürlichen Folge aufzustellen, damit die Beweise so nahe liegen, dass Jedermann sie selbst auffinden kann. Nur wenn sich besondere Schwierigkeiten darbieten würden, sind die Beweise angedeutet oder wohl auch in extenso mitgetheilt. Eine grosse Anzahl Constructionen ist aufgenommen theils unter die eigentlichen Sätze, theils um als Uebungsbeispiele zu dienen. Sowohl von diesen, als von den mitgetheilten Beweisen zeichnen mehrere sich durch ihre Eleganz aus, z. B. verdient ein sehr einfacher Beweis für das Theorem von Brianchon für den Kreis hervorgehoben zu werden. Um den Gang der Darstellung und den Umfang des Stoffes zu characterisiren, wird es hinreichen, die Titel der verschiedenen Abschnitte anzuführen.

1) Vorbereitende Sätze und Constructionen (von Kreisen aus gegebenen Bedingungen). 2) Definitionen und Grundeigenschaften (der allgemeine Kegelschnitt wird definirt als Ort des Centrums eines Kreises; übrigens wird jede der drei Gattungen für sich behandelt). 3) Constructionen und Sätze von Tangenten. 4) Anwendungen zur Construction von Kegelschnitten, welche gegebenen Bedingungen genügen; confocale Kegelschnitte. 5) Leitlinien. 6) Die Durchmesser der Ellipse und der Hyperbel. 7) Anwendung einer Transformation, Benutzung von besonderen Verhältnissen bei der Ellipse und der Hyperbel (die besprochene Transformation ist mit der Parallelprojection identisch). 8) Die Durchmesser der Parabel. 9) Ebene Schnitte des geraden Kegels. 10) Die Sätze von Pascal und Brianchon. 11) Ebene Schnitte des schiefen Kreiskegels. 12) Pol und Polare. 13) Anhang über confocale Kegelschnitte.

Gm.

M. SIMON. Die Kegelschnitte behandelt für die Repetition in der Gymnasial-Prima. Erste Abtheilung. Die Parabel. Berlin, Calvary.

Das vorliegende erste Heft enthält eine elementar-geometrische Herleitung der Haupteigenschaften der Parabel. Der Verfasser geht von der bekannten Definition der Parabel als geometrischem Ort der Punkte, welche gleiche Entfernung von einem Punkt und einer Geraden haben, aus. Er behandelt sodann die Gestalt der Parabel, Parabel und Gerade, die Eigenschaften der conjugirten Sehnen und Durchmesser, die harmonischen Eigenschaften, Pol und Polare. Im letzten Paragraphen endlich ist eine Reihe von Aufgaben, im Anschluss und mit Hinweis auf die einzelnen Sätze, zusammengestellt. O.

F. MACHOWEC. Einige Sätze der Geometrie der Lage in der Planimetrie und descriptiven Geometrie. Casopis VII. 121-130. (Böhmisch.)

Entwickelt einige Theoreme für den Kreis, die dann für Curven zweiten Grades verallgemeinert werden. Std.

E. CATALAN. Sur les hexagones de Pascal et de Brianchon. Bull. de Belg. (2) XLVI. 946-949.

F. FOLIE. Restitution de priorité en faveur de M. Catalan. Bull. de Belg. (2) XLVI. 379-380.

Herr Catalan hat zwei von den 1877 von Herrn Folie (Bull. de Belg. (2) XLIII. 500—505, XLIV. 181—193, N. C. M. III. 416—417; s. F. d. M. IX. 428) veröffentlichten Sätzen bereits 1848 gefunden und sie in dem Buche: „Application de l'algèbre à la géométrie" (lithographirt) und in den Nouv. Ann. (1) XI. 173 (1852) publicirt. Die Combination dieser Sätze mit denen von Steiner, ebenso wie der Nachweis von der Möglichkeit, diese Eigenschaften auf höhere Curven auszudehnen, kommt indess nur Herrn Folie zu. Mn. (O.)

G. Veronese. Nuovi teoremi sull' hexagrammum mysticum. R. Acc. d. Linc. (3) I. 141-142. 1877.

L. Cremona. Osservazioni. R. Acc. d. Linc. (3) I. 142-143. 1877.

Herleitung bekannter Sätze mit Hülfe perspectivischer Dreiecke von Herrn Veronese. Herr Cremona giebt eine andere Herleitung. O.

E. Brassine. Généralisation du théorème de Brianchon. Mém. de Toul. (7) IX. 453-454.

G. Marro, G. Vincenzo. Solutions of a question (5590). Educ. Times XXIX. 103.

Wenn ein Viereck einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, so lässt sich auf jeder der Seiten ein Punkt so bestimmen, dass die gegenüberliegenden Seiten des neuen durch die 4 Punkte gebildeten Vierecks sich auf der Directrix schneiden. O.

Ch. Ladd. Solution of a question (5670). Educ. Times XXX. 25.

Von den 9 Schnittpunkten zweier einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecke ist die Linie, welche durch zwei dieser nicht auf derselben Seite liegenden Punkte geht, eine Pascal'sche Linie des Systems von 6 Punkten auf einem Kegelschnitt.

O.

G. Mamke. Aufgabe über die Construction eines Kegelschnittes. Grunert Arch. LXII. 325-330.

Die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu zeichnen, welcher drei gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Punkt zum Brennpunkt hat, wird in elementarer synthetischer Weise behandelt. Ferner werden die beiden Fragen genauer erörtert, wie sich der Charakter des Kegelschnitts ändert, wenn eine der gegebenen

Tangenten um einen festen Punkt gedreht wird, und wie sich bei dieser Drehung das Centrum des Kegelschnitts bewegt.

Mz.

A. Mannheim. Construire les axes d'une ellipse, étant donnés deux diamètres conjugués. Nouv. Ann. (2) XVII. 529-536.

Die Aufgabe, welche oben gestellt ist, löst Herr Mannheim mit höchst einfachen Mitteln. Bekanntlich beschreibt jeder Punkt einer Kreisfläche, welche sich innerhalb eines anderen Kreises mit doppeltem Radius rollend bewegt, eine Ellipse, während die Peripheriepunkte Durchmesser jenes Kreises durchlaufen. Ist e der augenblickliche Berührungspunkt beider Kreise und m irgend ein Punkt der rollenden Kreisfläche, so ist me Normale der von m beschriebenen Ellipse (m), das Loth vom Mittelpunkt o des Bahnkreises auf me giebt also die Richtung der Tangente im Punkte m an. Heisst dieses od, so sind om und od conjugirte Richtungen. Während der Bewegung des Kreises beschreibt e die Gerade oe und d die Gerade od; es bewegt sich also ed als starre Gerade zwischen den Schenkeln des Winkels eod. Geht ed in die Richtung von od über, so fällt m in einen Punkt n, also ist $on = om$ die Grösse des dem Halbmesser om zugehörigen conjugirten Halbmessers. Sind demnach om und on als conjugirte Halbmesser einer Ellipse gegeben, so construire man das Loth md, trage von m aus in der Richtung dies Lothes $on = me$ an und lege über oe als Durchmesser einen Kreis. Legt man von m aus durch den Mittelpunkt dieses Kreises den Durchmesser gc, so sind og und oc die Richtungen der Axen der Ellipse, die Strecken gm und mc geben aber ihre Grösse an. Hätte man $on = me'$ in entgegengesetzter Richtung abgetragen, so hätte man eine zweite Construction erhalten. Indem man beide zusammenfasst, gelangt man zu der Lösung, welche Chasles in seinem „Aperçu historique“ p. 362 von dem vorgelegten Problem gegeben hat: „Durch den Endpunkt A des einen der conjugirten Durchmesser lege man eine Senkrechte gegen den zweiten und trage auf dieser Senkrechten von A aus nach beiden Seiten den

zweiten conjugirten Halbmesser ab. Die Endpunkte dieser Strecken verbinde man mit dem Mittelpunkt der Ellipse und halbire durch zwei neue Gerade Winkel und Nebenwinkel dieser Verbindungslinien. Die Richtungen der beiden neuen Geraden geben die Richtungen der Axen an, die Summe jener beiden Verbindungslinien aber entspricht der grossen Axe der Ellipse." Die gewöhnlichen Relationen für conjugirte Durchmesser werden im Anschluss an diese Lösung mit höchst elementaren Mitteln entwickelt, und endlich noch eine zweite Lösung des Problems beigefügt. Schn.

S. Kantor. Geometrische Untersuchungen. Schlömilch Z. XXIII. 414-416.

Aus der Formel $r = \frac{abc}{4\Delta}$ für den Radius des einem Dreieck umschriebenen Kreises folgt bekanntlich eine Formel für den Flächeninhalt einer Ellipse

$$E = \pi \frac{r_{1,2} r_{2,3} r_{1,3}}{r},$$

wo $r_{1,2} r_{2,3} r_{1,3}$ die den Seiten eines einbeschriebenen Dreiecks parallelen Halbmesser, r den Radius des diesem Dreieck umschriebenen Kreises bedeuten. Dieser Satz ist einer wichtigen Specialisirung fähig, die man erhält, indem man den Kreis in einen Krümmungskreis überführt. Wendet man ihn bei einem beliebigen Kreis, welcher die Ellipse in vier Punkten schneidet, auf die vier durch diese Punkte bestimmten Dreiecke an, so folgt leicht der von Steiner ohne Beweis mitgetheilte Satz, dass die Gegenseiten des durch jene vier Punkte bestimmten vollständigen Vierecks gegen die Axen der Ellipse gleich geneigt sind. Der Verfasser knüpft hieran einen neuen Beweis für einen Steiner'schen Satz über die Krümmungskreise der Ellipse, der auf anderen Wegen von Joachimsthal und von dem Referenten bewiesen ist. Es folgt nämlich aus Obigem, dass die Tangente im Berührungspunkte eines Krümmungskreises und die der Ellipse und dem Krümmungskreise gemeinschaftliche Sehne gegen die Axen gleich geneigt sind. Fragt man nun, wieviel Kreise durch einen

Ellipsenpunkt B gehen, welche die Ellipse in einem anderen Punkte berühren, so kommt dies darauf hinaus, durch B eine Sehne so zu legen, dass sie mit der Tangente im anderen Endpunkte gegen die Axen gleich geneigt sei. Projicirt man aber die ganze Figur in der bekannten Weise (affin) auf den grossen (oder kleinen) Scheitelkreis so ist die Aufgabe auf die entsprechende Aufgabe für den Scheitelkreis reducirt. Zieht man nun im Kreise durch B' eine beliebige Sehne $B'A'$ und durch A' eine gegen eine gegebene Richtung mit jener gleich gerichtete Sehne, $A'C'$, so ist die Enveloppe der letzteren eine innere Epicycloide mit 3 Spitzen, für welche der Kreis Scheitelkreis ist. Die 3 Scheitel derselben, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden, brauchen also nur auf die Ellipse zurückprojicirt zu werden, um die gesuchten Osculationspunkte zu erhalten, die also auf einem Maximal-Dreieck liegen. Daraus folgt der Steiner'sche Satz:

Durch jeden Punkt B der Ellipse gehen drei und nur drei anderweitig osculirende Kreise. Die drei Osculationspunkte A_1, A_2, A_3 bilden ein der Ellipse eingeschriebenes Dreieck maximalen Inhalts und liegen mit dem gegebenen Punkte selbst auf einem Kreise. Der Herr Verfasser deutet nach diesem interessanten Beweise noch einige weitere Folgerungen an, von denen aber die eine dem Referenten unverständlich ist, welche heisst: „Alle Kreise, welche den einer Ellipse eingeschriebenen Dreiecken maximalen Inhaltes conjugirt sind, haben gleichen Inhalt". Der Verfasser sagt nämlich nicht, was er mit dem Ausdruck „conjugirt" meint. Der Kreis, für welchen die Seiten des Dreiecks die Polaren der gegenüberliegenden Eckpunkte sind, kann nicht gemeint sein, da man leicht erkennt, dass für diesen die Behauptung nicht zutrifft.

Zuletzt betrachtet der Verfasser die Gerade σ, auf welcher die Fusspunkte der von einem beliebigen Punkte B der Ellipse auf die Seiten des zugehörigen maximalen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ gefällten Senkrechten liegen, und ihre Enveloppe. In Hinsicht hierauf ist jedoch ein Versehen zu berichtigen. Bestimmt man nämlich durch Projection parallel zur kleinen Axe die entsprechenden Punkte B' $A'_1 A'_2 A'_3$ des grossen Scheitelkreises, so liegen die

Fusspunkte der drei von B' auf die Seiten des Dreiecks $A'_1A'_2A'_3$ gefällten Senkrechten in einer Geraden σ', deren Ort, wie richtig angegeben ist, eine orthogonale Asteroide, d. h. eine innere Epicycloide mit vier Spitzen ist, welche letztere in den Durchschnitten des Scheitelkreises mit den Axen liegen. Aber ϱ und ϱ' entsprechen sich dann nicht affin, wie der Verfasser behauptet, da die zu σ' affine Gerade in dem zur Ellipse gehörigen Gebilde diejenige ist, welche durch die Fusspunkte der von B zu den drei Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ conjugirt gerichteten Geraden geht. Demgemäss ist die Behauptung über die Beschaffenheit der von σ eingehüllten Curve zu berichtigen. A.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Ellipse und Hyperbel von H. Pollexfen, J. L. McKenzie, Armenante, A. Martin, C. Leudesdorf, S. Ruggero, C. Vincenzo, W. J. C. Miller, E. W. Symons, E. P. Culverwell, J. C. Malet, C. Puglia finden sich Educ. Times XXIX. 21, 29, 38, 41, 54, 68; XXX. 62, 90.

O.

A. F. Jorry. On triangles self-conjugate with respect to a parabola. Messenger (2) VIII. 122-124.

Es werden fünf Sätze bewiesen, welche ein selbst conjugirtes Dreieck in Bezug auf eine Parabel betreffen, so z. B.: 1) Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ist doppelt so gross, wie dasjenige, welches durch Verbindung der Berührungspunkte dreier seinen Seiten parallelen Tangenten entsteht. 2) Der Mittelpunkt des einem selbst conjugirten Dreieck umschriebenen Kreises liegt auf der Directrix der Parabel. 3) Der Neunpunktekreis des Dreiecks geht durch den Brennpunkt etc. Glr. (O.)

Mack. Ueber die Krümmungskreise der Parabel. Grunert Arch. LXI. 385-407.

Der Herr Verfasser behandelt die Krümmungskreise der Pa-

rabel und Vieles, was damit zusammenhängt, auf eine sehr einfache Weise, indem er von einem Fundamentalsatz über den Winkel zwischen zwei Normalen einer Parabel ausgeht. Dieser Winkel ist nämlich gleich der Hälfte desjenigen, welchen die Brennstrahlen nach den Normalenfusspunkten hin mit einander bilden. Es ist dann leicht, diese letzteren Punkte coincidiren zu lassen und daraus die Construction des Krümmungskreises zu gewinnen. Das Weitere ist in der Arbeit selbst nachzusehen.

Mz.

R. F. Davis, S. Johnston. Solutions of a question (5395). Educ. Times XXIX. 23.

Sind P und Q Punkte auf 2 confocalen Kegelschnitten der Art, dass ihre Tangenten sich unter rechten Winkeln schneiden, so umhüllt PQ einen dritten confocalen Kegelschnitt.

O.

D. L. Gatto, V. Jacobini. Solution of a question (5534). Educ. Times XXIX. 43-44.

4 Kegelschnitte S, A, B, C haben einen Brennpunkt und eine Tangente D gemeinsam. Wenn dann eine S und A gemeinsame Tangente D auf der Directrix von A, eine S und B gemeinsame Tangente D auf der Directrix von B, endlich eine S und C gemeinsame Tangente D auf der Directrix von C schneidet, so schneiden sich die gemeinsamen Tangenten von A, B und C in 3 Punkten, die in einer Geraden liegen. O.

G. Fouret. Sur les courbes planes ou surfaces qui ont leurs propre polaire réciproque par rapport à une infinité de coniques ou surfaces du second ordre. Soc. Phil. (7) I. 42.

Siehe Abschnitt VIII. Cap. 5. C.

E. Dewulf. Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées. Première partie. Darboux Bull. (2) II. 41-48, 372-392.

Das Referat über diese Arbeit wird verschoben, bis dieselbe vollständig erschienen ist. Schl.

H. Milinowski. Die Abbildung von Kegelschnitten auf Kreisen. Borchardt J. LXXXVI. 108-115.

I. Der Ort des Centrums eines Kreises, der durch einen festen Punkt F geht und den um F' mit dem Radius $2a$ geschlagenen Kreis K' tangirt, ist ein Kegelschnitt K; das Bild eines Punktes A von K ist der Berührungspunkt A' des betreffenden Kreises mit K'. Es werden die Bilder der übrigen Punkte nachgewiesen, und es ergiebt sich eine centrische Collineation. Benutzt wird, wie es scheint, aber ohne Erwähnung, der doch nicht ganz elementare Satz — denn aus Sätzen der Kreislehre soll hierdurch die der Kegelschnitte abgeleitet werden —, dass die Kreise eines Büschels einen festen Kreis in einer Involution schneiden. Da auch die erhaltenen Resultate grösstentheils bekannt sind, so wäre eine genaue Angabe der vorausgesetzten Sätze erwünscht. Das letzte Alinea von S. 109 ist dem Referenten unverständlich geblieben, einige Betrachtungen sind nicht hinlänglich bewiesen; Polare ferner von G ist doch DE; wie können mithin als Schnitte derselben noch R, S eingeführt werden?

II. F sei der eine Brennpunkt eines Kegelschnittes K; A sei ein beliebiger Punkt; der Kreis über AF als Durchmesser schneidet den Kreis K' über der Hauptaxe von K als Durchmesser zweimal, und die Tangenten in diesen Schnitten an K' begegnen sich im Bilde A'.

III. K' sei derselbe Kreis, das Bild eines Punktes C von K, wenn K Ellipse ist, ist der Endpunkt der verlängerten Ordinate CL, wenn K Hyperbel ist, der Berührungspunkt C' der aus dem Fusspunkte L an K' geführten Tangente; dass $LC':LC = b:a$, ist längst bekannt (Salmon-Fiedler's Kegelschnitte, 4[te] Aufl. No. 240).

IV. Da der Mittelpunkt eines Kreises, der den einen K' von zwei festen Kreisen tangirt, den anderen rechtwinklig schneidet, gleichfalls einen Kegelschnitt beschreibt, so hat man eine weitere Abbildung, die auch den Fall der Parabel mit einschliesst: der Berührungspunkt ist wiederum Bild der Mittelpunktes.

Sm.

H. Milinowski. Synthetischer Beweis, dass jede ebene Curve dritter Ordnung durch einen Kegelschnittbüschel und einen ihm projectiven Strahlenbüschel erzeugt werden kann. Schlömich Z. XXIII. 327-336.

Herr Milinowski beginnt mit der Entwickelung der Polarentheorie der ebenen Curven 3[ter] Ordnung (oder reproducirt sie, wie es scheint, nach einem Tilsiter Programm 1872; cf. auch Schlömilch XX. 17; F. d. M. IV. 284; VII. 369); er geht von einer in drei Gerade a, b, c zerfallenden Curve aus, definirt für sie die gerade und die conische Polare eines Punktes und zeigt mit Hilfe der centrischen Collineation, dass, wenn eine Gerade l durch den Pol P das Dreieck a, b, c in R, S, T, die gerade Polare von P in P', die conische in P_1, P_2 schneidet, diese Punkte P', P_1, P_2 fest bleiben, wenn auch a, b, c um R, S, T gedreht werden, so dass er auf rein geometrische Weise die harmonischen Mittelpunkte 1[ten] und 2[ten] Grades von P in Bezug auf R, S, T erhält, wobei freilich zunächst R, S, T alle drei reell angenommen werden. Dann wird nach Cremona's Vorgange die Polarentheorie der cubischen Plancurve, das Netz der conischen Polaren und seine Hessische Curve abgeleitet.

Etwas unvermittelt wird plötzlich die Curve 3[ter] Ordnung nun als Tripelcurve eines Netzes von Kegelschnitten angenommen, und für sie nachgewiesen, dass sie durch einen Kegelschnittbüschel um 4 beliebige Punkte der Curve und einen projectiven Strahlbüschel erzeugt werden kann. Der Nachweis der Projectivität der 6 entsprechenden Paare, die er erhält, erscheint dem Referenten etwas bedenklich. Es ist ferner bei der Unvollständigkeit des Citats zweifelhaft, ob der Verfasser den Beweis der *zweiten*

Auflage der Steiner-Schröter'schen Vorlesungen — bei denen übrigens Steiner nicht als alleiniger Autor anzusehen ist — S. 516 kennt. Freilich wird dort der Nachweis der Identität zweier Curven 3[ter] Ordnung durch die Gemeinsamkeit von 11 Punkten geführt; womit, wie es scheint, Herr Milinowski sich nicht begnügt, sondern den Nachweis der Identität aller Punkte für nothwendig hält.

Der Gedankengang der drei letzten Seiten ist dem Referenten nicht klar geworden, das Ziel scheint zu sein (doch vergleiche man die Ueberschrift), darzuthun, dass jede Curve 3[ter] Ordnung Tripelcurve eines Kegelschnittnetzes sei; die Darstellung erschien dem Referenten nicht durchsichtig genug, und was vorausgesetzt wird, war ihm nicht immer klar; auch tritt die Eigenschaft der Curve, in drei Weisen Tripelcurve zu sein, an keiner Stelle hervor. Sm.

H. Milinowski. Berichtigung. Schlömilch Z. XXIII. 343-345.

Herr Milinowski berichtigt hier zwei fehlerhafte Beweise seines Aufsatzes: Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven 3[ter] Ordnung (Schlömilch Z. XXI. 427; F. d. M. VIII. 363), sowie einige Druckfehler. Sm.

E. Weyr. Die Curven dritter Ordnung als Involutionscurven. Prag. Ber. 1877. 131-133.

Die Involutionscurve einer auf einem Kegelschnitt C_2 befindlichen biquadratischen Tangenteninvolution ist eine Curve dritter Ordnung J_3, und umgekehrt kann jede ebene Curve dritter Ordnung als Involutionscurve einer biquadratischen Involution aufgefasst werden. Eine Tangenteninvolution vierter Ordnung auf dem Kegelschnitte C_2 ist durch zwei beliebig gewählte Gruppen vollkommen bestimmt. Die sechs Schnittpunkte der vier Tangenten jeder der beiden Gruppen sind Punkte der Involutionscurve. Verfasser zeigt nun, dass aus den beiden gegebenen Vierseiten auf einfache Weise weitere neun Vierseite und damit weitere 54 Punkte der Curve J_3 abzuleiten sind. Schl.

F. Folie. Eléments d'une théorie des faisceaux.
Brux., F. Hayez, 1878, 111 p. Königsberger Rep. X. 353-354.

Der Inhalt dieser Arbeit ist nach dem Verfasser:

Die wichtigsten, in diesem Werke enthaltenen Sätze sind folgende. Wir geben sie nur für die Curven dritter Ordnung an, obgleich sie in dem Werke bis auf die fünfte ausgedehnt sind und sich noch weiter ausdehnen lassen. Die correlativen Sätze für die Curven dritter Klasse wird man gleich aus den ersteren ableiten können.

Vermittelst dieser Sätze wird man eine, durch neun Punkte bestimmte Curve dritter Ordnung, sehr einfach beschreiben können. Die Auflösung ist jedoch in dem, ganz theoretischen, Werke nicht enthalten.

I. Pappus'scher Satz. Sind zwei conjugirte Dreiseite einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben (Siehe Fondements d'une géométrie supérieure Cartésienne, par F. Folie), so sind die Producte der Abstände eines beliebigen Punktes der Curve von den Seiten eines jeden Dreiseit analogisch (Ibid.).

II. Desargues'scher Satz. In demselben Falle schneidet eine beliebige Gerade die Curve und die Seiten der beiden Dreiseite in drei ternen Punkten der Involution.

III. Pascal'scher Satz. In einem Systeme von zwei einer Curve dritter Ordnung conjugirten Vierseiten begegnen sich die vier Paare entgegengesetzter Seiten in vier Punkten, welche auf derselben Geraden liegen.

IV. Satz. Wenn man drei mit drei, in beliebiger Ordnung, die Paare entgegengesetzter Seiten von zwei, einer Curve dritter Ordnung conjugirten Vierseiten zusammensetzt, so bekommt man ein Pascal'sches Hexagon.

V. Satz. In einem System von zwei einer Curve dritter Ordnung conjugirten n Seiten schneiden sich die Paare nicht adjacenter Seiten in $n(n-3)$ Punkten, welche auf einer Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

VI. Satz. Anharmonische Eigenschaft dritter Ordnung. Wenn man einen beliebigen Punkt einer Curve dritter Ordnung mit den Ecken von zwei derselben conjugirten Dreiseiten verbindet,

so ist das anharmonische Verhältniss des gebildeten Strahlbüschels constant; und dieses Verhältniss ist gleich demjenigen der Abstände zwischen den Durchschnittspunkten der Strahlen mit einer beliebigen Geraden.

Der Ausdruck dieses anharmonischen Verhältnisses dritter Ordnung ist folgender, wenn man die sechs Strahlen mit 1...6 und den Sinus der zwischen den Strahlen 1 und 2, u. s. w. enthaltenen Winkel mit (12) u. s. w. bezeichnet:

$$r_3 = \frac{(12).(34).(56)}{(61).(23).(45)},$$

welcher Ausdruck einfacher geschrieben wird:

$$r_3 = (123456).$$

VII. Satz. In demselben Falle, wie im Satze VI., ist auch das Verhältniss des Productes der Sinusse der im ersten Dreiseit, von seinen Seiten ab bis zu den anstossenden Strahlen gerechneten Winkel, mit dem Producte der Sinusse der in dem zweiten Dreiseit ebenso gerechneten Winkel eine constante Grösse.

VIII. Satz. Evolutorische Eigenschaft. Wenn ein vollständiges Vierseit einer Curve dritter Ordnung eingeschrieben ist, und man zieht durch drei beliebige Ecken desselben die Tangenten der Curve, so schneidet eine beliebige Gerade die Seiten der beiden durch diese drei Ecken und diese drei Tangenten bestimmten Dreiecke in 3 Paaren Punkten der Evolution;

das heisst, wenn diese 3 Paare Punkte mit 1..3, 1'..3 bezeichnet werden:

$$12'.23'.31' = +1'2.2'3.3'1.$$

Derselbe Satz gilt auch, wenn das eine Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben, und das andere durch seine Ecken umgeschrieben ist. — Ferner findet man in dem erwähnten Buche eine vorläufige Forschung über die Involution und das anharmonische Verhältniss dritter Ordnung, so z. B. den Ausdruck der ersteren mittelst des zweiten:

$$(11'21''31''').(12'22''32''').(13'23''33''') = -1, \quad \text{u. s. w.}$$

Mn.

J. Hammond, W. J. C. Sharpe, Casey, J. L. McKenzie. Solutions of a question (5563). Educ. Times XXIX. 52, 93-94.

Wenn von 2 Punkten einer Curve dritten Grades, die mit einem Inflexionspunkt in gerader Linie liegen, Tangenten gezogen werden, die die Curve noch einmal schneiden, so liegen ihre Schnittpunkte mit dem Inflexionspunkte wieder in einer Geraden. O.

Hirst, Townsend, F. D. Thomson. Solutions of a question (5753). Educ. Times XXX. 85-87.

In einem System von drei Linienpaaren in einer Ebene hüllen die Linien, die sie in Involution schneiden, eine Linie dritter Klasse ein, während der Ort der Doppelpunkte der Involution von der dritten Ordnung ist. Gehen drei der Linien (eine von jedem Paar) durch einen Punkt und die andern drei durch einen zweiten Punkt, so zerfällt die eine Curve in einen Kegelschnitt und eine Gerade, die andere in 3 Punkte.

O.

C. Le Paige. Sur quelques théorèmes de géométrie supérieure. Bull. de Belg. (2) XLV. 93-96.

Anwendung der Theorie des anharmonischen Verhältnisses beliebiger Ordnung auf die Theorie der ebenen Curven, speciell der Curven dritten und vierten Grades. Mn. (O.)

F. Folie. Deuxième note sur l'extension de la notion du rapport anharmonique. Bull. de Belg. (2) XLVI. 88-96.

Die Bedingungen dafür, dass drei Systeme dreier Punkte eine Involution dritter Ordnung bilden, werden mit Hülfe des anharmonischen Verhältnisses dritter Ordnung ausgedrückt. Analoge Eigenschaften für höhere Ordnungen. Mn. (O.)

C. Le Paige. Sur les points multiples des involutions supérieures. Bull. de Belg. (2) XLVI. 247-259.

Untersuchung der Doppelpunkte einer Involution dritter Ordnung und dritter Klasse. Mn. (O.)

Laguerre. Sur les courbes unicursales de troisième classe. Bull. S. M. F. VI. 54-57.

$ABCQ$ seien die Schnitte zweier Kegelschnitte K, H; P fest auf H, M beweglich auf K; der zweite Schnitt von MP mit H sei J; der von PJ mit K sei α, so umhüllt $M\alpha$ eine Curve dritter Klasse, die dadurch als unicursal erkannt wird, dass eine von den drei Tangenten durch jeden Punkt von K individuell bestimmt ist. Sie ändert sich nicht, wenn H durch einen andern Kegelschnitt von $(ABCQ)$ ersetzt wird. Sm.

L. Göring. Ueber eine geometrische Verwandtschaft achten Grades. Pr. Strassburg.

Werden 7 beliebig gewählte Punkte einer Ebene fest angenommen, so ist jedem achten Punkte x, der nicht mit einem dieser Punkte zusammenfällt, ein neunter Punkt y eindeutig zugeordnet durch die Bestimmung, dass diese 9 Punkte die Basispunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung sein sollen. Diese geometrische Verwandtschaft wird in der Arbeit näher untersucht. Durchläuft der Punkt x eine Gerade, so beschreibt der ihm zugeordnete Punkt y eine Curve achter Ordnung, welche die 7 festen Basispunkte zu dreifachen Punkten hat (cfr. Geiser. Borchardt J. LXVII). Im Allgemeinen liegt auf jeder Geraden u ein Paar entsprechender Punkte x und y. Die auf den Geraden eines Büschels befindlichen Paare zugeordneter Punkte liegen auf einer Curve dritter Ordnung, welche durch die Basispunkte und den Mittelpunkt des Büschels geht. Die Verbindungsgerade zweier entsprechenden Punkte umhüllt eine Curve dritter Klasse und vierter Ordnung, während der eine Punkt eine Gerade u beschreibt. Diese Gerade ist Doppeltangente der Curve und die

beiden auf u liegenden einander zugeordneten Punkte x und y sind die Berührungspunkte. Die weiteren Untersuchungen knüpfen an besondere Lagen der Basispunkte an. Schl.

H. MILINOWSKI. Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung. Schlömilch Z. XXIII. 85-107, 211-244.

In Fortsetzung seines früheren Aufsatzes über die ebenen Curven dritter Ordnung (Schlöm. Z. XXI. 427; F.d.M. VIII. 363) nimmt Herr Milinowski nun die ebenen Curven vierter Ordnung vor. Er geht aus von der Erzeugung der Curve durch zwei projective Kegelschnittbüschel und führt den Nachweis der vierten Ordnung des Erzeugnisses dadurch, dass er die ferneren Schnitte einer Geraden, die durch einen Schnittpunkt homologer Kegelschnitte geht, als Schnitte mit dem Erzeugnisse zweier projectiven Strahleninvolutionen in halbperspectiver Lage nachweist. Gegenüber dem bekannten Beweise des Herrn Härtenberger (Borchardt J. LVIII.), [dessen Arbeit, ebenso wie Olivier's Arbeiten (Borchardt J. LXX, LXXI; Schlömilch Z. XIV), dem Verfasser nicht bekannt zu sein scheint], bei welchem die beiden projectiven Involutionen, welche durch die Büschel auf einer Geraden entstehen, auf einen Kegelschnitt K projicirt zwei projective Strahlbüschel induciren, deren Erzeugniss in seinen Schnitten mit K sofort zum Resultat führt, ist dieser Beweis etwas umständlich.

Der Verfasser kommt dabei auf das Erzeugniss zweier projectiven Strahleninvolutionen in beliebiger Lage zu sprechen und bewegt sich, obgleich ihn Ref. schon F. d. M. VI. 371 darauf aufmerksam gemacht hat, noch in der irrigen Vorstellung, als ob jede Curve vierter Ordnung mit zwei (reellen) Doppelpunkten durch zwei projective Strahleninvolutionen erzeugt werden könne, oder was damit zusammenhängt, als ob bei einer Curve dritter Klasse auf zwei beliebigen Tangenten und nicht blos auf zwei conjugirten Tangenten durch die übrigen Tangenten projective Punktinvolutionen entstehen. Eine beliebige Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten kann wohl durch zwei Büschel erzeugt werden, die sich in zwei-zweideutiger Beziehung be-

finden, und man kann — bei gegebenen Scheiteln — der Beziehung die Bedingung auferlegen, dass entsprechende Strahlen nach acht gegebenen Punkten gehen; aber nicht jede zwei-zweideutige Beziehung ist eine projective Beziehung zweier Involutionen, und man kann bei zwei projectiven Involutionen um gegebene Scheitel nur von 7 Paaren von Strahlen, die zu entsprechenden Paaren der Involutionen gehören, verlangen, dass sie durch gegebene Punkte gehen.

Für zwei projective Strahleninvolutionen in allgemeiner, bez. halbperspectiver Lage findet nun der Verfasser, dass die Verbindungslinien der Schnitte homologer Strahlenpaare eine Curve vierter Klasse mit zwei Doppeltangenten, bez. eine Curve dritter Klasse K_3 umhüllen und sich schneiden in den Punkten eines Kegelschnitts, bez. einer Geraden. Die Berührung der vorliegenden Betrachtung mit Herrn Schröter's Aufsatz, Clebsch Ann. V., in dem z. B. S. 65 die eben erwähnte Gerade gefunden ist, wird nicht erwähnt.

Der Beweis S. 93, dass die durch zwei halbperspective projective Strahleninvolutionen erzeugte K^4 von der K_3 9 mal tangirt wird, ist dem Referenten nicht verständlich gewesen; von den ersten Polaren der Strahlen eines Büschels in Bezug auf K_3 berühren doch nicht 9 diese Curve; ebenso hat er den einen Beweis, dass jede durch zwei projective Kegelschnittbüschel erzeugte Curve noch auf unzählige Arten so erzeugt werden kann, nicht recht verstehen können, und gilt dies auch noch für manche andere Beweise. Es mag zum Theil daran liegen, dass er der Lectüre dieses Aufsatzes nicht hinreichend Zeit hat widmen können, zum Theil aber auch daran, dass der Verfasser die Beweise nicht gründlich genug durchdenkt oder ausführlich genug mittheilt. Da er sich nun einmal auf den principiellen Standpunkt stellt, rein geometrisch, ohne Entlehnungen aus der Algebra (also auch ohne Chasles' Correspondenzprinzip) zu operiren, so muss man genau wissen, was er voraussetzt; S. 93 wird vorausgesetzt — also gewiss nicht ohne Algebra —, dass zwei Curven 3ter und 5ter Klasse 15 Tangenten gemein haben, S. 101 aber ein Beweis dafür, dass eine Curve 4ter Ordnung mit einem Kegelschnitte 8 Punkte gemein hat, für nöthig erachtet, dabei aber doch das

Vorhandensein zweier dieser Punkte vorausgesetzt. Oft weiss man nicht recht, ob eine Behauptung noch bewiesen werden soll, oder nur als Corollar ausgesprochen ist; und für als blosse Corollare ausgesprochene Behauptungen wäre häufig noch ein ordentlicher Beweis erwünscht. Die Projectivitäts-Beweise sind mehrfach nur halb, indem nur das eine eindeutige Entsprechen dargethan ist, oder bedenklich; ein Beweis wie der auf S. 242 in der Polarentheorie würde Referenten nicht befriedigen: jedem Punkte der Curve 4ter Ordnung entspricht eine Curve 3ter Ordnung seine erste Polare; den 4 Schnitten A, B, C, D einer Geraden entsprechen 4 Curven $A^3, \ldots, D^3$ eines Büschels; hieraus allein folgert Milinowski, dass $A^3 \ldots D^3 \barwedge A \ldots D$.

Am Schlusse des ersten Theiles ergeben sich noch die Curven 6ter Klasse mit 3 Doppeltangenten, eingehüllt von den Geradenpaaren der Büschel, welche durch zwei homologe Kegelschnitte zweier projectiven Büschel constituirt werden, und die Curve 6ter Ordnung mit 6 Doppelpunkten, erzeugt durch die Doppelpunkte dieser Geradenpaare.

Der zweite Theil beginnt mit dem Erzeugnisse zweier projectiven Büschel 3ter und 1ter Ordnung $(A_1, \ldots A_8)$ und B. Auch hier wird ein ziemlich umständlicher Beweis der 4ten Ordnung gegeben; Referent besitzt dafür seit längerer Zeit folgenden auch wohl sonst bekannten Beweis: Jede Curve C^3 des Büschels 3ter Ordnung $(A_1, \ldots A_8)$ besitzt auf dem Kegelschnitte S durch $A_5, \ldots A_8$ einen Punkt als Gegenpunkt G zu $A_1, \ldots A_4$; den Büschel um G und den Büschel $(A_1, \ldots A_4)$ schneidet man mit einer Geraden l und projicirt die Schnitte aus einem Punkte V von S auf diesen Kegelschnitt: man erhält zwei projective Büschel um V und um das Centrum der Projection der Involution; beide erzeugen einen Kegelschnitt C^2, dessen drei weitere Schnitte mit S ausser V aus V auf l projicirt die 3 Schnitte (C^3, l) geben. Verändert sich C^3, so entsteht ein zum Curvenbüschel der C_3 projectiver Büschel von Kegelschnitten C^2, der also auch mit dem Büschel projectiv ist, welcher aus V den Schnitt von l mit dem Strahlbüschel B projicirt. Die Curve 3ter Ordnung, welche beide erzeugen, schneidet S ausser im Doppelpunkte V noch in vier Punkten, deren Projectionen aus V auf l die Schnitte der Geraden l mit der er-

zeugten Curve sind. Auch jedem Kegelschnitte K^2 von $(A_1, \dots A_4)$ entspricht ein Punkt W auf S, und der Büschel der Strahlen von W nach den verschiedenen Punkten G ist dem Curvenbüschel $(A_1, \dots A_9)$ und also auch dem gegebenen Strahlbüschel B projectiv und erzeugt mit ihm einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$; verändert sich K^2, so bilden die $\mathfrak{K}^2$ einen mit $(A_1, \dots A_4)$ projectiven Büschel, und jede zwei entsprechende Elemente der Büschel K^2 und $\mathfrak{K}^2$ schneiden sich in Punkten, durch die auch entsprechende Elemente von $(A_1, \dots A_9)$ und B gehen; womit in einfacherer Weise, als es durch Herrn Milinowski geschieht, die Identität des jetzigen Erzeugnisses mit dem früheren nachgewiesen ist.

Herr Milinowski zeigt dann wiederum, dass jede Curve, die auf die jetzige Weise entsteht, auch auf unzählige Weisen so entstehen kann, giebt eine Reihe von Sätzen über ein oder zwei cubische Büschel, entwickelt auf nicht uninteressante Weise das Netz von Curven 3ter Ordnung und geht zur Construction der Curve 4ter Ordnung aus 14 Punkten über; doch wäre hier grössere Ausführlichkeit sehr erwünscht gewesen, und sind manche Beweise dem Referenten nicht völlig klar geworden. Jonquières' Arbeit: Essai sur la génération des courbes algébriques etc. (Mém. prés. par divers savants Bd. 16) scheint dem Verfasser nicht bekannt zu sein. Da sich übrigens bei 2 Gruppen von je 7 Punkten 3 Paare von Punkten finden lassen, die nach jenen projective Büschel senden, so dürfte auch folgende Fassung des Problems zum Ziele führen: $A_1 \dots A_7$, $B_1 \dots B_7$ sind gegeben; es werden X, Y, Z gesucht, so dass

$$(A_1 \dots A_7 XY)(B_1, \dots B_7) \barwedge Z(B_1, \dots B_7),$$

(cf. Jonquières a. a. O. und Bischoff, Annali di mat. (2) VI. 145).

Sodann wendet sich der Verfasser zur Betrachtung der Büschel und Netze von Curven 4ter Ordnung und zur Erzeugung von Curven 5ter und 6ter Ordnung.

Den Schluss bildet die Polarentheorie der Curve 4ter Ordnung. Jeder Punkt A der Curve kann Scheitel eines Büschels sein, der mit einem projectiven cubischen Büschel die Curve erzeugt: die conischen Polaren von A nach dessen Curven bilden einen neuen Büschel, welcher mit dem Büschel A die cubische Polare von A nach der Curve 4ter Ordnung erzeugt. Der Beweis für die ge-

mischte Polare zweier Curvenpunkte wird nach Cremona erbracht, dann mit Hilfe des schon oben erwähnten Schlusses die cubische Polare eines beliebigen Punktes gewonnen. Sm.

S. Kantor. Die Tangentengeometrie an der Steiner'schen Hypocycloide. Wien. Ber. 1878.

Der Verfasser ist durch seine Untersuchungen über Gruppen von Punkten auf einem Kreise auch zu der Beschäftigung mit der Steiner'schen Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten veranlasst und zu einer so ergiebigen Betrachtungsweise hingeführt worden, dass er, von der Steiner'schen Erzeugungsweise ausgehend, eine Reihe neuer und wichtiger Eigenschaften dieser Curve aufgefunden hat, welche in der vorliegenden Abhandlung veröffentlicht werden. Schl.

Laguerre. Sur la cardioïde. Nouv. Ann. (2) XVII. 55-69.

Die Eigenschaften der Cardioide werden hier durch Specialisirung von fundamentalen Eigenschaften der Curven 3[ter] Klasse gewonnen; und zwar betreffen die letzteren Eigenschaften die drei Brennpunkte, welche bei der Cardioide sich in einem vereinigen. Ausserdem findet man mehrere Erzeugungsweisen der Cardioide angegeben und vielfach wohl noch nicht bekannte Sätze, welche Tangenten, Normalen und metrische Relationen betreffen. Mz.

Clasen. Ueber die durch Kreise mit gemeinsamem Schnittpunkt erzeugten Gebilde. Pr. Holzminden.

Nachdem der Verfasser in den ersten Seiten der Abhandlung für die zu untersuchenden Gebilde die Beziehungen und Gesetze der Circularinversion hergeleitet hat, geht er zu der Betrachtung der inversen Curven der Kegelschnitte über. Zwei projectivischen Strahlenbüscheln entsprechen zwei projectivische Kreisbüschel mit dem gemeinsamen Basispunkte P. Die durch letztere er-

zeugten Gebilde sind deshalb invers zu den Kegelschnitten. Der Fall, dass das Centrum der Inversion mit einem der Mittelpunkte der Strahlenbüschel zusammenfällt, wird vorläufig ausgeschlossen. Die Kegelschnittinversen sind bicirculare Curven vierter Ordnung und sechster Klasse, für welche der gemeinschaftliche Basispunkt P Doppelpunkt ist. Entsprechend den drei Gattungen der Kegelschnitte werden drei Gattungen der inversen Curven unterschieden; entweder ist der Doppelpunkt P ein Knotenpunkt, eine Spitze oder ein isolirter Punkt. Der Brianchon'sche und andere Sätze über Kegelschnitte lassen sich auf die inversen Curven übertragen. Aus der analytischen Form der Gleichung der Kegelschnittinversen ist ersichtlich, dass z. B. die Pascal'sche Schnecke, die Cardioide und die Lemniscate zu denselben gehören. Eine zweite Art der Inversen entsteht aus der Verbindung eines Kreisbüschels mit einem ihm projectivischen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt einer der Basispunkte des ersteren ist. Diese Combination ist das inverse Gebilde zweier projectivischer Strahlenbüschel unter der Voraussetzung, dass das Centrum der Inversion in einem der beiden Mittelpunkte angenommen wird. Die Kegelschnittsinversen der zweiten Art sind circulare Curven dritter Ordnung mit einem reellen Doppelpunkte. Die Cissoide z. B. gehört hierzu; sie ist die Inverse der Parabel, wenn der Scheitel der Parabel zum Centrum der Inversion genommen wird. Schl.

B. Räumliche Gebilde.

J. Lüroth. Ueber cyclisch-projective Punktgruppen in der Ebene und im Raume. Clebsch Ann. XIII. 305-319.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5A. p. 378.

E. Dewulf. Démonstration d'un théorème de la théorie des figures homographiques dans l'espace. Nouv. Ann. (2) XVII. 265-268.

Die projectiven Büschel um zwei entsprechende Gerade α, α' der beiden homographischen (collinearen) Räume erzeugen ein Hyperboloid, das zugleich durch die projectiven Punktreihen auf α, α' entsteht. Sind a_1, a_2, a_3 drei Gerade eines Büschels in α um A, a'_1, a'_2 a'_3 ihnen entsprechend (in α' um A'), so haben die Hyperboloide $[a_1 a'_1]$ und $[a_2 a'_2]$ ausser $\alpha\alpha'$, AA' noch zwei Gerade p, q gemein, deren Schnitte mit $[a_3 a'_3]$ die 4 sich selbst entsprechenden Punkte der beiden Räume sind. Wie kann aber der Verfasser behaupten, dass, weil $\alpha\alpha'$, AA' reell sind, auch p, q reell sein müssen? (Cf. Steiner's System. Entw. p. 246).

Sm.

J. M. de Tilly. Sur la résolution des problèmes qui exigent des constructions dans l'espace, avec la règle et le compas. N. C. M. IV. 272-278.

Principien. I. Wenn eine Figur von drei Dimensionen gegeben ist, kann man auf derselben soviel Punkte, wie man will, finden, die ein und derselben Ebene angehören, indem man von zwei beliebigen Punkten als Mittelpunkten zwei sphärische Curven, mit demselben Radius, beschreibt, die sich auf der gegebenen Figur schneiden, und diese Construction beliebig oft wiederholt. Alle so erhaltenen Schnittpunkte gehören derselben Ebene an. Es genügen aber drei solcher Punkte, um eine Ebene, fünf, um einen Kegelschnitt zu bestimmen. II. Um einen beliebigen Punkt O der Figur auf eine durch die drei Punkte DEF bestimmte Ebene zu projiciren, beschreibe man in der Ebene DEF oder in einer Ebene, auf die das Dreieck DEF übertragen ist, drei Kreise, die diese drei Punkte zu Mittelpunkten und die Entfernungen DO, EO, FO zu Radien haben. Der einzige Schnittpunkt (centre radical) der drei gemeinsamen Ebenen ist die Projection von O auf DEF.

Anwendungen. I. (Constructions faites au moyen d'un seul plan de projection). 1) Gegeben eine feste Kugel, zu finden ihren Radius. Eine beliebige nach dem Princip I. bestimmte Ebene ist die eines grössten Kreises. 2) Gegeben ein unbegrenzter

Cylinder zweiten Grades, zu construiren eine Erzeugende, die durch einen auf der Oberfläche liegenden Punkt geht. Man construirt auf einer und derselben Ebene die Projection zweier Systeme von fünf Punkten, die zwei Ebenen und dem Cylinder angehören. Diese beiden Systeme bestimmen zwei Kegelschnitte. Die Linie, welche die Projectionen der Mittelpunkte verbindet, ist parallel $M'M''$, der Projection der Generatrix, die durch M geht. Man kann auch $M'M''$ und den Schnitt mit der Projection eines der Kegelschnitte, parallel zu $M'M''$ und durch M gehend, construiren. 3) Gegeben ein Kegelstumpf zweiten Grades, mit parallelen Grundflächen, zu construiren die Generatrix, die durch einen Punkt M auf der Oberfläche geht. Man construirt die eine der Grundflächencurven auf einer Ebene, die Projection der anderen auf diese Ebene und sucht ihre Mittelpunkte (oder Scheitel, wenn es Parabeln sind). Die Verbindungsgerade dieser Punkte enthält die Spitze der conischen Fläche. Durch die Mittelpunkte (oder Scheitel) zieht man in den Projectionen der Grundflächen zwei Parallele und verbindet ihre Schnittpunkte mit den Kegelschnitten durch eine zweite Gerade, welche ebenfalls die Spitze enthält. Ist aber die Projection der Spitze bekannt, so ist alles übrige bekannt. II. (Constructions faites avec deux plans de projection). Hülfsproblem: Beliebig viel Punkte einer im Riss dargestellten Ebene auf die als Fläche zweiten Grades vorausgesetzte Figur im Raum zurück zu verlegen. Man setzt voraus, dass man zwei Projectionsebenen hat, deren Lage in der Figur bekannt ist. Man macht in dem Körper zweiten Grades drei ebene Schnitte und stellt die Schnittkegelschnitte durch fünf Punkte im Riss dar, den Schnitt der drei Ebenen mit der gegebenen Ebene (mit Hülfe der Spur) nach drei Geraden, den Schnitt dieser drei Geraden mit den Kegelschnitten. Dann lassen sich die sechs gefundenen Punkte leicht in den Raum zurück verlegen. 1) Gegeben ein Theil einer developpabeln Oberfläche zweiten Grades, zu construiren eine Generatrix. Man construirt zwei Kegelschnitte der Fläche mit parallelen Ebenen. 2) Gegeben ein festes Rotationsellipsoid, zu finden die Grösse seiner Axen und die Lage seiner Scheitel. Man construire zwei parallele Schnitte, ihre Mittelpunkte, die Verbindungsgerade derselben, die Schnitte mit der Oberfläche,

den Mittelpunkt derselben, eine ihr concentrische Kugel, die durch einen Punkt der Oberfläche geht, und suche die neun Schnittpunkte der Kugel mit der Oberfläche unter Benutzung von Hülfsebenen, die durch den Mittelpunkt gehen. Fünf der Schnittpunkte mindestens werden in einer Ebene liegen, ziehe dann eine Senkrechte zu der Ebene durch den Mittelpunkt u. s. f. 3) Gegeben ein Theil eines einschaligen Rotationshyperboloides, zu finden die Grösse seiner Axen, die Lage seiner Scheitel und die Generatrices durch einen gegebenen Punkt zu construiren. Der erste Theil der Construction erledigt sich wie in 2). Für das Weitere construirt man den Scheitelkreis und verfährt dann wie gewöhnlich.

Mn. (O.)

F. Maglioli. Sulla teoria delle quadriche omofocali dal punto di vista sintetico. Battaglini G. XVI. 305-340.

In der vorliegenden Monographie sind die wichtigsten Chasles-schen Sätze über confocale Flächen zweiten Grades (cf. Chasles, Aperçu historique p. 387 ff.) auf rein synthetischem Wege bewiesen. Die Sätze über allgemeine Büschel und Schaaren der Flächen zweiter Ordnung, auf welche in den Beweisen Bezug genommen wird, sind den einzelnen Abschnitten vorausgeschickt. Der zweite Theil der Arbeit behandelt hauptsächlich die Polareigenschaften der confocalen Flächen. Schl.

C. Juel. Nogle elementär-geometriske Beviser. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 4-13.

Nebst elementar-synthetischen Beweisen für die Sätze von Newton und Carnot giebt der Verfasser in diesem Aufsatze eine Reihe von Sätzen über Flächen der zweiten Ordnung (insbesondere Umdrehungsflächen), mit einfachen Beweisen versehen. Als Beispiel diene der folgende Satz: Wenn die Axe einer Umdrehungsfläche der zweiten Ordnung die Brennpunkte enthält, wird ein ebener Schnitt, von einem der Brennpunkte gesehen, durch eine Umdrehungskegelfläche projicirt werden. Gm.

O. Hesse. Ueber Sechsecke im Raume. (Aus den hinterlassenen Papieren von O. Hesse mitgetheilt durch Herrn S. Gundelfinger.) Borchardt J. LXXXV. 304-317.

Nachdem Hesse in dieser hinterlassenen Arbeit zuerst analytisch bewiesen, dass jedes Brianchon'sche Sechseck im Raume auf einem Hyperboloide liege und umgekehrt jedes Sechseck auf einer solchen Fläche ein Brianchon'sches sei, betrachtet er ein beliebiges Sechseck und zeigt, wie sich aus ihm mit Hilfe eines willkürlichen Punktes ein ihm eingeschriebenes Brianchon'sches Sechseck erzeugen lasse, welches selbst wieder durch ein Hyperboloid ein neues derartiges Sechseck liefere, das auch dem ursprünglichen eingeschrieben ist. Den Schluss bilden Anmerkungen vom Herausgeber zu der Arbeit, die offenbar der linearen Bestimmung des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiter Ordnung aus den sieben andern dienen sollte. Lth.

H. Schröter. Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Borchardt J. LXXXV. 26-79.

Dies besondere einfache (einmantelige) Hyperboloid ist dasjenige, bei dem die Kreisschnitt- oder cyclischen Ebenen je einer Geraden der Fläche zu einander senkrecht sind. Steiner hat mehrfach (Crelle J. II. 29; System. Entw. p. 218, 232) auf dasselbe aufmerksam gemacht. Dass andererseits die Punkte, deren Entfernungen von zwei windschiefen Geraden ein constantes Verhältniss haben, ein einmanteliges Hyperboloid erzeugen, hat Chasles analytisch nachgewiesen (Liouville J. 1836 p. 324), neuerdings auch Schönfliess (Inaug. Diss. Berlin 1877) synthetisch mit Hilfe des Satzes, dass die Strahlen, welche an zwei windschiefen Geraden parallel den Kanten eines Kegels zweiten Grades hingleiten, ein Hyperboloid erzeugen.

Eine weitere analytische Behandlung giebt Schönfliess in Schlöm. J. XXIII. 245, 269, die mit der Schröter'schen Abhandlung gleichzeitig ist. Er fand schon in seiner Dissertation, dass die beiden Geraden, von denen die Entfernungen gemessen wer-

den, reciproke Polaren in Bezug auf das Hyperboloid sind. Herr Schröter — der eine vorläufige Mittheilung in den Monatsberichten der Berliner Akademie Oct. 1877 gemacht (s. F. d. M. IX. 553) – untersucht nun diese Fläche eingehend synthetisch; er fügt noch die Eigenschaft hinzu, dass die Involutionen conjugirter Ebenen um jene Geraden circular sind.

Er betrachtet — wie Herr Schönfliess — zuerst den Specialfall des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, beweist zuerst, dass die Punkte, welche von zwei windschiefen Geraden s, s_1 gleiche Entfernung haben, ein solches Paraboloid erzeugen, für welches das gemeinsame Loth von s, s_1 Axe und die Mitte zwischen den beiden Fusspunkten Scheitel ist, dass s, s_1 reciproke Polaren sind (Herr Schröter sagt: „conjugirte Strahlen"; doch zwei conjugirte Elemente sind solche, von denen jedes mit dem polaren des andern incident ist: so bei Punkten und Ebenen, also wohl auch bei Strahlen) und die conjugirten Ebenen um sie circulare (orthogonale) Involutionen bilden; darauf umgekehrt weist er für jedes gleichseitige hyperbolische Paraboloid Geradenpaare s, s_1 nach, von denen die Punkte der Fläche gleiche Entfernungen haben, zunächst als besonders interessanten Fall die beiden Leitlinien der Hauptparabeln, von denen jede durch den Brennpunkt der andern Parabel geht, sodann allgemeiner: Man wähle auf der Axe in gleicher Entfernung δ vom Scheitel, aber zwischen den Brennpunkten der Hauptparabeln — deren Abstand 2λ sei — zwei Punkte, construire die Hyperbeln in den Ebenen, welche in diesen Punkten zur Axe normal sind; diese beiden Hyperbeln haben parallele Asymptoten, liegen jedoch in verschiedenen Asymptotenwinkeln. In der einen ziehe man einen Halbmesser von der Länge 2λ, der stets vorhanden ist, dann seinen conjugirten in derselben Hyperbel und seinen parallelen bei der andern; letztere beide sind Gerade s, s_1.

Herr Schönfliess zeigt, in dem Aufsatze in Schlömilch's Zeitschrift, dass diese Geradenpaare eine Regelfläche dritten Grades erzeugen; ihre genauere Beziehung zum Paraboloid giebt er nicht an, dies geschieht durch Herrn Schröter.

Herr Schröter wendet sich sodann zum Hyperboloide; er

erzeugt dasselbe zunächst durch zwei projective Büschel, deren entsprechende Ebenen zu einander senkrecht sind; er nennt es deshalb orthogonales Hyperboloid (in den Monatsberichten: kreisverwandtes). Unmittelbar aus dieser Erzeugung folgt, dass die cyclischen Ebenen zu den beiden Axen der Büschel (und zu deren Parallelen in der andern Schaar) senkrecht sind. Für die Halbaxen ergiebt sich die — auch von Schönfliess gefundene — interessante Relation $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$, worin $2a$ die Axe ist, zu der die cyclischen Ebenen parallel sind.

Dies ist *eine* Bedingung und beweist also, dass das Senkrechtstehen der beiden Arten cyclischer Ebenen auf zwei Geraden stets zugleich eintreten muss; den directen Beweis dafür bringt die Abhandlung nicht: er beruht darauf, dass, wenn von zwei Kegelschnitten der eine durch den Pol der einen Geraden eines Geradenpaars ihres Büschels in Bezug auf den andern Kegelschnitt geht, er auch den Pol der zweiten Geraden enthält. Die Geraden, welche senkrecht zu den cyclischen Ebenen, also auch zu $2a$ sind, gehen durch die Endpunkte dieser Axe. Herr Fiedler macht, veranlasst durch die vorliegende Abhandlung des Herrn Schröter, in einem Aufsatze der Vierteljahresschrift der Naturforscher-Gesellschaft zu Zürich einige Zusätze, so: dass es unendlich viele Paare von Geraden in jeder Schaar der Fläche giebt, deren Ebenenbüschel gleichwinklig sind, darunter die Geraden durch die Endpunkte der zweiten reell schneidenden Axe.

Darauf fragt Herr Schröter nach dem Orte der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen windschiefen Geraden s, s_1 ein constantes Verhältniss μ haben: es werden zunächst 4 leicht zu findende Gerade l, l_1, g, g_1 ($l \| g$, $l_1 \| g_1$), welche solche Punkte enthalten, nachgewiesen; dann das orthogonale Hyperboloid aus den Axen l, l_1 (welches auch g, g_1 enthält) construirt und für jede erzeugende Gerade g_x gezeigt, dass $\sin(g_x s) : \sin(g_x s_1) = \mu$ ist, und von diesem Hyperboloide bewiesen, dass es der gesuchte Ort ist. Umgekehrt nun, wenn ein orthogonales Hyperboloid gegeben ist, so handelt es sich um Auffindung solcher Geraden s, s_1, von denen die Punkte der Fläche ein constantes Abstands-

verhältniss haben. Ein ausgezeichnetes Paar erhält man in den beiden Leitlinien der durch die Axe $2a$ gehenden Hauptschnitte, welche zu Brennpunkten f, f_1 gehören, die demselben Scheitel p von $2a$ benachbart sind; dieselben gehen bez. durch f_1, f. Weitere ergeben sich so: Es seien o der Mittelpunkt der Fläche, p_1 der andere Scheitel von $2a$, F, F_1 die beiden andern Brennpunkte auf $2a$; man suche auf der Axe $2a$ zwei Punkte d, d_1, welche beide innerhalb ff_1 (oder FF_1) liegen und so harmonisch zu p, p_1 sind, dass $\frac{od}{op} = \frac{op_1}{od_1} = \mu$; sodann construire man bei einer der beiden Hyperbeln, welche von den durch p, p_1 senkrecht zur Axe $2a$ gelegten Ebenen ausgeschnitten werden, einen Halbmesser gleich $2\lambda\mu$, wo $2\lambda = ff_1 = FF_1 = \frac{bc}{a}$ ist, darauf seinen conjugirten Durchmesser in derselben und seinen parallelen in der andern Hyperbel. Diese beiden letzteren Geraden sind zwei Gerade s, s_1, von denen die Punkte der Fläche das Entfernungsverhältniss μ haben. Jedes Punktenpaar d, d_1 liefert 2 Geradenpaare s, s_1, die symmetrisch zu o liegenden Punkte zwei andere. Man erhält so eine einfache Unendlichkeit von je 4 Geradenpaaren (der Verfasser sagt, wohl nicht dem üblichen Sprachgebrauch entsprechend: eine vierfache Unendlichkeit); dass dieselben eine Regelfläche achten Grades erzeugen, ist von Herrn Schönfliess analytisch bewiesen, während die eben besprochenen Beziehungen zur Fläche nur von Herrn Schröter gefunden sind.

Von zwei solchen Geraden s, s_1 wird nun gezeigt, dass sie reciproke Polaren in Bezug auf die Fläche und Träger orthogonaler Involutionen conjugirter Ebenen sind.

Zuletzt wird diese Eigenschaft bei den beiden Geraden s, s_1 vorausgesetzt und nachgewiesen, dass die zugehörige Fläche dann ein orthogonales Hyperboloid ist und ihre Punkte constantes Entfernungsverhältniss von s, s_1 haben. Doch muss dieses Verhältniss erst gegeben werden, weil den anderen Bedingungen ein ganzer Büschel von Flächen mit einem imaginären Vierseit als Grundcurve genügt. So ist nun der Cyclus vollendet und dargethan, dass die Eigenschaften der Normalität der cyclischen

Ebenen zu zwei Geraden der Fläche, des constanten Abstandsverhältnisses und der orthogonalen Involutionen conjugirter Ebenen um reciproke Polaren sich gegenseitig bedingen. Definirt man als orthogonales Hyperboloid etwas allgemeiner ein solches, dessen cyclische Ebenen auf zwei Kanten des Asymptotenkegels senkrecht sind, so umfasst man auch die zweimanteligen mit: Jedes zweimantelige Hyperboloid ist ein orthogonales, wenn das conjugirte die in der besprochenen Abhandlung geschilderten Eigenschaften hat. Analog ist die Definition des gleichseitigen ein- oder zweimanteligen Hyperboloids (hinsichtlich des ersteren cf. H. Vogt, Borchardt J. LXXXVI. 297) die, dass die zu den Kanten des Asymptotenkegels senkrechten Ebenen gleichseitige Hyperbeln ausschneiden. Sm.

H. Milinowski. Beweis eines Satzes von den Oberflächen zweiter Ordnung. Borchardt J. LXXXV. 88.

Veranlasst durch die Mittheilung des Herrn Schröter in den Monatsberichten der Berliner Akademie (cf. voriges Referat), hat auch Herr Milinowski, ehe Herrn Schröter's ausführliche Abhandlung erschien, die Frage vorgenommen und giebt einen einfachen Beweis, dass in Bezug auf die Fläche der Punkte, welche constantes Abstandsverhältniss von zwei windschiefen Geraden l, l' haben (deren Ordnung 2 hier als bekannt vorausgesetzt wird), jeder Punkt A' von l' zur Polarebene die durch l gehende Ebene hat, die zur Ebene lA' normal ist, woraus folgt, dass l, l' reciproke Polaren sind und orthogonale Involutionen conjugirter Ebenen tragen. Sm.

J. M. de Tilly. Construire la génératrice d'un cylindre de révolution, indéfini, qui passe par un point pris sur cette surface. N. C. M. III. 126.

Von K und L als Mittelpunkten beschreibe man mit 3 Radien r_1, r_2, r_3 6 sphärische Curven, die sich in 6 Punkten C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3 schneiden, welche in der im Mittelpunkte von KL senk-

recht zu Kl errichteten Ebene liegen. Diese 6 Punkte gehören zu einer Ellipse, die man construiren kann und deren kleine Axe der Durchmesser des Cylinders ist. Die Lage CD dieser kleinen Axe auf dem Cylinder kann man finden. Beschreibt man von C und D als Mittelpunkten sphärische Curven, die durch A gehen, so schneiden sich diese in einem zweiten Punkte A', der auf der geforderten Generatrix liegt. Mn. (O.)

J. Petersen. Nogle Sätninger om Flader af anden Orden. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 107-108.

Es seien gegeben drei Kegelschnitte im Raume, welche sich paarweise in je zwei Punkten schneiden. Durch alle diese Kegelschnitte kann immer eine Fläche der zweiten Ordnung gelegt werden. Drei Flächen, welche durch je zwei Curven gehen, schneiden sich wiederum in drei neuen Kegelschnitten, die durch die nämlichen drei Punkte gehen. Endlich werden die sechs Kegelflächen, welche durch je zwei solcher Kegelschnitte bestimmt werden, ihre Spitzen in den Ecken eines ebenen vollständigen Vierseits haben. Gm.

F. Czuber. Kegelflächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe. Grunert Arch. LXI. 351-358.

Es handelt sich um die Construction des ferneren Durchschnittes zweier Kegelflächen, die durch denselben Kegelschnitt gelegt sind. Mit den Mitteln der descriptiven Geometrie wird dies geleistet; ferner werden dahin gehörige Sätze und Aufgaben behandelt. Mz.

Sautreaux-Félix. Démonstration de deux théorèmes analogues en géométrie de l'espace à celui de Pascal en géométrie plane. Bull. de Belg. (2) XLV. 426-430.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire et addition. Bull. de Belg. (2) XLV. 370-371, XLVI. 14-17.

Ein bekannter Satz in neuer Form: Wenn man eine Ober-

fläche zweiten Grades und eine beliebige dreiseitige Ecke betrachtet, so liegt jede der Kanten *SA* der Ecke in derselben Ebene mit dem zweiten Schnittkegelschnitt zweier Kegel, die zur ersten ebenen gemeinsamen Curve den Schnitt haben, der in der Oberfläche entsteht durch die der Kante *SA* gegenüberliegende Seite α der Ecke. Ausserdem geht jeder Kegel durch einen der Schnittkegelschnitte der beiden Seiten β, γ der Ecke mit der Oberfläche. Mn. (O.)

R. Mehmke. Einige Eigenschaften der ebenen und sphärischen Kegelschnitte. Schlömilch Z. XXIII. 255-260.

Es werden mehrere Sätze angegeben, welche die grosse Analogie, die zwischen den ebenen und sphärischen Kegelschnitten besteht, veranschaulichen. Der Pol einer Geraden u in Bezug auf den Kegelschnitt K sei U; man denke sich ferner die Involution, welche auf u durch diejenigen Punktepaare, die in Bezug auf K conjugirt sind, gebildet wird; diese Involution sei elliptisch, so dass es zwei zu u symmetrisch gelegene Punkte M und M' giebt, von welchen aus jene Involution durch zwei rechtwinklige involutorische Strahlenbüschel projicirt wird. Ganz Entsprechendes hat man auf der Kugelfläche, indem nur an Stelle der Geraden der grösste Kreis auf der Kugel gesetzt wird. Die angeführten Sätze beziehen sich nun auf metrische Verhältnisse, wobei Strecken in der Ebene durch trigonometrische Functionen der Bogen auf der Kugel ersetzt werden. Mz.

L. Cremona. Ueber die Polarhexaeder bei den Flächen dritter Ordnung. Clebsch Ann. XIII. 301-303.

Während bisher ein Zusammenhang zwischen den Geraden einer Fläche dritter Ordnung und dem Pentaeder derselben nicht bekannt war, zeigt hier Cremona, wie man aus 15 von den 27 Geraden ein Polarhexaeder construiren kann, und wie aus zwei solchen Hexaedern die Ebenen des Pentaeders gefunden werden können. Lth.

H. M. Jeffery. On a cubic surface referred to a pentad of cotangential points. Rep. Brit. Ass. 1878.

Eine Oberfläche dritten Grades kann man sich entstanden denken als den Ort der Doppelpunkte von Involutionen aller Transversalen, die, von einem festen Punkt ausgehend, ein System von Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, die sich in einer Schraubenfläche vierter Ordnung schneiden. Es ist das eine Erweiterung der Cremona'schen Methode zur Erzeugung ebener Curven dritten Grades auf den Raum. Csy. (O.)

P. Zeeman. De kromme lijnen van de derde orde in de ruimte. Diss. Leiden.

Auf rein geometrischem Wege werden in dieser Dissertation die Haupteigenschaften der Curven dritter Ordnung im Raume behandelt. Die Erzeugungsweise dieser Curven geschieht nach Chasles durch drei projectivische Flächenbüschel der ersten Ordnung. Weiter wird eine Uebersicht ihrer hauptsächlichsten Eigenschaften gegeben; die meisten derselben werden auf ganz neue Art abgeleitet.

Im ersten Capitel werden die Haupteigenschaften der Curven dritter Ordnung auf projectivischem Wege bewiesen, im zweiten die Oberflächen betrachtet, welche durch eine Curve dritter Ordnung gehen, und sodann die Büschel dieser Curven einer näheren Betrachtung unterworfen. Im dritten und letzten werden conjugirte Punkte und Flächen behandelt, wobei die Beziehungen zwischen Pol, Polfläche und Polare eingeführt werden. Die reiche Literatur dieses Gegenstandes wird geschichtlich und kritisch ziemlich vollständig hinzugefügt. G.

Th. Reye. Ueber die Kummersche Configuration von sechszehn Punkten und sechszehn Ebenen. Borchardt J. LXXXVI. 209-213.

Die Configuration, welche aus den Knotenpunkten und sin-

gulären Ebenen der Kummer'schen Fläche besteht, wird hier construirt, indem von einem beliebigen Sechseck im Raume ausgegangen wird. Dabei werden bei dem rein synthetischen Verfahren keine Eigenschaften der Kummer'schen Fläche vorausgesetzt, sondern diese erst aus der Construction abgeleitet.

Lth.

Th. Reye. Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten. Borchardt J. LXXXVI. 84-107.

Wie Herr Reye bereits früher in seiner Geometrie der Lage gezeigt hatte, kann man den Flächen eines F^2 Gebüsches ein projectives räumliches Ebenensystem so zuordnen, dass jeder F^2 eine Ebene, jedem F^2-Büschel eine Gerade, jedem F^2-Bündel mit der aus 8 „associirten“ Punkten gebildeten Basis ein Punkt entspricht. Vermöge dieser Correspondenz gehört zu jeder Geraden, welche zwei associirte Punkte verbindet, einem Hauptstrahle, eine projective Gerade; zu jeder anderen Geraden ein Kegelschnitt, zu jeder Ebene eine Steiner'sche Fläche. Die Spitzen der Kegelflächen des Gebüsches bilden die Kernfläche 4ter Ordnung K^4, deren Punkten eindeutig die Berührungsebenen einer Fläche vierter Klasse Φ^4 entsprechen. Die Doppeltangenten der Φ^4, welche den Hauptstrahlen entsprechen, bilden ein Strahlensystem S von der 28ten Ordnung und 12ten Klasse. Gehen sämmtliche F^2 des Gebüsches durch n Punkte, so ist jede Gerade durch einen derselben ein Hauptstrahl; mithin entspricht dem Strahlenbündel durch einen derselben ein reducibler Theil von S, welcher $8-n^{ter}$ Ordnung, 2ter Klasse ist. Je nachdem man nun $n = 1, 2 \dots 6$ setzt, erhält man die reciproken Gebilde der von Herrn Kummer zuerst behandelten Strahlensysteme, mit Ausnahme des von der sechsten Klasse erster Art. Auch bei der liniengeometrisch-synthetischen Ableitung dieser Systeme, welche Herr Lie in den Göttinger Nachrichten von 1871 erwähnt, kommt dieser Fall nicht zur Darstellung. Insbesondere gehört zu $n = 6$ das Strahlensystem $(2, 2)$; die Fläche Φ ist dann die allgemeine

Kummer'sche Fläche. In den weiteren Untersuchungen wird vermöge der oben entwickelten Correspondenz eine zusammenfassende Darstellung der singulären Elemente jener Fläche gegeben, deren merkwürdige Gruppirung neuerdings mehrfach mit der Theorie der Thetafunctionen in Zusammenhang gebracht ist.
V.

F. Aschieri. Nozioni preliminari per la geometria projettiva dello spazio rigato. Nota I. Battaglini G. XVI. 346-364.

Der Verfasser definirt als Fundamentalreihe erster Art die (eine) Schaar der Erzeugenden eines Hyperboloids, als Fundamentalreihe zweiter Art die lineare Congruenz, d. h. die Gesammtheit der Schnittlinien zweier projectiver Ebenenbündel mit vereinigt liegendem Ebenenbüschel, endlich als Fundamentalreihe dritter Art den linearen Complex, oder die Gesammtheit der linearen Congruenzen, welche zu Directricen die Involutionspaare einer Fundamentalreihe erster Art besitzen. Hiervon ausgehend, erweisen sich dann leicht die bekannten Eigenschaften dieser Gebilde, insbesondere auch der Zusammenhang des linearen Complexes mit der Raumcurve dritter Ordnung. V.

C. Niven. On M. Mannheim's researches on the wave surface. Quart. J. XV. 242-257.

Ein Bericht über die Arbeiten von Herrn Mannheim, welche sich auf die Wellenfläche beziehen. Derselbe verfolgt hauptsächlich den Zweck, dem englischen Publikum die Untersuchungsmethode des Herrn Mannheim und die durch sie gewonnenen Resultate in höherem Masse zugänglich zu machen. Schn.

C. Niven. On some properties of the wave surface. Quart. J. XV. 257-266.

Plücker hat nachgewiesen, dass, wenn man eine Wellenfläche auf ein gewisses Ellipsoid, welches er Leitellipsoid nennt, polarisirt, das polarisirte Gebilde der Wellenfläche sie selbst

wiederum ist. Dieses Theorem wird durch zweckmässige Benutzung analytischer Formen bewiesen und einige aus jenen Formen sich ergebende Folgerungen daran geknüpft. Dieselben beziehen sich hauptsächlich auf gewisse Ellipsoide und Kugeln, welche mit der Wellenfläche in enger Verbindung stehen.

Schn.

C. Abzählende Geometrie.

A. Beck. Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen. Clebsch Ann. XIV. 207-212.

Im XLIX. Bande des Crelle'schen Journals bestimmte Steiner die Zahl n^2 der Normalen, welche an eine Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkte von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene aus gezogen werden können, indem er die Curve sich um diesen Punkt herum um einen unendlich kleinen Winkel drehen liess, und dann die n^2 Schnittpunkte der beiden Curven als die Fusspunkte der gesuchten Normalen erkannte.

Dieser eigenthümlichen Abzählungsmethode hat der Verfasser der vorliegenden Abhandlung ein neues und interessantes Verfahren nachgebildet, um die Plücker'schen Formeln und einige Formeln für Flächen-Singularitäten zu beweisen. Der Verfasser beginnt damit, die Klassenzahl einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung folgendermassen abzuleiten. Er bildet eine zweite Curve n^{ter} Ordnung, indem er die ursprüngliche in beliebiger Richtung in ihrer Ebene verschiebt. Beide Curven schneiden sich in n^2 Punkten. Es wird dann gezeigt, dass zu diesen n^2 Punkten erstens die m Berührungspunkte der Tangenten gehören, welche zu der Verschiebungsrichtung parallel gehen, zweitens die n Punkte, welche beide Curven auf der unendlich fernen Geraden gemein haben, drittens zweimal jeder der d Doppelpunkte, viertens dreimal jeder der k Rückkehrpunkte.

Bei den weiteren Ableitungen ersetzt der Verfasser die Verschiebung durch die entsprechende, allgemeinere Transformation, nämlich eine centrische Collineation.

Scht.

G. Fouret. Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et une surface. Bull. S. M. F. VI. 43-49.

Der Verfasser benutzt einen neuen interessanten Weg, um die im Titel angegebenen Anzahlen zu bestimmen. Um z. B. die Zahl derjenigen Strahlen zu finden, welche zu zwei in fester Ebene liegenden Curven (m, n) und (m', n') m^{ter} Ordnung n^{ten} Ranges resp. m'^{ter} Ordnung n'^{ten} Ranges gleichzeitig normal sind, betrachte man das einstufige System aller Curven, welche zu der Curve (m, n) parallel sind. Die Berührungspunkte der Curven dieses Systems mit der Curve (m', n') sind die Fusspunkte der gemeinsamen Normalen auf (m', n'). Nun gehen durch einen beliebigen Punkt der Ebene ebensoviel Curven des betrachteten Systems, wie von dem Punkte Normalen auf die Curve (m, n) gehen, also $m+n$, und eine Gerade der Ebene wird von n Curven des Systems berührt, nämlich von sovielen wie zu der Geraden parallele Tangenten an (m, n) möglich sind. Folglich ist nach dem bekannten Satze von der Zahl der Curven eines Systems, welche eine gegebene Curve berühren, die gesuchte Zahl der gemeinsamen Normalen gleich

$$m.n'+m'.n+n.n'.$$

Durch analoge Betrachtungen findet Herr Fouret auch die übrigen im Titel angegebenen Anzahlen. Scht.

G. Fouret. Sur les transformations de contact des systèmes générales de courbes planes, définis par deux caractéristiques. Soc. Phil. (6) XI. 72-76.

Verwandelt man ein System Σ von Curven, welches durch jeden Punkt μ Curven schickt und jeden Strahl durch ν Curven berühren lässt, vermittelst einer der von Lie studirten Berührungs-Transformationen, so erhält man ein neues System Σ' von Curven, für welches μ' und ν' dieselbe Bedeutung haben mögen, wie μ und ν für Σ. Der Verfasser entwickelt, wie jede der Zahlen μ' und ν' von den Zahlen μ und ν abhängt, in dem Falle, wo die

Lie'sche Transformation die Berührungen erster Ordnung unverändert lässt. Weiss man nämlich, dass einem Punkte der transformirten Figur eine Curve m^{ter} Ordnung, n^{ten} Ranges in der ursprünglichen Figur entspricht, und weiss man ferner auch, dass einem Strahle der transformirten Figur eine Curve p^{ter} Ordnung q^{ten} Ranges in der ursprünglichen Figur entspricht, so findet man die gewünschten Resultate durch blosse Anwendung des bekannten Satzes, dass ein Curven-System (μ, ν) mit einer Curve m^{ter} Ordnung, n^{ten} Ranges $n.\mu + m.\nu$ Berührungspunkte besitzt. Dieser Satz ergiebt ohne Weiteres:

$$\mu' = n.\mu + m.\nu,$$
$$\nu' = q.\mu + p.\nu.$$

Diese Resultate wendet der Verfasser auf einige der bekannteren Transformationen an. Z. B. ist für die Cremona'sche Transformation, bei welcher einem Punkte ein Punkt, einem Strahle aber eine Curve r^{ten} Grades und $2.(r-1)^{ten}$ Ranges entspricht, $m = 0$, $n = 1$, $p = r$, $q = 2.(r-1)$ zu setzen. Also ist bei dieser Transformation:

$$\mu' = \mu, \ \nu' = 2.(r-1).\mu + r.\nu.$$

Scht.

G. Fouret. Sur les points fondamentaux du faisceau de courbes planes, défini par une équation différentielle du premier ordre algébrique. C. R. LXXXVI. 586-589.

Der Verfasser veröffentlicht einige Resultate seiner schon 1874 begonnenen Studien über das ebene Curvensystem, welches durch die Gleichung

$$L(xdy - ydx) - Mdy + Ndx = 0$$

definirt wird, wo L, M, N Polynome vom ν^{ten} Grade in x und y sind. Dieses Curvensystem hat die Eigenschaft, dass es durch jeden Punkt der Ebene eine einzige Curve schickt, aber auf jeder Geraden der Ebene ν Berührungspunkte besitzt. Herr Fouret hatte gefunden, dass das Integral der obigen Differentialgleichung, wenn $\nu = 2$ ist, und wenn gewisse 4 Beziehungen

zwischen den 14 Parametern der Gleichung bestehen, eine der beiden folgenden Formen hat:

$$u_1^\alpha v_1^\beta w_1^\gamma t_1^\delta = C, \quad u_2^\alpha v_1^\beta w_1^\gamma = C,$$

wo u_1, v_1, w_1, t_1 lineare Functionen von x und y sind, u_2 ein Polynom zweiten Grades in x und y ist, und wo im einen Falle

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0,$$

im andern Falle

$$\alpha+\beta+\gamma = 0$$

ist. Zu ganz denselben Resultaten war Herr Darboux in der vorhergehenden Nummer der Comptes rendus (cf. F. d. M. VI.) auf einem ganz anderen Wege gelangt. Der Verfasser erörtert ausführlich die Natur der angedeuteten Bedingungen der Integrabilität. Scht.

G. Fouret. Sur les points fondamentaux du réseau de surfaces défini par une équation aux dérivées partielles du premier ordre algébrique, linéaire par rapport à ces dérivées. C. R. LXXXVI. 654-657.

Der Verfasser dehnt die in den Comptes rendus, LXXXVI. 586—589 (cfr. vorstehendes Referat) angestellten Betrachtungen auf den Raum aus. An die Stelle des einstufigen Curvensystems tritt ein zweistufiges Flächensystem, und an die Stelle der dort behandelten Differentialgleichung tritt die folgende Gleichung zwischen partiellen Derivirten:

$$L\left(\frac{\partial z}{\partial x}x+\frac{\partial z}{\partial y}y-z\right)-M\frac{\partial z}{\partial x}-N\frac{\partial z}{\partial y}+R = 0,$$

wo L, M, N, R Polynome vom φ^{ten} Grade in x, y, z sind. Diese Gradzahl φ bedeutet für das Flächensystem die Zahl derjenigen Flächen, welche eine gegebene Ebene auf einer in ihr gegebenen Geraden berühren. Scht.

A. V. Bäcklund. Lösning af ett Beröringsproblem i Theorien för lineära Yt-Systemer. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 97-106.

Der besondere Zweck dieses Artikels ist die Correction eines ungenauen Resultates in einer früheren Arbeit des Verfassers (Svenska Vet. Akad. Handlinger Bd. IX. 1871). Es handelt sich um die Bestimmung der Anzahl der vierpunktigen Berührungspunkte einer Fläche C_m mit solchen Schnittcurven zweier Flächen in einem linearen System

$$\lambda_0 C^0 + \lambda_1 C' + \lambda_2 C'' + \lambda_3 C''' = 0,$$

welche ausserdem die Curve $(C_0 C')$ schneiden. Theils als Vorbereitung zur Lösung dieses Problems, theils als weitere Consequenzen der angewandten Betrachtungsweise entwickelt der Verfasser mehrere zahlengeometrische Sätze über solche Flächensysteme und ihre zugehörigen Curven. Gm.

L. Saltel. Note sur de nouveaux développements que comporte l'application de la méthode de correspondance analytique. Bull. de Belg. (2) XLV. 102-106.

Nach dem Verfasser wird die Methode auf specielle Fälle früher von ihm behandelter Probleme angewandt.

Mn. (O.)

G. Fouret. Sur les courbes planes, ou surfaces qui ont leur propre polaire réciproque, par rapport à une infinité de coniques ou surfaces du second ordre. Soc. Phil. Paris (7) I. 42.

Wenn eine Curve C die Eigenschaft hat, dass sie in Bezug auf ein einstufiges Kegelschnittsystem ihre eigene Polare darstellt, so liegt jeder beliebige Punkt zusammen mit den Berührungspunkten aller von ihm ausgehenden Tangenten auf einem und demselben Kegelschnitt. Eine solche Curve C hat die Gleichung

$$u^\alpha v^\beta w^\gamma = D,$$

wo u, v, w lineare Functionen von x und y bedeuten, D eine beliebige Constante ist, und wo α, β, γ drei reelle oder imaginäre Zahlen sind, welche der Bedingung

$$\alpha+\beta+\gamma = 0$$

genügen. Analoges findet bei Flächen statt. Der Verfasser leitet diese Sätze theils durch geometrische Ueberlegungen ab, theils auch mit Benutzung der werthvollen Resultate, die derselbe über diejenigen Differentialgleichungen gefunden hat, welche Curvensysteme oder Flächensysteme bei gegebenen Charakteristikenzahlen definiren (C. R. LXXVIII. 83, 88, s. F. d. M. VI.).

Scht.

P. A. Hirst. On Halphén's new form of Chasles' theorem on systems of conics satisfying four conditions. Rep. Brit. Ass. 1878.

Der Satz wird durch die Formel $n = \alpha\mu+\beta\nu$ ausgedrückt, worin μ und ν die Chasles'schen Charakteristiken für Kegelschnittsysteme sind, die 4 oder 5 Bedingungen genügen. Halphén's neue Form dieses Satzes schliesst degenerirte Kegelschnitte aus.

Csy. (O.)

G. Halphén. Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques. Proc. L. M. S. IX. 149-170. Clebsch Ann. XV. 16-38.

Alle Kegelschnitt-Anzahlen, welche seit 1864 bis September 1876 von Chasles, Zeuthen, Halphén und dem Referenten gefunden waren, standen im Einklang mit dem folgenden Satze:

„Die Zahl der Kegelschnitte, welche, einem gegebenen, einstufigen Systeme Σ angehörig, eine gegebene einfache Bedingung Z erfüllen, ist immer in der Form

$$\alpha.\mu+\beta.\nu$$

ausdrückbar, wo die Zahl μ angiebt, wieviel Kegelschnitte des Systems durch einen gegebenen Punkt gehen, die Zahl ν angiebt, wieviel einen gegebenen Strahl berühren, α und β aber Zahlen sind, welche von der Natur der Bedingung Z abhängen."

Zu diesem Satze waren mehrere Beweise geliefert, nämlich von Clebsch in Clebsch Ann. VI. p. 1, von Halphén im Bull. S. M. F. Bd. 1, p. 130—141, von Lindemann in Clebsch's Vorl,

über Geometrie p. 398. Da publicirte Halphén in den C. R. vom 4. Septbr. und 13. Nov. 1876 (cfr. F. d. M. VIII. 388) zwei kurze Noten, welche Beispiele enthielten, die mit jenem Satze in Widerspruch standen. Aus diesen Noten war jedoch dem Referenten weder der innere Grund der Nicht-Allgemeingültigkeit jenes Satzes, noch auch diejenige Formel deutlich erkennbar, welche an die Stelle der Chasles'schen Formel zu setzen ist. Deshalb hielten Hurwitz und der Referent es für angemessen, in den Gött. Nachr. einen neuen Beweis zu veröffentlichen, welcher dem Beweise des Bézout'schen Satzes von der Zahl der gemeinsamen Punkte zweier Curven nachgebildet war.

Die vorliegende Abhandlung von Halphén, welche eine ganz neue Basis für die Charakteristikentheorie schafft, geht zwar auf die früheren Beweise in keiner Weise ein. Man erkennt jedoch leicht den Fehler, welcher den früheren Beweisen zu Grunde liegt. Der Kegelschnitt besitzt nämlich nicht blos die beiden bekannten Ausartungen, bei denen die Punkte zwei Gerade, resp. die Tangenten zwei Strahlbüschel bilden, sondern noch eine dritte Ausartung, welche auch die Constantenzahl 4 hat, und welche sich in folgender Weise definiren lässt Eine solche Kegelschnitt-Ausartung wird von jeder Geraden in zwei Punkten geschnitten, deren Entfernung d unendlich klein ist, und besitzt in jedem Strahlbüschel zwei Tangenten, welche einen unendlich kleinen Winkel δ bilden, aber so, dass d und δ nicht etwa immer von derselben Ordnung unendlich klein sind, sondern dass etwa erst die h^{te} Potenz von d, dividirt durch δ, einen endlichen Grenzwerth liefert. Da die angegebene Zahl h zur vollständigen Bestimmung des ausgearteten Kegelschnitts nothwendig ist, so hat derselbe ebenso gut die Constantenzahl 4, wie die beiden andern Ausartungen. Man kann daher einstufige Systeme definiren, welche die Halphén'sche Kegelschnitt-Ausartung enthalten. Der Fehler der früheren Beweise besteht also im Wesentlichen darin, dass der Einfluss einer solchen Ausartung in keiner Weise beachtet ist. Fügt man jenen Beweisen die ausdrückliche Voraussetzung hinzu, das Kegelschnitt-System solle eine solche Halphén-sche Ausartung nicht enthalten, so werden die Beweise richtig.

Auch noch in einem zweiten Falle bleibt die alte Formel $\alpha.\mu+\beta.\nu$ richtig, wie in der vorliegenden Abhandlung bewiesen ist. Nämlich dann, wenn nicht das System, sondern die hinzutretende Bedingung in gewisser Weise eingeschränkt ist. Diese Einschränkung ist aus folgendem Satze erkennbar. Wenn eine Bedingung Z so beschaffen ist, dass die Zahl derjenigen Kegelschnitte, welche ihr genügen und welche zugleich eine gegebene Curve in einem gegebenen Punkte vierpunktig berühren, gleich $\alpha+\beta$ wird, so wird auch die Zahl der Kegelschnitte, welche, einem beliebigen Systeme (μ, ν) angehörig, die Bedingung Z erfüllen, gleich $\alpha.\mu+\beta.\nu$.

Wenn aber weder das System noch die Bedingung den eben erwähnten Einschränkungen gehorchen, so ist die Zahl der gesuchten Kegelschnitte immer um eine gewisse Zahl Γ kleiner als $\alpha.\mu+\beta.\nu$. Die neuen Grundlagen, auf welche Herr Halphén die Charakteristikentheorie des Kegelschnittes aufbaut, erlauben ihm nun nicht blos, die oben angeführten Sätze zu beweisen, sondern auch das supplementäre Glied Γ durch analytische Ueberlegungen zu bestimmen. Es würde jedoch eine Wiedergabe des ganzen Gedankenganges erheischen, und also den Raum eines Referates überschreiten, wenn Ref. versuchen wollte, die Berechnung der Zahl Γ klar zu legen. Es mag die Andeutung genügen, dass Herr Halphén den Kegelschnitten des Systems in gewisser Weise Punkte eindeutig zuordnet, deren Gesammtheit er eine dem Systeme zugeordnete Curve nennt, dass er analog auch der gegebenen Bedingung eine gewisse Curve zuordnet, und dass dann die Zahl Γ als die Zahl derjenigen Punkte auftritt, welche die dem System zugeordnete Curve und die der Bedingung zugeordnete Curve im Coordinaten-Anfangspunkte gemein haben. Freilich stellt Herr Halphén in der vorliegenden Abhandlung seine Betrachtungen nur für den speciellen Fall an, wo das System unicursal ist und aus Kegelschnitten besteht, in Bezug auf welche ein festes Dreieck sich selbst polar conjugirt ist. Herr Halphén verspricht jedoch in einer späteren Abhandlung den allgemeinen Fall zu beweisen. Inzwischen ist diese Abhandlung im Journal de l'Ec. polyt. 45 cahier (février 1879) er-

schienen. Ferner ist eine andere Abhandlung von Herrn Halphén erschienen, welche als eine Fortsetzung der besprochenen zu betrachten ist. Dieselbe führt den Titel „Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entre elles“ und ist in den Proceed. of the London Math. Soc. (vol. X. Nr. 145, 146) erschienen. Nach den besprochenen Halphén'schen Resultaten scheint es, ausser bei den Hauptelementen Punkt, Strahl, Ebene und den Paaren von Hauptelementen nur dann möglich zu sein, die Zahl der gemeinsamen Gebilde zweier Systeme von Gebilden als algebraische Summe von Producten je zweier den beiden Systemen angehörigen Anzahlen darzustellen, wenn in beiden Systemen oder wenigstens in einem der beiden Systeme gewisse besondere Ausartungen fehlen, die die Natur der Halphén'schen Kegelschnitt-Ausartungen haben, und welche noch präciser definirt werden müssten. Demnach scheinen jetzt in der Charakteristikentheorie zwei Untersuchungsrichtungen möglich zu sein. Bei der ersten ist die vollständige Berücksichtigung aller Systeme und aller Bedingungen wesentlich. Dann hat man die Einfachheit der Darstellung der gesuchten Zahl nach der Analogie des Bézout'schen Satzes zu opfern. Bei der zweiten opfert man einige Systeme, für welche die Formeln ungültig werden, und welche natürlich genau charakterisirt werden müssten; man bewahrt sich aber die einfache Darstellung der gesuchten Zahl als Summe von Producten.

Nach des Referenten Ansicht sind beide Untersuchungs-Richtungen theoretisch gleich berechtigt. Scht.

G. Halphén. Charactéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. J. de l'Éc. Polyt. XXVIII 27-89.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande. O.

Picquet. Détermination de la classe de la courbe enveloppe des axes des coniques, perspectives sur un

plan vertical de cercles de rayons égaux situés dans un plan vertical et dont les centres sont sur une horizontale. Construction des axes de ces courbes.
Bull. S. M. F. VI. 82-84.

Um zu der gesuchten Klassenzahl 4 und zu einer Construction der Kegelschnitt-Axen zu gelangen, betrachtet Herr Picquet die verticale Gerade V, in welcher die Ebene der Kreise von derjenigen Ebene geschnitten wird, welche durch das projicirende Auge parallel zur Ebene der Kegelschnitte geht. Da diese Gerade vertical ist, und die Gerade der Kreis-Centra horizontal, so ist die letztgenannte Gerade zugleich der Ort der Pole von V in Bezug auf die Kreise. Folglich bilden auch die perspektivischen Bilder dieser Punkte eine Gerade. Da nun die Projektion der Geraden V unendlich fern ist, so ist die Gerade, auf welcher diese perspektivischen Bilder liegen, der Ort der Centra der Kegelschnitte. Jeder Kegelschnitt nun, welcher in einem bestimmten Punkte P dieser Geraden der Kegelschnitt-Centra sein Centrum hat, ist das Bild eines Kreises, in Bezug auf welchen das Bild von P Pol der Geraden V ist. Derartige Kreise sind immer in der Anzahl zwei vorhanden. Es gehen daher durch jeden Punkt auf der Geraden der Kegelschnitt-Centra 4 Axen, d. h. 4 Tangenten des fraglichen Ortes. Mit Hilfe solcher Ueberlegungen gelangt der Verfasser auch leicht zu einer einfachen Construction dieser Axen. Scht.

H. Schubert. Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurve nullten Geschlechts. Zweite Abhandlung der Beiträge zur abzählenden Geometrie. Clebsch Ann. XIII. 429-539.

Dies ist die Fortsetzung der Abhandlung in Clebsch Ann. X. 1-116, über welche F. d. M. VIII. 399 gesprochen wurde. Als Vorläufer der jetzigen Abhandlung, insbesondere ihres Abschnitts V., gilt die Mittheilung in den Gött. Nachr. 1875 S. 359, cfr. F. d. M. VII. 394.

Die jetzige Arbeit zerfällt in 3 Abschnitte, im Anschlusse an die frühere IV., V., VI. Der Abschnitt IV. bespricht die Chasles-Zeuthen'sche Anzahl-Bestimmung, bei welcher die Anzahlen von höheren Gebilden auf die von einfacheren, aus denen die Ausartungen jener bestehen, reducirt werden. Der Verfasser zeigt zunächst an einigen Beispielen, wie sich die Ausartungen in den Formeln geltend machen.

Als Grundbedingungen eines Hauptelements (Punkt, Strahl, Ebene) wurden in der ersten Abhandlung die Bedingungen bezeichnet, dass dieses Element einem gegebenen Grundgebilde angehöre (Bd. VIII. 401); ferner als fundamentale Bedingung eines Gebildes Γ eine Grundbedingung für die sogenannten Plücker'schen Oerter des Gebildes Γ, bez. deren erzeugende Hauptelemente. Man unterscheidet nach dem üblich gewordenen Sprachgebrauch bei Plancurven elementare Oerter und singuläre: jene sind die Ebene der Curve, die Oerter 1[ter] Stufe ihrer Punkte und ihrer Tangenten; dass also diese Ebene oder ein Punkt oder eine Tangente der Curve eine Grundbedingung erfülle, ist für die Plancurve eine elementare Bedingung. Singuläre Oerter sind die Oerter nullter Stufe der Plücker'schen Singularitäten und aus ihnen abgeleitete Gebilde; bei der cubischen Plancurve mit Spitze z. B. nimmt Schubert als solche die Spitze c, den Wendepunkt v, die Verbindungslinie s beider, die Spitzentangente q, die Wendetangente w und den Schnittpunkt y beider an. Bedingungen, welche diesen auferlegt werden, heissen singuläre Bedingungen der Curve; elementare und singuläre zusammen fundamentale.

Bei einer fundamentalen Ausartung müssen entweder zwei Elemente der Plücker'schen Oerter nullter Stufe coindiciren, oder mindestens ein Ort von höherer Stufe zerfallen; sehr oft ist beides vereinigt: von den cubischen Plancurven z. B. mit Doppelpunkt ist die mit Spitze eine Ausartung; der Tangentenort der ersteren ist zerfallen in den der zweiten und den Strahlbüschel um die Spitze, zugleich aber haben sich die beiden Doppelpunktstangenten mit einander und zwei Wendepunkte mit dem Doppelpunkte vereinigt. Die Theilgebilde des Punkt-, bez. Tangenten-

orts 1ter Stufe werden Ordnungs-, bez. Rangcurve genannt, (im ersten Theile hat Schubert motivirt, dass die Bezeichnung „Rang" geeigneter ist als „Klasse"), sind sie linear, Ordnungsgerade, bez. Rangbüschel, auch Rangpunkt, sommet bei Zeuthen).

In seinen „Almindelige Egenskaber" etc. (Vidensk. Selskab (5) IV.; cfr. Jahrb. V. 317) hat Herr Zeuthen nur elementare (d. h. durch elementare Bedingungen bestimmte) Systeme von Plancurven in fester Ebene betrachtet. Da Schubert auch singuläre Bedingungen hinzunimmt, muss er mehr Ausartungen erhalten, als Zeuthen; er nennt nun eine Ausartung eine solche n^{ter} Gattung, wenn zur völligen Bestimmung ihrer Plücker'schen Oerter eine n-fache singuläre Bedingung nothwendig ist; so dass Zeuthen sich nur mit Ausartungen nullter Gattung beschäftigt hat.

Das Problem ist nun, in einem einstufigen Systeme von Plancurven Γ (allgemein von irgend welchen Gebilden Γ) die Zahl der einer fundamentalen Bedingung genügenden Individuen durch die Zahl der Ausartungen des Systems auszudrücken, also, da das System selbst durch fundamentale Bedingungen definirt ist, wenn die Zahl der Γ im Raume ∞^c ist (bei der Plancurve dritter Ordnung mit Spitze, bez. Doppelpunkt ist $c = 10$, resp. 11), die Anzahl der c fundamentalen Bedingungen genügenden Γ durch die Anzahl der $c-1$ solchen Bedingungen genügenden Ausartungen von Γ auszudrücken.

Eine Ausartung, die z. B. aus zwei Theilen besteht, kann nun eine gewisse Bedingung dadurch erfüllen, dass der eine oder der andere Theil sie erfüllt. Da nun jede der beiden Curven, um die es sich im vorliegenden Aufsatze handelt — cubische Plancurve mit Doppelpunkt oder Spitze — eine Ausartung besitzt, die aus Kegelschnitt und Gerade besteht, so stellt Schubert die Anzahlen der Kegelschnitte im Raume zusammen, wie sie durch Chasles (C. R. 1867), Zeuthen (Nouv. Ann. (2) VII.) und ihn selbst (Borchardt J. LXXI., cfr. F. d. M. II. 441) gefunden sind.

Sodann giebt er die Modificationen an, welche Zeuthen's Formeln in den „Alm. Egensk.", die sich auf Systeme cubischer Plancurven in fester Ebene beziehen, dadurch erleiden, dass die

Ebene nicht mehr fest ist; er leitet zunächst einige dieser Formeln für diesen allgemeineren Fall mit Hülfe der in der ersten Abhandlung gewonnenen Punktepaar-Formeln ab und theilt dann die Modification für alle mit: es tritt je ein Glied hinzu, welches die Bedingung μ enthält, dass die Curvenebene durch einen gegebenen Punkt gehe. Es wäre die Bemerkung angezeigt gewesen, dass Zeuthen's μ, μ' Schubert's ν, ϱ entspricht; die Verschiedenartigkeit der Bezeichnung, so wie die mehrfache Bedeutung desselben Symbols (z. B. c auf S. 454-455; σ auf S. 455-456; i auf S. 455-456 unten) erschwert die Lectüre etwas, obwohl es nicht leicht sein mag, sie zu vermeiden.

Im Abschnitt V. wird nun die cubische Plancurve mit Spitze behandelt: für eine feste Ebene und elementare Bedingungen sind die Anzahlen durch Zeuthen (C. R. LXXIV. S. 521, 604, 726 und Maillard (Doctordiss. Paris 1871) bestimmt; siehe F. d. M. IV. 305.

Schubert nimmt nun zu den elementaren Bedingungen, welche sich durch die 3 Bedingungen μ, ν, ϱ, — dass die Curvenebene durch einen gegebenen Punkt gehe, die Curve eine gegebene Gerade treffe, bez. eine gegebene Ebene berühre, welche beide letzteren bei fester Ebene in die Bedingungen, dass die Curve durch einen gegebenen Punkt gehe, bez. eine gegebene Gerade berühre, übergehen, — ausdrücken lassen, noch die auf die 6 Stücke c, v, z, q, w, y, welche das „Singularitätendreieck" bilden, bezüglichen hinzu. Er betrachtet ein durch fundamentale Bedingungen definirtes Curvensystem und wendet die im ersten Theile gefundenen Elementenpaar-Formeln auf 25 gewisse Systeme 1[ter], 2[ter], 3[ter] Stufe von Elementenpaaren an: solche Paare sind z. B. der Wendepunkt einer Curve des Systems combinirt mit der Spitze oder der Spitzentangente oder einem beliebigen Punkte oder einer beliebigen weiteren Tangente derselben Curve. So ergeben sich 25 Formeln.

Bei Systemen 1[ter] Stufe, welche blos elementaren Bedingungen unterworfen sind, giebt es, wie schon Zeuthen und Maillard gefunden, nur eine Ausartung σ (nullter Gattung): ihr Punktort besteht aus einem Kegelschnitte und einer ihn berührenden Ord-

nungsgeraden, ihr Tangentenort aus demselben Kegelschnitt und einem Rangpunkte in dem Berührungspunkte jener Geraden; in den Rangpunkt fallen die 3 Ecken, in die Ordnungsgerade die 3 Seiten des Singularitätendreiecks. Ist aber das System auch noch durch singuläre (auf dieses Dreieck bezügliche) Bedingungen definirt, so kommen noch 12 andere Ausartungen von höherer Gattung hinzu. Die Summanden, die von diesen herrühren, werden in die 25 Formeln zunächst unbestimmt als „singulärer Defect" — sie fehlen eben in elementaren Systemen — eingeführt. Diese 25 Formeln lassen sich nach den 7 Grössen 2σ, $3c$, $6v$, $3y$, $3w$, $6q$, $3z$ auf verschiedene, also sich controllirende Weisen auflösen, was zu den 7 Hauptformeln führt.

Zu den 12 weiteren Ausartungen gelangt Schubert, indem er die Curve durch Homologie oder centrisch collinear (er selbst sagt homographisch ohne Zusatz) transformirt: dem constanten Doppelverhältnisse der Homologie wird der Werth 0 gegeben und das Centrum der Homologie in verschiedene Lagen zur Curve gebracht. Die Ausartungen bestehen aus 3 getrennten, oder theils oder ganz vereinigten Ordnungsgeraden und 3 ähnlich (aber nicht grade ebenso) beschaffenen Rangpunkten; die Ecken (Seiten) des Singularitätendreiecks sind mit den Ordnungsgeraden (Rangpunkten) incident, getrennt von, bez. theilweise vereinigt mit den Rangpunkten (Ordnungsgeraden). Die Ausartungen sind paarweise felddual.

Der Verfasser giebt nun die numerischen Coefficienten an, mit denen behaftet diese Ausartungen in den 25 Formeln auftreten; es wäre erwünscht gewesen, genauer die Art erläutert zu finden, wie dieselben „algebraisch" oder „aposteriorisch" ermittelt sind; theilweise ergeben sie sich dadurch, dass sie null, event. wenigstens ganz sein müssen, und dass die 25 Formeln nur mit 7 äquivalent sind. Auch andere Coefficienten der Formeln hätte man gern genauer begründet gefunden, z. B. die Coefficienten 2 von q und σ in 7), 9) etc.; ferner wäre ein Nachweis erwünscht, dass durch die obige centrisch-collineare Transformation wirklich sämmtliche in einem durch fundamentale Bedingungen

bestimmten einstufigen Systeme vorkommenden Ausartungen sich ergeben, was ja bei der Curve mit Doppelpunkt, wie sich nachher zeigt, nicht der Fall ist. Es wird darauf angegeben, wie die Ausartungszahlen gefunden werden: in Folge der Coincidenzen und Incidenzen, welche bei den Ausartungen zwischen den Ordnungsgeraden, Rangpunkten, Elementen des Singularitäten-Dreiecks statthaben, lassen sich die im ersten Theile gefundenen Incidenzformeln anwenden, und dadurch viele Ausartungszahlen auf andere zurückführen. Die Ausartungen werden nun in Gruppen behandelt, jeder Gruppe folgt nach einigen Beispielen der Berechnung eine Tabelle der Zahlen der betreffenden Ausartungen, welche eine α-fache Bedingung, $(10-\alpha-i)$-mal die Bedingung ν, $(i-1)$-mal die Bedingung ϱ erfüllen. Unklar ist dem Referenten der Grund der mehrfach gemachten Bemerkung geblieben, wie z. B. S. 468 No. 1: „Hiernach kann eine Zahl ... nur dann von 0 verschieden sein, wenn ....“.

Nun folgt die Berechnung der fundamentalen Anzahlen der allgemeinen cubischen Plancurve mit Spitze selbst. Hierbei kommt es auf ein geschicktes Arrangement der Systeme an: mit Herrn Zeuthen geht Schubert aus von dem in sich felddualen Systeme $\mu^3\nu^3\varrho^3$, für welches μ und der Defect 0 sind; also giebt die σ-Hauptformel, weil σ im Vorigen berechnet ist, ν und ϱ, welche hier gleich sind; dann geht es zu dem Systeme $\mu^3\nu^4\varrho^2$, bei dem μ und der Defect ebenfalls 0 sind und ϱ aus dem vorhergehenden System entnommen wird; die Werthe $\sigma\mu^3\nu^i\varrho^{10-i-4}$, die bei der Ausartung σ berechnet sind, liefern demnach alle Zahlen $\mu^3\nu^i\varrho^{10-i-3}$. Man geht nun zu den Systemen über, welche die Bedingung μ nur zweimal zu erfüllen haben. Wie diese und die weiteren Systeme hinter einander vorgenommen, wie auch bisweilen Zahlen zunächst unbestimmt gelassen werden und in den Ausdrücken für weitere Zahlen auch so verbleiben, bis sich endlich Gleichungen ergeben, in denen sie die einzigen Unbekannten sind, lässt sich nicht in Kürze wiedergeben.

Das Princip der Erhaltung der Anzahl kann auch angewandt

werden, indem man Grundgebilde, welche in zugleich zu erfüllenden Bedingungen auftreten, in specielle Lage bringt: es ergeben sich dann Formeln, die mit den modificirten Zeuthen'schen Formeln in einfachem Zusammenhang stehen, und gleichfalls zur Ableitung von Anzahlen, zu Controllen oder zur aposteriorischen Bestimmung von Coefficienten dienen können.

Es folgt nun eine Tabelle von mehreren tausend Fundamentalzahlen, insbesondere die sämmtlichen Fundamentalzahlen für die Curve in fester Ebene.

Der Abschnitt schliesst mit einer interessanten Bemerkung: „Die ausgezeichneten Elemente der durch die erwähnte centrische Collineation erhaltenen Ausartungen stellen sich in ihrer Lage als von einander abhängig dar, man kann nicht alle beliebig geben."

Die Ausartungszahlen geben nun an, wie viele von ihnen die übrigen bestimmen und wie vieldeutig diese bestimmt sind. Dies lässt sich auf die allgemeine Curve mit Spitze übertragen und führt zu einer Reihe von Sätzen über Grade von Gleichungen, z. B.: Von einem Punkte gehen 3 Tangenten an die Curve und drei Strahlen nach den Ecken des Singularitäten-Dreiecks; vier derselben bestimmen die übrigen endlichdeutig, und zwar die 3 Tangenten und der Strahl nach der Spitze die beiden andern vierdeutig; jene und der Strahl nach dem Wendepunkte die beiden übrigen eindeutig, etc.

Der Abschnitt VI. bringt sodann die analoge Betrachtung der Curve mit Doppelpunkt: Plücker'sche Oerter nullter Stufe sind der Doppelpunkt, seine beiden Tangenten, die drei Wendepunkte, ihre Verbindungslinie, die 3 Wendetangenten und ihre 3 Schnitte. Ausartungen nullter Gattung sind 1) ein Kegelschnitt mit einer zweimal schneidenden Geraden; der eine Schnitt ist der neue Doppelpunkt und wird also Rangpunkt; 2) die Curve mit Spitze, welche Rangpunkt wird. Durch die centrische Collineation werden 10 Ausartungen höherer Gattung gewonnen; sodann hat der Verfasser noch eine elfte in durch elementare und singuläre Bedingungen bestimmten Systemen gefunden.

Die in der ersten Abhandlung versprochene dritte Abhand-

lung wird nicht mehr erscheinen, weil der Verfasser vorher seinen „Calcül der abzählenden Geometrie“ (Leipzig 1879) hat erscheinen lassen, der den Inhalt der beiden früheren in kürzerer Form wiedergiebt und auch die für den dritten Aufsatz bestimmten Untersuchungen über die cubische Raumcurve bringt. Eine kurze Notiz über die Ausartungen dieser Curve hat der Verfasser (Clebsch Ann. XV. 529) veröffentlicht.

Sm.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Coordinaten.

R. Hoppe. Allgemeinster Ausdruck der Richtungscosinus einer Geraden in rationalen Brüchen. Grunert Arch. LXI. 438-439.

Die Aufgabe kommt zurück auf die Lösung der Gleichung

$$x^2+y^2+z^2 = u^2$$

durch ganze Zahlen; es ergiebt sich:

$x=ac+bd$, $y=ad-bc$, $z=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$, $u=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)$, wo 3 der Grössen a, b, c, d alle ganzen Zahlen, die vierte theils die graden, theils die ungraden Zahlen zu durchlaufen hat.

M.

V. Schlegel. Ueber das dem Cartesischen reciproke Coordinatensystem. Schlömilch Z. XXIII. 195-196.

Nachweis, dass das von Herrn Schwering aufgestellte Liniencoordinatensystem (s. F. d. M. VIII. 414) das reciproke Gegenstück des rechtwinkligen Cartesischen ist. Nachzutragen ist hierzu, dass dasselbe Coordinatensystem denjenigen Specialfall der Fiedler'schen projectivischen Coordinaten repräsentirt, welcher durch die unendlich ferne Lage eines der drei Fundamentalpunkte entsteht.

Schg.

F. Casorati. Sur les coordonnées des points et des droites dans le plan, des points et des plans dans l'espace. Nouv. Ann. (2) XVII. 5-20.

Sind durch einen Punkt x die Parallelen ξ_1, ξ_2, ξ_3 zu den Seiten eines Fundamentaldreiseits $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ gezogen, so liegen die Punkte $\xi_1\alpha_1$, $\xi_2\alpha_2$, $\xi_3\alpha_3$ auf der unendlich fernen Geraden ε. Sind ferner durch die Ecken eines Fundamentaldreiecks $a_1a_2a_3$ Parallelen zu einer beliebigen Richtung e gezogen, welche eine Gerade ζ in den Punkten z_1, z_2, z_3 schneiden, so gehen die Geraden z_1a_1, z_2a_2, z_3a_3 durch den unendlich fernen Punkt e. Der Verfasser definirt nun als Coordinaten von $x(\zeta)$ zunächst drei Zahlen, welche zur Bestimmung der „Coordinaten-Elemente" ξ_1, ξ_2, ξ_3 (z_1, z_2, z_3) geeignet sind, und weist hin auf die Verallgemeinerung dieses Coordinatenbegriffes durch Versetzung der Geraden ε und des Punktes e in endliche Entfernung. Obige Definition wird dann vervollständigt durch die Annahme, dass das fundamentale Dreieck und Dreiseit zusammenfallen, und dass als Coordinaten von $x(\zeta)$ die mit e parallelen Abstände der Geraden ξ und α (der Punkte z und a) betrachtet werden. Hierdurch sind zwei reciproke Coordinatensysteme geschaffen, für welche u. a. die Bestimmungen gelten, dass die Coordinaten $(x_1x_2x_3)$ eines Punktes x, welcher auf der Verbindungslinie zweier Punkte $t(t_1t_2t_3)$ und $u(u_1u_2u_3)$ liegt (oder einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt zweier anderen geht) durch drei Gleichungen von der Form

$$(1)\qquad x_1 = \frac{lt_1+mu_1}{l+m}$$

gegeben sind, und dass die Bedingung, unter welcher ein Punkt $x(x_1x_2x_3)$ auf einer Geraden $\zeta(\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$ liegt, durch die Gleichung

$$(2)\qquad \frac{\zeta_1x_1}{h_1}+\frac{\zeta_2x_2}{h_2}+\frac{\zeta_3x_3}{h_3} = 0$$

ausgedrückt ist, worin h_1, h_2, h_3 die von Null verschiedenen Coordinaten der Punkte oder Seiten des Fundamentaldreiecks sind. [Hierzu ist zu bemerken, dass man die Gleichungen (1) nur mit resp. a_1, a_2, a_3 zu multipliciren und zu addiren braucht, um die,

alle drei ersetzende, Gleichung

$$x = \frac{lt + mu}{l + m}$$

zu erhalten, welche die Lage des Punktes x nach den Principien der Ausdehnungslehre bestimmt. Ebenso, dass durch äussere Multiplication der Gleichungen

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3, \quad \zeta = \zeta_1 \alpha_1 + \zeta_2 \alpha_2 + \zeta_3 \alpha_3,$$

die mit (2) gleichwerthige Gleichung

$$x\zeta = 0$$

folgt, sobald man die Grössen α als Ergänzungen der Grössen a ansieht].

Für den Fall zweier Coordinaten erhält der Verfasser als Liniencoordinatensystem das bereits von Herrn Schwering gefundene (s. F. d. M. VIII. 414) mit einer unwesentlichen Verallgemeinerung. Dasselbe ist aber hier nicht dem Cartesischen reciprok, weil der Verfasser die willkürliche Richtung e zur Darstellung nicht nur der Linien-, sondern auch der Punkt-Coordinaten benutzt. Es folgen Transformationen der Coordinaten und Ausdehnung der vorigen Untersuchung auf räumliche Verhältnisse.

Schg.

F. D'ARCAIS. Sui sistemi di coordinate. Battaglini G. XVI. 18-26.

Der Verfasser erkennt als Ursache der nicht vollkommenen Reciprocität zwischen den Punkt- und Liniencoordinaten Casorati's den Umstand, dass der einen unendlich fernen Geraden des einen Systems jeder beliebige unendlich ferne Punkt des andern entspricht, während andrerseits im Cartesischen und Plücker'schen System der unendlich fernen Geraden ein beliebiger, endlich ferner Punkt gegenübersteht. Die Reciprocität wird eine vollkommene, wenn man ein für allemal einen bestimmten Punkt der Ebene (endlich fern für das Plücker'sche, unendlich fern für das Casorati'sche System) als dritten Fundamentalpunkt zu Grunde legt. Der Verfasser zeigt, dass, wenn unter dieser Bedingung

in der Gleichung

$$\mu u + \nu v + 1 = 0$$

u und v als Casorati'sche Coordinaten angesehen werden (die also nun den Cartesischen reciprok sind), μ und ν die Coordinaten eines dem Plücker'schen reciproken Systems sind, ferner, dass im Cartesischen System und im System (μ, ν), ebenso wie im Plückerschen und im System (u, v) dieselbe Curve durch Gleichungen desselben Grades dargestellt wird. Es folgt am Schluss die Bestimmung des Winkels zweier Geraden und des Abstandes zweier Punkte in den Systemen (μ, ν) und (u, v), nebst Untersuchung der Substitution $u = \varrho \cos\varphi$, $v = \varrho \sin\varphi$.

Schg.

F. Franklin. Bipunctal coordinates. Am. J. I. 148-174.

Der Verfasser gelangt bei Aufsuchung eines dem Cartesischen reciproken Systems zu demselben Resultate wie die Herren Schwering und Casorati. Es wird dann ausführlich die Gleichung des Punktes und die Coordinaten-Transformation behandelt, worauf die Untersuchung auf Dreipunkt-Coordinaten ausgedehnt wird. Den Schluss bilden Anwendungen des neuen Systems auf die Theorie der Kegelschnitte, wobei am Ende auch die einfache, von Herrn Schwering gegebene Form der Kegelschnittgleichung $uv = \pm c$ gefunden wird.

Schg.

De Gasparis. Sopra una rimarchevole relazione che si verifica in una doppia trasformazione di variabili. Atti R. Acc. d. Linc. (3) II. 192-195.

Die erste Transformation besteht darin, dass an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten x_2, y_2 der Punkte einer Curve die Abschnitte x_1, y_1 eingeführt werden, welche die Tangente in den Axen bildet; also

$$x_1 = x_2 - y_2 \frac{dx_2}{dy_2}, \quad y_1 = y_2 - x_2 \frac{dy_2}{dx_2}.$$

Die zweite Transformation setzt analog:

$$x_2 = x_3 - y_3 \frac{dx_3}{dy_3}, \quad y_2 = y_3 - x_3 \frac{dy_3}{dx_3}.$$

Die gemeinte Relation ist:

$$\sqrt{x_1 y_1} = \sqrt{x_1 y_3} + \sqrt{y_1 x_3},$$

oder auch:

$$\frac{1}{\sqrt{x_3 y_3}} = \frac{1}{\sqrt{x_1 y_3}} + \frac{1}{\sqrt{y_1 x_3}}.$$

Hr.

E. Lucas. Sur un principe fondamental de géométrie et de trigonométrie. N. C. M. IV. 85-86, 169-175, 200-204.

1. Lemma. Die Potenzen eines Punktes in Beziehung auf fünf Kreise einer Ebene oder sechs Kugeln des Raumes sind untereinander durch eine lineare homogene Gleichung verbunden, in welcher die Summe der Coefficienten Null ist. 2. Fundamentalsatz. Nennt man wechselseitige Potenz zweier Kreise oder zweier Kugeln, deren Radien r_i und r_j und deren Centrale d_{ij} ist, den Ausdruck a_{ij}, wo

$$d_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2a_{ij} r_i r_j,$$

so ist die Determinante

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55}$$

in der Ebene oder

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} a_{66}$$

im Raume der wechselseitigen Potenzen von fünf Kreisen, resp. sechs Kugeln identisch Null. 3. Geht man zu den Grenzfällen über, so bleibt diese Relation noch bestehen, wenn sich die Kreise auf Punkte oder Gerade, in endlicher oder unendlicher Entfernung, reduciren, mögen sie getrennt sein oder zusammenfallen. 4. Zahlreiche Anwendungen. Im Allgemeinen lässt sich jede descriptive oder metrische Eigenschaft, welche eine Relation zwischen Punkten von Geraden oder Ebenen ausdrückt, anwenden auf das allgemeinere System, indem man die Punkte, Geraden und Ebenen durch Kreise oder Kugeln ersetzt (Principe de mutualité). Mn. (O.)

S. Gundelfinger. Ueber die Transformation einer gewissen Gattung von Differentialgleichungen in krummlinige Coordinaten. Borchardt J. LXXXV. 295-304.

Der Jacobi'sche Satz (Crelle J. XXXVI. 229): „Zur Transformation der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

in beliebige allgemeine (orthogonale oder anorthogonale) Coordinaten reicht es hin, das Quadrat des Linienelements $dx^2+dy^2+dz^2$ zu transformiren," wird dahin verallgemeinert:

„Es seien $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n$; $x_0, x_1, \dots x_n$ zwei Reihen willkürlicher und von einander vollkommen unabhängiger Variabeln. Ferner bedeute V eine Function der $x_0, x_1, \dots x_n$ und J irgend eine simultane Invariante, welche man aus dem Systeme algebraischer Formen der $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n$:

$$\sum_k \xi_k^2,\quad \delta V=\sum_k \xi_k \frac{\partial V}{\partial x_k},\quad \delta^2 V=\sum_{kl}\xi_k\xi_l\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\partial x_l},$$
$$\delta^3 V=\dots,\quad (k, l, \dots = 0, 1, \dots, n)$$

bilden kann, indem man die Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l}, \dots$ als constant betrachtet. Um alsdann die Differentialgleichung $J=0$ in irgend welche krummlinige, durch die Substitution

$$x_k=\varphi_k(\varrho_0, \varrho_1, \dots \varrho_n)\quad (k=0, 1, \dots n)$$

definirte Coordinaten zu transformiren, genügt es, in dem Ausdrucke für das Linienelement

$$\sum_k dx_k^2=\sum_{kl} e_{kl}\,d\varrho_k\,d\varrho_l$$

die Coefficienten e_{kl} zu kennen." Unmittelbar aus dem Beweise des Satzes ergiebt sich, dass er sich noch weiter verallgemeinern lässt, indem man eine beliebige Anzahl Polaren $\delta F, \delta^2 F, \dots$; $\delta W, \delta^2 W, \dots$ irgend welcher andrer Functionen $F, W, \dots$ hinzufügt und aus dem so erweiterten System eine Invariante bildet.

Als Anwendungen werden die Transformationen der Summe $\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2}$, sowie der Ausdrücke für die Hauptkrümmungsradien einer Fläche $V(x_0, x_1, x_2)=$ const. im Punkte x_0, x_1, x_2 gegeben.

Schliesslich wird noch die Bedingung, dass die durch die Gleichungen

$$x_0 = \varphi_0(\varrho_0\varrho_1\varrho_2), \quad x_1 = \varphi_1(\varrho_0\varrho_1\varrho_2), \quad x_2 = \varphi_2(\varrho_0\varrho_1\varrho_2)$$

mit ϱ_2 als veränderlichem Parameter dargestellte Flächenschaar eine Dupin'sche sei, in einer, von der von Herrn Weingarten (Borchardt J. LXXXIII. 12, s. F. d. M. IX. 531) angegebenen, verschiedenen Form aufgestellt. T.

S. Gundelfinger. Ueber die Transformation von Differentialausdrücken vermittelst elliptischer Coordinaten. Borchardt J. LXXXV. 80-88.

Ist

$$\begin{aligned} 2u &\equiv a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + \cdots + a_{22}z^2 + 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33} \\ &\equiv \varphi(x, y, z) + 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in rechtwinkligen Coordinaten, und sind a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' die Richtungscosinus der Normale und der beiden Haupttangenten im Punkte x, y, z der Fläche, so führt die orthogonale Substitution

$$\xi = aX + a'Y + a''Z, \quad \eta = bX + b'Y + b''Z, \quad \zeta = cX + c'Y + c''Z$$

die Function $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ für beliebige, von x, y, z unabhängige Werthe von ξ, η, ζ in die Form

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2 + \mu X^2 - 2\mu' XY - 2\mu'' XZ$$

über (vgl. Hesse, Raumgeometrie, 3. Aufl., Vorl. 30 und 28), wo λ_1, λ_2 die Wurzeln der Gleichung — unter $u_0 u_1 u_2$ die Ableitungen von u nach x resp. y und z verstanden —

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} & u_0 \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & u_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda & u_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sind und, wenn

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$\mu' = \sqrt{\frac{\Delta(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad \mu'' = \sqrt{\frac{\Delta(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

ist. Gleichzeitig sind vermittelst der Gleichungen $D(\lambda_1) = 0$, $D(\lambda_2) = 0$, $u(x, y, z) = 0$ die Coordinaten eines Punktes der Fläche als Functionen der Parameter λ_1, λ_2 dargestellt, deren geometrische Bedeutung die ist, dass $-\frac{1}{\lambda_1}$, $-\frac{1}{\lambda_2}$ mit den gewöhnlich angewendeten elliptischen Coordinaten identisch sind. Die reciproken Werthe von λ_1, λ_2 hatte schon Herr H. Stahl (Clebsch Ann. III. 488, vgl. F. d. M. III. 373 f.) als neue Veränderliche eingeführt, ohne auf den eben angedeuteten Zusammenhang mit dem Hauptaxenproblem der ebenen Schnitte der Fläche einzugehen.

Dies vorausgeschickt, ist es erlaubt, in der oben definirten Substitution, sowie in allen aus ihr folgenden Gleichungen an Stelle der Grössen

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad X, \quad Y, \quad Z$$

resp. zu setzen

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad 0, \quad \frac{d\lambda_1}{2\lambda_1 \mu' \nu}, \quad \frac{d\lambda_2}{2\lambda_2 \mu'' \nu};$$
$$(\nu^{-2} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2).$$

Mit Hülfe dieses Uebertragungsprincips wird nun die Integration der Differentialgleichungen für die Krümmungscurven, die geodätischen Linien und die Circularcurven ebenso an das Hauptaxenproblem der ebenen Schnitte der Flächen zweiter Ordnung geknüpft, wie von Hesse bez. der beiden ersten Arten von Curven an das Hauptaxenproblem der Fläche zweiter Ordnung selbst, und gleichfalls fast ohne alle Rechnung geleistet.

Hervorgehoben sei der sich hierbei ergebende geometrische Satz: Zieht man durch irgend einen Punkt im Raume Parallelen zu den conjugirten Tangenten einer und derselben Krümmungscurve, so erfüllen diese Parallelen eine Kegelfläche zweiten Grades, deren Kreisschnitte denen der gegebenen Fläche parallel sind.

Bemerkenswerth ist noch, dass die gegebenen Entwickelungen von der allgemeinen Form der Flächengleichung ausgehen.

T.

W. Spottiswoode. On the eighteen coordinates of a conic in space. Rep. Brit. Ass. 1880.

Die 6 Coordinaten einer Linie können aus den Gleichungen zweier Ebenen hergeleitet werden als ihr Schnitt durch successive Elimination der Coordinaten. In gleicher Weise kann man mit den Gleichungen eines Kegelschnittes im Raume verfahren. Die Gleichungen seien:

$$(abcdfghlmn \between xyzt)^2 = 0,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0.$$

Eliminirt man der Reihe nach x, y, z, t, so erhält man 4 Formen, die man schreiben kann

$$(CC,\ BB,\ FF,\ BF,\ CF,\ BC \between y,\ z,\ t)^2 = 0,$$
$$(AA,\ CC,\ GG,\ CG,\ AG,\ CA \between z,\ x,\ t)^2 = 0,$$
$$(BB,\ AA,\ HH,\ AH,\ BH,\ AB \between x,\ y,\ t)^2 = 0,$$
$$(FF,\ GG,\ HH,\ GH,\ HF,\ FG \between x,\ y,\ z)^2 = 0.$$

Die 18 Grössen AA, BB etc., deren Werthe sich leicht berechnen lassen, sind die 18 Coordinaten eines Kegelschnittes im Raume.

Csy. (O.)

Faure. Théorie des indices. Nouv. Ann. (2) XVII. 69-75.

Der Verfasser behandelt in diesem Schlussabschnitte der Untersuchungen über die Theorie der von ihm eingeführten Indices die Eigenschaften von vier, durch dieselben Punkte gehenden Oberflächen zweiter Ordnung. Schl.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

Despeyrous. Géométrie analytique généralisée. Mém. de Toul. (7) VIII. 259-284.

H. ONNEN. Aanteekeningen betreffende de theorie der essentiëele vergelijkingen der vlakke kromme lijnen. Nieuw Arch. IV. 30-56.

Die eigenthümlichen Betrachtungen des Verfassers über die Theorie der wesentlichen Gleichungen der Curven (s. F. d. M. VII. 410) werden hier fortgesetzt. Der Verfasser schliesst sich an die kinematische Behandlung der Curven von Lamarle in dessen Buche: „Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral" an.

Erstens behandelt er die Cycloidalen und leitet die Form der Curven aus ihren wesentlichen Gleichungen ab. Hierdurch gelangt er zur Construction und Berechnung des Krümmungsradius. Durch Einführung neuer veränderlicher Grössen erhält er einfachere Resultate und betrachtet dann die Cycloidalen, welche durch die verschiedenen Punkte der Ebene der beschreibenden Curve beschrieben werden, wenn diese die Directrix in einem gegebenen Punkte berührt. Hierbei kommt auch die Focale von Quetelet zur Behandlung, welche durch Umkehrung einer gleichseitigen Hyperbel entsteht. Weiter werden die Cycloidalen untersucht, welche beschrieben werden durch die verschiedenen Punkte einer mit der beschreibenden Curve verbundenen Geraden, dann die Anticycloidalen und die ähnlichen Cycloidalen, erzeugt durch zwei beschreibende Curven, welche über dieselbe Directrix rollen. Der mehr specielle Fall, dass die Generatrix oder die Directrix ein Kreis oder eine Gerade ist, kommt alsdann zur Sprache, wobei zugleich die Hypo- und Epicycloide behandelt werden.

In einer folgenden Abhandlung wird der Verfasser seine Untersuchung fortsetzen. G.

O. SCHLÖMILCH. Ueber Tangenten und Normalen an Curvensystemen. Schlömilch Z. XXIII. 337-339.

Wenn man zwischen einer Curvengleichung, die einen veränderlichen Parameter p enthält, und der Gleichung der au

einem festen Punkte A an die Curve gezogenen Tangente p eliminirt, so erhält man die Gleichung des Ortes der Berührungspunkte aller Tangenten, welche sich aus A an die durch die gegebene Gleichung dargestellte Curvenschaar ziehen lassen. Aehnliches gilt für die Fusspunkte der Normalen. Der allgemeinen Betrachtung sind mehrere specielle Beispiele hinzugefügt.

Schg.

J. Casey. On a new form of tangential equations. Rep. Brit. Ass. 1878.

Die Tangentialgleichung einer Curve ist eine Beziehung zwischen den Coefficienten der Gleichung einer Linie, bei deren Erfüllung die Linie eine Tangente an die Curve sein muss. Eine variable Linie MN mache einen Winkel φ mit der negativen X-Axe und schneide ein Stück v auf ihr ab. Dann ist die Gleichung von MN

$$x+y\cot g\varphi - v = 0.$$

Die Grössen v und φ bestimmen die Lage der Linie und können daher als ihre Coordinaten betrachtet werden. Daher wird eine Relation zwischen v und φ wie

$$v = f(\varphi)$$

die Tangentialgleichung einer Curve sein, welche die Enveloppe der Linie ist.

Diese Form ist bemerkenswerth wegen der Leichtigkeit, mit der sie sich in alle bekannten Gleichungsformen transformiren lässt, und wegen der Einfachheit der Formeln, welche sie für manche geometrische Sachen, wie Rectification, Krümmung etc. giebt.

Das Folgende enthält einige Transformationen, deren die Gleichung fähig ist.

1) Wenn $v=f(\varphi)$ die Tangentialgleichung ist, so erhält man die Cartesische Gleichung durch Elimination von φ zwischen den Gleichungen

$$x = f(\varphi)+f'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi,\; y = -f'(\varphi)\sin^2\varphi.$$

2) Die „intrinsic equation“, welche der Tangentialgleichung $v = f(\varphi)$ entspricht, ist

$$s = f'(\varphi)\sin\varphi + \int f'(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

3) Wenn $s = F(\varphi)$ die „intrinsic equation“ ist, so ist die Tangentialgleichung

$$v = \int \operatorname{cosec}^2\varphi \left\{ \int F'(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi \right\} d\varphi.$$

Die Arbeit enthält noch weitere Transformationen. Auch findet sich darin eine neue Theorie der Fusspunktcurven und der parallelen Curven. Folgender Satz über parallele Curven ist bemerkenswerth: „Jeder Brennpunkt einer Curve ist Doppel-Brennpunkt der parallelen Curven.“

Im letzten Theile wird die Rectification bicircularer Curven vierten Grades durch elliptische Integrale gegeben. Die angewandte Methode lässt sich auch auf sphärische Curven vierten Grades erweitern. Csy. (O.)

W. J. C. Sharp, R. F. Davis. Solutions of a question (5614). Educ. Times XXX. 44-45.

Es sei r der Radiusvector eines Punktes P auf einer Curve, der einem Inflexionspunkt auf der in Beziehung auf den Anfangspunkt inversen Curve entspricht. Dann bildet die Tangente in P mit dem Radiusvector einen Winkel $\arcsin\left(\frac{r}{2\varrho}\right)$, wo ϱ der Krümmungsradius in P ist. O.

H. Léauté. Étude sur le rapprochement de deux arcs des courbes voisins considérés dans une étendue finie. Application au cas d'un cercle et d'un arc de courbe ayant deux sommets voisins. C. R. LXXXVI. 1537-1539.

Auszug aus einer grösseren Abhandlung, deren Resultate ohne Beweis zusammengestellt sind, und die sich zu einem weiteren Auszug nicht eignet. Es sei nur bemerkt, dass der

Ausgangspunkt ein Satz von Tchébycheff ist, wonach dasjenige Polynom n^{ten} Grades, welches sich so wenig wie möglich von Null entfernt, wenn x zwischen den Grenzen $-h$ und $+h$ variirt, die Form hat:

$$(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n.$$

Bl.

E. B. Elliott. A theorem in areas including Holditch's, with its analogue in three dimensions. Messenger (2) VII. 150-156.

Der Satz von Holditch stellt eine Relation auf zwischen dem Flächeninhalte von geschlossenen Curven, die durch einen Stab von constanter Länge beschrieben werden, während der Stab sich in einer Ebene durch einen Cyclus von Lagen in seine ursprüngliche Lage zurück bewegt. In der vorliegenden Arbeit beweist der Verfasser einen entsprechenden Satz, der die Flächen verbindet, welche von 3 Punkten auf einer variirenden Geraden beschrieben werden, wenn dieselben, statt constanter Entfernungen, nur Entfernungen mit constantem Verhältniss haben und die Punkte nach einem vollendeten Cyclus zu ihren anfänglichen Längen und Lagen zurückkehren. Dieser Satz kann folgendermassen ausgesprochen werden: „Durch einen festen Punkt in der Ebene einer geschlossenen Fläche S ziehe man Radiivectores nach allen Punkten des Umfangs und lege Sehnen AB, parallel und gleich diesen Radiivectores, mit einem Ende A immer auf den Umfang einer geschlossenen Fläche (A) und mit dem andern B auf den Umfang einer anderen (B). Ist dann (C) die Fläche, die von einem Punkte beschrieben wird, der AB immer in dem Verhältniss $m:n$ theilt, so sind (A), (B), (C) verbunden durch die Formel:

$$(C)=\frac{m(B)+n(A)}{m+n}-\frac{mn}{(m+n)^2}S.$$

Der Umfang von (A) und (B) muss so beschaffen sein, dass die Punkte A und B rund herumgehen und zu ihrer ersten Lage nicht von derselben Seite aus zurückkehren dürfen, von der aus

sie fortgegangen waren." Die obige Formel zwischen (A), (B) und (C) kann auch in symmetrische Form gebracht werden.

Dieser Satz wird auf drei Dimensionen ausgedehnt. Es wird nämlich gezeigt, dass, wenn (A), (B), (C), (D) die Volumina von Oberflächen sind, die von A, B, C, D, irgend 4 Punkten auf einer variirenden Geraden in gegenseitigen Entfernungen mit constantem Verhältniss, während einer Bewegung erzeugt sind, welche nach vollendetem Cyclus zu ihrer ursprünglichen Lage zurückkehrt, dann

$$\frac{(A)}{AB.AC.AD}+\frac{(B)}{BA.BC.BD}+\frac{(C)}{CA.CD.CB}+\frac{(D)}{DA.DB.DC}=-\frac{V}{AB^3},$$

wo V das durch AB in Bezug auf A beschriebene Volumen bezeichnet. In dem speciellen Fall, wo $ABCD$ ein Stab von constanter Länge ist, so dass AB, AC, AD etc. alle constant sind, ist $V=\frac{4}{3}\pi AB^3$, folglich die rechte Seite der obigen Gleichung gleich $-\frac{4}{3}\pi$. Glr. (O.)

K. Zahradník. Beitrag zur analytischen Geometrie der Ebene. Casopis VII. 248-252 (Böhmisch).

Enthält mehrere methodisch interessante, mit Hilfe von Determinanten durchgeführte Ableitungen. Std.

A. Schiappa Momteira. Sur l'angle d'une courbe avec une droite. Jorn. sc. math. e astr. I. 81-83.

B. Theorie der algebraischen Curven.

P. Serret. Sur un principe unique contenant toute la théorie des courbes et des surfaces d'ordre ou de classe quelconque. C. R. LXXXVI. 39-42.

P. Serret. Sur un théorème de M. Chasles. C. R. LXXXVI. 116-119.

P. Serret. Sur les foyers des courbes de n^{idme} classe. C. R. LXXXVI. 385-387.

P. Serret. Sur l'involution dans les courbes de degré n. C. R. LXXXVII. 643-646.

P. Serret hat anderwärts das Resultat erhalten, dass, wenn $N-1$ die Zahl der eine Curve, Fläche n^{ter} Ordnung (Klasse) bestimmenden Punkte (Tangenten, Tangentialebenen) ist und P_1, $P_2, \dots P_N$ die Distanzen von N Punkten (Tangenten, Tangentialebenen) der Curve, Fläche von einem variablen dualen Elemente sind, dann die Identität

$$\sum_1^N \lambda_1 P_1^n \equiv 0$$

statt hat, und umgekehrt. Dies hat er schon bei den Curven und Flächen 2ten Grades auf Elementenpaare ausgedehnt, so dass z. B.

$$\sum_1^{10} \lambda_1 P_1 Q_1 \equiv 0$$

ausdrückt, dass die 10 Ebenenpaare

$$P_1 Q_1 = 0, \dots P_{10} Q_{10} = 0$$

in Bezug auf eine Fläche 2ten Grades conjugirt sind, (cfr. des Verfassers Géom. de direction, Paris 1869). Eine Gruppe von n Punkten (Geraden, Ebenen) heisst man in Bezug auf eine Curve, Fläche n^{ter} Ordnung (Klasse) conjugirt, wenn mit der gemischten Polare von $n-1$ dieser Elemente das n^{te} incident ist. Dieser (übrigens schon von H. Grassmann (Gött. Nachr. 1872, 567), Rosanes (Borchardt J. LXXVI. 321), Caporali (Transunti dei Lincei (3) I. 232, siehe F. d. M. IX. p. 488) besprochene) Begriff wird hier von neuem aufgestellt, und (als neu) die Relation gewonnen, dass, wenn unter der Potenz einer Gruppe von Punkten (Geraden, Ebenen) in Bezug auf ein duales Element das Product der Entfernungen des letzteren Elements von denen der Gruppe verstanden wird, und Π_1, $\Pi_2, \dots \Pi_N$ die Potenzen von N Gruppen in Bezug auf ein variables Element sind, diese Gruppen sämmtlich conjugirt sind in Bezug auf eine Curve, Fläche n^{ter} Ordnung (Klasse), sobald die Identität

$$\lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 + \dots + \lambda_N \Pi_N \equiv 0$$

erfüllt wird, und umgekehrt. Ist aber

$$N' < N, \quad \text{und} \quad \lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_{N'} \Pi_{N'} \equiv 0,$$

so ist, wie die zweite Note fortfährt, für jede Curve, Fläche, für welche $N'-1$ der Gruppen conjugirt sind, auch die letzte conjugirt. Dies wird benutzt zum Beweise des Chasles'schen Satzes, dass das Centrum einer Curve, Fläche n^{ter} Klasse — die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare der unendlich fernen Geraden, Ebene — zugleich Centrum der mittleren Entfernungen sowohl für jede Gruppe von Berührungspunkten von n parallelen Tangenten, Tangentialebenen, als auch (wenn es sich um eine Curve handelt) für die n reellen Brennpunkte ist. Die dritte Note spricht von der Absicht des Verfassers, eine neue auf reellen Elementen basirende Definition der Brennpunkte einer Curve n^{ter} Klasse zu geben; es wird in ihr zunächst der Beweis des Satzes gebracht, dass, wenn die n Tangenten aus einem Punkte O an die Curve mit einer festen Geraden die Winkel $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, die Strahlen aus O nach den n Brennpunkten die Winkel $\beta_1, \ldots \beta_n$ bilden, dann $\frac{1}{n} \Sigma\alpha = \frac{1}{n} \Sigma\beta$; d. h. beide Strahlengruppen haben dieselbe Axe mittlerer Richtung. Die Note scheint jedoch durch einige Druckfehler entstellt zu sein, z. B. Formel c), auf S. 387 muss wohl heissen:

$$0 = S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \cdots - (\nu_1 - \nu_3 + \nu_5 - \nu_7 + \cdots).$$

In der vierten Note endlich werden die Büschel von n Strahlen durch einen Punkt betrachtet, welche eine in Bezug auf eine Curve n^{ter} Klasse conjugirte Gruppe bilden. Hat man $n+1$ derartige Büschel $F_1 = 0, \ldots F_{n+1} = 0$, so besteht die Identität $\sum_1^{n+1} \lambda_i F_i \equiv 0$. Serret sagt von denselben, sie bilden eine Involution n^{ten} Grades. Er zeigt (eingehend freilich nur bei $n = 4$), dass wenn n dieser Büschel ganz, vom letzten aber $n-2$ Strahlen gegeben sind, die beiden übrigen eine gemeine Involution bilden, oder allgemeiner, wenn vom letzten Büschel $n-\nu$ festgelegt sind, die ν übrigen Strahlen stets eine conjugirte Gruppe auf einer bestimmten Curve ν^{ter} Klasse bilden, je $\nu+1$ solcher Büschel von ν Strahlen also eine Involution ν^{ten} Grades. Sm.

G. Halphen. Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Mém. prés. de Paris. XXVI.

Diese umfangreiche Abhandlung, die im April 1874 der Pariser Akademie vorgelegt, aber erst jetzt veröffentlicht worden ist, bildet den Ausgangspunkt einiger bereits publicirten Untersuchungen desselben Verfassers, durch welche, ebenso wie durch inzwischen erschienene Arbeiten anderer Autoren, namentlich von H. J. S. Smith, London Math. Soc. VI., vergl. F. d. M. Bd. VIII. p. 433, ein Theil des Inhaltes bereits bekannt geworden ist.

Der Verfasser beabsichtigt eine Begründung der Methode, die Cayley zur Bestimmung der in die singulären Punkte einer Curve entfallenden Schnittpunkte mit einer anderen anwendet, und die Untersuchung des Einflusses, den die Singularität einer Curve auf deren Reciprocalcurve und Evolute ausübt. Er geht von der Beziehung aus, die zwischen der Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve in einem singulären Punkt und den unendlich kleinen Segmenten verschiedener Ordnung, die auf der Geraden ausgeschnitten werden, besteht. Diese letzteren berechnen sich aus den Reihenentwickelungen, die nach der Puiseux'schen Methode in einem singulären Punkt sich aufstellen lassen. Die Potenzentwickelungen führen zur Unterscheidung verschiedener Zweige, deren jeder wieder, aus einem „Cyclus" von Partialzweigen bestehend, getrennt von den übrigen auf einer besonderen algebraischen Curve darstellbar ist und als Projection eines (einfachen) Punktes einer Raumcurve (mit im Allgemeinen mehrfach berührender Tangente) angesehen werden kann. In den Ausdruck für die in die Singularität entfallenden Schnittpunkte der Curve mit einer anderen gehen, was übrigens Cayley bereits erkannt hatte, nur einige (die von Halphen später „characteristische Zahlen", von Smith: „critical exponents" genannten) Exponenten der Entwickelungen eines Cyclus ein. Die gebrochenen Zahlen indess, aus denen Cayley, von algebraischen Anschauungen geleitet, jenen Ausdruck zusammensetzte, vermeidet der Verfasser, indem er die Schnittpunkte so auffasst, als ob sie einer Grenz-

lage der gegenseitig beweglichen Schnittcurven angehörten. Eine Anwendung der erhaltenen Formeln auf den Schnitt einer Curve mit ihrer Polaren und Hesse'schen Curve in einem singulären Punkte ergiebt ihm die entsprechende Erniedrigung der Klasse, sowie die herangerückten Wendepunkte. Ich hebe aus der Menge von Theoremen nur einen Satz hervor, den übrigens eine aufmerksame Betrachtung der Cayley'schen Beispiele wahrscheinlich machte, dass nämlich die characteristischen Zahlen für die Entwickelungen der Liniencoordinaten in einem „Cyclus“ denen für die der Punktcoordinaten gleich sind, ein Satz, den inzwischen in bündiger Weise auch Herr Smith bewiesen hat.

Die zweite Hälfte der Abhandlung ist den Evoluten einer algebraischen Curve gewidmet. Es wird der Einfluss bestimmt, den eine Singularität der letzteren auf Ordnung und Klasse der ersteren ausübt, und die Frage nach den Umständen erörtert, unter denen eine Singularität der einen eine solche der anderen nach sich zieht. Dies erfordert eine getrennte Behandlung der im Endlichen, der unendlich weit gelegenen und der in die imaginären Kreispunkte fallenden Singularitäten. — Wenn man von einer Evolute wieder die Evolute bildet und so fortfährt, so ändern einige (in den imaginären Kreispunkten gelegene) Singularitäten bei diesem Process ihren Character überhaupt nicht, andere in der Weise, dass die Curve immer höhere Berührungen mit einer Geraden eingeht, andere (wie die durch Zusammenrücken blos von Rückkehrpunkten entstandenen) verschwinden u. s. w. Da die Beziehung der Curve zu ihrer Evolute eine eindeutige ist, so hat man es hier mit der Veränderung zu thun, welche eine Singularität durch eindeutige Transformation des Trägers erfährt. Ein späterer Aufsatz des Verfassers (Liouville J. (3) II.) knüpft an eine allgemeinere Auffassung dieser Frage an. Aus den vorstehend angegebenen Erörterungen folgert der Verfasser zum Schluss den eleganten Satz, dass Grad und Klasse der successiven Evoluten einer algebraischen Curve, von einer gewissen ab angefangen, zwei arithmetische Progressionen mit derselben Differenz bilden. Bl.

Perrin. Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes. Bull. S. M. F. VI. 84-117.

Es handelt sich um einen neuen Beweis der bekannten Relation zwischen der Anzahl k_1, i_1 der reellen Rückkehr- bez. Wendepunkte, δ'_1, τ'_1 der isolirten Doppelpunkte bez. Doppeltangenten einer ebenen algebraischen Curve von der Ordnung m und der Klasse n:

$$n + k_1 + 2\delta'_1 = m + i_1 + 2\tau'_1,$$

welche Herr Klein durch Verallgemeinerung der Zeuthen'schen Sätze über Doppeltangenten erster und zweiter Art einer Curve vierter Ordnung gefunden hat. Der Beweis, der ebenso wie der Klein'sche auf der Betrachtung continuirlicher Gestaltänderungen der Curve beruht, lässt zwar, wie dieser, bei aller Evidenz der Schlussweise im Einzelnen, den Einwand zu, dass die grosse Mannigfaltigkeit der zu beherrschenden Möglichkeiten eine Controle der Vollständigkeit der untersuchten Fälle wünschenswerth macht, derselbe bietet indess das Interesse eines neuen Ausgangspunktes für die Behandlung der Frage.

Der Verfasser giebt ein einfach unendliches System von Curven J an, das zwischen einer gegebenen Curve U n^{ter} Klasse und ihren n reellen Brennpunkten — bekanntlich den Punkten, deren Verbindungslinien mit den imaginären Kreispunkten Tangenten der Curve sind — eingeschaltet werden können, so dass ein stetiger Uebergang von diesen n unendlich kleinen Ovalen zur Curve U durch Curven J („isomorphiques") hindurch möglich ist. Jede Curve J ist nämlich der geometrische Ort eines Punktes, in welchem zwei conjugirt imaginäre (von den n möglichen) Tangenten an U einen constanten Winkel miteinander bilden. Man kann diese Tangenten als Asymptoten einer Ellipse mit jenem Punkte als Centrum ansehen; dann geht dieselbe bei dem Uebergang von den Brennpunkten zur Curve U aus der Kreisform in eine unendlich abgeplattete über. Die Curven J bestehen nur aus paaren Zügen (Ovalen), die keine reellen Enveloppen besitzen und sich der Curve U von ihrer concaven Seite nähern.

Der Verfasser studirt nun die Uebergänge, durch welche die gegenseitige Lage und der Zusammenhang der Ovale geändert wird. Hierbei spielen eine wesentliche Rolle die isolirten Punkte von U, in welchen Doppel- und Rückkehrpunkte von Curven J entstehen können, die den Uebergang verschiedener Typen vermitteln, sowie die Schnittpunkte conjugirt imaginärer Asymptoten von U. Berücksichtigt man insbesondere die Modificationen, welche die Zahl $2n$ der parallelen Tangenten an die n Ovale, von denen man ausgeht, durch jene Uebergänge bis zu U erfährt, so erhält man einen Ausdruck für die Klasse von U und somit die gesuchte Relation. Bl.

Elliot. Sur les points d'inflexion des courbes algébriques. Darboux Bull. (2) II. 216-232.

Das Verhalten der Gleichung $H = 0$ der Hesse'schen Curve einer ebenen Curve $f(xy) = 0$ in einem singulären Punkte der letzteren untersucht der Verfasser, indem er das Puiseux'sche Verfahren der Reihenentwickelung von y nach Potenzen von x zu Grunde legt. Ersetzt man f bei der Bildung von H durch das erste Glied einer der Entwickelungen in dem singulären Punkte $y = vx^{\mu} + \cdots$, so lässt sich der Beitrag zur Resultante von f und H, der dieser Entwickelung entspricht, finden, indem man die niedrigste Potenz von x bestimmt, die in H auftritt, nachdem jene Substitution gemacht ist. Der Verfasser findet, dass, wenn die gleiche Substitution f in $x^{k}.\varphi(v) + \cdots$ überführt, diese Potenz im Allgemeinen den Exponenten $3k - 2\mu - 2$ hat. Die Fälle, wo der singuläre Punkt mehrere Zweige besitzt, und namentlich wo diese sich gegenseitig berühren, erfordern eine besondere Behandlung. Der Verfasser beweist durch seine Methode den von dem Referenten aufgestellten Satz, dass die Hesse'sche Curve in einem p-fachen Punkte von f einen $(3p-4)$-fachen Punkt besitzt, dessen Tangenten theilweise mit denen von f zusammenfallen, theilweise zu diesen dasselbe Verhalten zeigen, wie die linearen Factoren der Hesse'schen Form einer binären Form zu den Factoren der letzteren. Bl.

E. Ghysens. Sur quelques formules de géométrie et leur application aux courbes algébriques. Bull. de Belg. (2) XLV. 231-247.

E. Catalan. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLV. 154-165.

Erweiterung der in früheren Arbeiten für gewöhnliche Punkte gefundenen Sätze auf vielfache Punkte von Curven.

Mn. (O.)

A. Brill. Ueber die Hesse'sche Curve. Clebsch Ann. XIII. 175-182.

Um das Verhalten der Hesse'schen Curve einer Grundcurve in der Nähe eines vielfachen Punktes der letzteren zu untersuchen, kann man den Punkt zum Coordinatenursprung wählen und dann die Gleichung $f=0$ der Grundcurve ordnen, indem man die Glieder gleicher Dimension zusammenfasst zu Gruppen, welche sich als binäre Formen darstellen. Mit Hülfe derselben und ihrer simultanen Covarianten lässt sich dann die Bildung der Hesse'schen Curve übersehen und ihr Verhalten dahin charakterisiren, dass sie in einem n-fachen Punkte der Grundcurve einen $(3n-4)$-fachen Punkt hat, von dessen Tangenten n mit denjenigen der Grundcurve identisch sind. Während diese Erörterungen den Inhalt der ersten Abtheilung bilden, wird in der zweiten untersucht, wann jene Curve, und speciell die Hesse'sche, im Stande ist, eine andere Curve einer dritten gegenüber zu vertreten, so dass jene erste alle Schnittpunkte der zweiten enthält. Von den gefundenen Resultaten wird in der dritten Abtheilung eine Anwendung auf rationale Curven vierter Ordnung gemacht, welche, neben zwei neuen, noch leicht den bekannten Satz ergiebt, dass die sechs Wendepunkte einer solchen Curve auf einem Kegelschnitte liegen.

Lth.

J. J. Walker. On a method in the analysis of plane curves. Proc. L. M. S. IX. 226-242.

Ist $a_x^n = v$ symbolisch geschrieben eine binäre Form n^{ter} Ordnung, und sind α_x, β_x zwei lineare Formen, so bezeichnet Walker mit $D^r v$ die symbolische Form $a_x^{n-r}\ (a\alpha\beta)^r$ und behandelt nun die Aufgabe, wenn $\alpha_x = 0$ ist, diese Form so umzuwandeln, dass die Formen v und β_x möglichst in Evidenz treten; das Gleiche geschieht für $D^r v D^s w$ und einige andere Formen. Im Falle die Linie $\alpha_x = 0$ die Curve $a_x^n = 0$ berührt, verändern sich die Resultate noch etwas und geben Formeln, die, ebenso wie die obigen, für die einfachsten Fälle ausführlich angeschrieben sind. Eine Anwendung wird davon gemacht auf die Bestimmung derjenigen Punkte einer Curve 4ter Ordnung, in welchen diese von den Inflexionstangenten geschnitten wird. Lth.

J. Petersen. Bevis for en Sätning af Jacobi. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 14-15.

Beweis des Jacobi'schen Satzes über die Summe

$$\Sigma \frac{U_i}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}},$$

welche über das Schnittpunktsystem der zwei Curven $f = 0$ und $F = 0$ erstreckt werden soll. Gm.

Laguerre. Sur certains réseaux singuliers formés par de courbes planes. Bull. S. M. F. VI. 129-136.

Sind A, B, C drei ganze homogene Functionen n^{ten} Grades von $x\,y\,z$, zwischen welchen die identische Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

besteht, so ist das betrachtete Curvennetz gegeben durch die Gleichung

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0.$$

Aus der identischen Gleichung folgt, dass alle Curven durch $n^2 - n + 1$ feste Basispunkte gehen, und dass jede Curve einen Hauptpunkt mit den Coordinaten $\xi\eta\zeta$ besitzt. Der Schnittpunkte

von zweien der Curven, die nicht in die Basispunkte fallen, sind $n-1$, und sie liegen auf einer Geraden, welche durch die Hauptpunkte der beiden Curven geht. Der Ort der Hauptpunkte für alle diejenigen Netzcurven, die einen Doppelpunkt haben, ist eine Curve $3(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und n^2-n-2ter Klasse. Die so für $n=3$ entstehende Curve 4ter Klasse, die zu dem Netze aller Curven 3ter Ordnung gehört, die durch 7 Punkte gehen, ist die allgemeine Curve 4ter Ordnung, und viele der Eigenschaften, die Laguerre in dem Aufsatz beweist, sind für diesen Fall schon von Aronhold in seiner bekannten Arbeit benutzt. Lth.

F. Folie. Principe de la théorie des faisceaux. Bull. de Belg. (2) XLVI. 195-203.

Wenn man α, β, γ zwischen vier Gleichungen der Form

$$F_1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = 0$$

eliminirt, erhält man die Gleichung eines Ortes, der durch die den Curven

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = 0$$

gemeinsamen Punkte geht. Anwendung: Die dreifachen Punkte homologer Strahlen dreier homographischer Büschel liegen auf einer Curve dritten Grades. Mn. (O.)

S. Roberts, H. T. Gerrans. Solutions of a question (5371). Educ. Times XXX. 31.

Bestimmung der Gleichung der Curve, längs welcher sich die Curvenbüschel

$$U+\alpha V = 0, \quad S+\beta T = 0 \quad (\alpha, \beta \text{ Parameter})$$

berühren. O.

B. Igel. Ueber die simultanen Invarianten, aus denen sich die Resultante dreier ternärer quadratischer Formen zusammensetzt. Wien. Ber. LXXVII.

J. Hahn. Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche Form oder Hermite'sche Form identisch verschwindet. Diss. Giessen.

Da man die drei quadratischen Formen im Allgemeinen als Polaren einer ternären cubischen Form auffassen kann, so wird auch die Resultante R derselben die Discriminante Δ der cubischen Form, und der bekannte Ausdruck für Δ in den Invarianten S und T überträgt sich auf die Darstellung von R in den beiden entsprechenden Combinanten des Netzes. Auf diesem Wege wird die Darstellung von R in der ersten Arbeit gegeben, indess nicht so eingehend wie früher bei Gundelfinger (Borchardt J LXXX.), wo auch die cubische Form selbst anders entwickelt wurde. Ausserdem wird in Abschnitt V. von Igel eine Determinante als „gauche symmétrique" bezeichnet, welche dieses nicht ist. Zum Schluss wird in der ersten Arbeit darauf hingewiesen, dass der Fall, wo für das Netz die Combinante s verschwindet, noch nicht ganz erledigt sei.

Die zweite Arbeit behandelt interessante Specialfälle des Netzes: wenn nämlich entweder die Jacobi'sche oder die Hermite'sche Form des Netzes, oder beide, identisch verschwinden. Die Resultate sind: Im ersten Falle besteht zwischen den drei quadratischen Formen eine quadratische Relation, vermöge welcher es möglich ist, dieselben linear in die Formen x^2, y^2, xy überzuführen; die Hermite'sche Form wird dabei zu u^2, wo $u = 0$ die Gleichung des gemeinsamen Doppelpunktes aller Kegelschnitte des Netzes ist; dieselben lassen sich nicht als Polaren einer Curve dritter Ordnung auffassen. Im zweiten Falle haben alle Kegelschnitte des Netzes eine Gerade gemein; die Jacobi'sche Form wird gleich x^3, wenn $x = 0$ die Gleichung dieser Geraden ist, und die Kegelschnitte sind wiederum nicht Polaren einer C_3. Im dritten Falle bilden die Kegelschnitte einen Büschel; besteht dieser Büschel weiter insbesondere aus solchen Kegelschnitten, welche einen gemeinsamen Doppelpunkt haben, so existiren einfach unendlich viele Curven dritter Ordnung mit dreifachem Punkt, als deren Polaren die Kegelschnitte aufgefasst werden können. Nr.

Th. Walter. Ueber den Zusammenhang der ebenen Curven dritter Ordnung mit Kegelschnittschaaren. Diss. Giessen.

Die Arbeit enthält eine analytische Herleitung der von Herrn Schröter auf synthetischem Wege erlangten Resultate, welche in den mathematischen Annalen Bd. V. p. 50 nnd Bd. VI. p. 85 (siehe F. d. M. IV. 281 und V. 311) dargestellt sind, und auf welche sich auch die Arbeit von Herrn Durège (Math. Ann. V, 83, siehe F. d. M. IV. 283) bezieht.

Den Ausgangspunkt bildet die folgende Erzeugungsweise der Curven dritter Ordnung. Legt man an die Glieder einer Kegelschnittschaar mit vier gemeinsamen Tangenten von zwei festen Punkten aus die Tangentenpaare, so erhält man zwei involutorische Strahlbüschel, welche einander projectivisch zugeordnet sind, und zwar, da unter den Kegelschnitten einer die Verbindungslinie berührt, in „halb-perspectivischer" Lage. Der Ort der vier Durchschnittspunkte ist nach Fortlassung jener Verbindungslinie eine Curve dritter Ordnung, welche durch die Centra der beiden Strahlbüschel und die sechs Schnittpunkte der vier gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte hindurchgeht. Wählt man als Centra der involutorischen Büschel die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte, so ist diese Curve der Ort der Brennpunkte der Kegelschnittschaar.

Es wird nun die Gleichung der Curve C_3 aus dieser Erzeugungsart hergeleitet, und darauf werden folgende Relationen analytisch bewiesen: Die Curve C_3 kann aufgefasst werden als die Hermite'sche Curve eines Kegelschnittgewebes oder als die Cayley'sche Curve derjenigen Curve dritter Klasse, deren Polarsystem dieses Gewebe ist.

Diesem Kegelschnittgewebe ist ein Netz von Kegelschnitten conjugirt, als dessen Jacobi'sche Curve die C_3 betrachtet werden kann.

Diejenige Curve dritter Ordnung k_3, deren Polarsystem dieses Kegelschnittnetz ist, hat die C_3 zur Hesse-Steiner'schen Curve.

Diese Betrachtungen werden dann speciell auf die Brennpunktencurve einer Kegelschaar übertragen. Zur Orientirung

über die hier erwähnten Bezeichnungen werde daran erinnert, dass unter einem Netz von Kegelschnitten verstanden werden alle Kegelschnitte, die der Gleichung

$$\lambda p + \mu q + \nu r = 0$$

genügen; wenn p, q, r Functionen des zweiten Grades der Punkt-Coordinaten sind, unter einem Gewebe das polare Gebilde, dessen Gleichung dieselbe in Liniencoordinaten ist. Für jedes Netz (Gewebe) giebt es eine Schaar von Punktepaaren (Geradenpaaren) derart, dass alle Polaren des Netzes in Bezug auf den einen Punkt durch den anderen gehen, (resp. alle Pole des Gewebes in Bezug auf die eine Gerade auf der andern liegen). Der geometrische Ort dieser Punktepaare, welche zugleich die Doppelpunkte der in zwei Gerade aufgelösten Kegelschnitte des Netzes sind, (Geradenpaare, welche zugleich die Doppeltangenten der in zwei Punkte aufgelösten Curve zweiter Klasse des Gewebes sind), heisst die Jacobi'sche Curve des Netzes (Gewebes), und ist vom dritten Grade (von der dritten Klasse). Die Verbindungslinien solcher entsprechender Punktepaare umhüllen eine Curve dritter Klasse, die Hermite'sche Curve des Netzes; (der Ort der Durchschnitte entsprechender Geradenpaare eines Gewebes ist eine Curve dritten Grades, die Hermite'sche Curve des Gewebes).

Ein Netz und ein Gewebe heissen conjugirt, wenn die conjugirten Doppelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte des Netzes zugleich die Punktepaare sind, aus welchen die zerfallenden Kegelschnitte des Gewebes bestehen. Zu jedem Netze giebt es ein conjugirtes Gewebe, und die Hermite'sche Curve des einen Gebildes ist identisch mit der Jacobi'schen des anderen.

Jedes Kegelschnittnetz kann angesehen werden, als das Netz der conischen Polaren einer gewissen Curve dritten Grades k_3, und die Jacobi'sche Curve C_2 des Netzes ist die Hesse-Steiner'sche Curve von k_3; die Hermite'sche Curve des Netzes ist die Cayley'sche Curve der C_3.

Jedes Kegelschnittgewebe kann angesehen werden als das System der Polaren zweiter Klasse einer Curve dritter Klasse, und die Jacobi'sche Curve des Gewebes ist die Hesse-Steiner'sche

Curve dieser Curve dritter Klasse. Die Hermite'sche Curve des Gewebes ist die Cayley'sche Curve der Curve dritter Klasse.

A.

ANELLI. Sopra le curve piane del' terz ordine con un punto doppio. Battaglini G. XVI. 364-376.

Die Arbeit trifft nach Methode und theilweise nach Resultaten zusammen mit der von Rosenow: „Die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte", eine Anwendung der neueren Algebra auf die Geometrie; Inaugural-Dissertation von Breslau, über welche F. d. M. V. p. 349 referirt ist.

Lth.

J. J. WALKER, S. ROBERTS. Solutions of a question (5519). Educ. Times XXIX. 44-45.

Wenn S und T die Fundamentalinvarianten, H die Hessiana der Curve dritten Grades $U=0$ ist, so werden die 12 Linien, auf denen die Inflexionen zu je drei liegen, dargestellt durch:

$$SU^4+TU^3H-188U^2H^2-27H^4=0.$$

O.

TOWNSEND. Solution of a question (5775). Educ. Times XXX. 88-89.

Von jeder Ecke des durch die drei Inflexionstangenten einer Curve dritten Grades gebildeten Dreiecks kann ein Paar Tangenten gezogen werden. Diese berühren alle denselben Kegelschnitt.

O.

LAGUERRE. Sur les courbes de troisième classe. Liouville J. (3) IV. 213-225.

Schon in einer früheren Arbeit (Liouville J. (3) I, s. F. d. M. VI. 413) hatte der Verfasser zu der von ihm sogenannten gemischten Gleichung einer Curve die gemischten Gleichungen ihrer Hesse-

schen und Cayleyschen Curve gegeben. In der vorliegenden Arbeit führt er diese Rechnungen weiter aus, und gelangt dadurch bei der Hesseschen Curve zur Einführung von zwei Polynomen fünften Grades, deren geometrische Bedeutung er untersucht. Ferner werden Sätze gegeben über das aus der gegebenen Curve und ihrer Hesseschen gebildete Büschel und über die Polaren einer Geraden; besonders werden noch die Seiten und die Ecken desjenigen Vierecks angegeben, dem die konischen Polaren aller Linien eines Büschels eingeschrieben sind. Lth.

C. F. GEISER. Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado. Brioschi Ann. (2) IX. 35-41.

Die Gleichung einer Curve 4ter Ordnung kann im Allgemeinen nicht in die Form gebracht werden

$$x_1^4 + 4u_3 x_1 + u_4 = 0,$$

wo u_3 und u_4 homogen und vom resp. 3ten und 4ten Grade in x_2 und x_3 sind; sondern dies geht nur an, wenn die Hessesche Curve einen Doppelpunkt hat. Umgekehrt, hat diese Curve einen Doppelpunkt, so kann jene Form hergestellt werden. Daraus folgt, dass die Hessesche Curve einer Curve vierter Ordnung im Allgemeinen weder Doppel- noch Rückkehrpunkte hat. Auf ähnliche Art zeigt sich auch die Richtigkeit des Satzes für Curven beliebigen Grades. Lth.

J. LÜROTH. Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve 4ter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann. Clebsch Ann. XIII. 548-554.

Einen Beweis für den in Rede stehenden Satz hatte Herr Lüroth zuerst gegeben (Clebsch Ann. I. p. 49), indem er zeigte, dass die Gleichung jeder Curve vierter Ordnung, welche einem Fünfseit umschrieben ist, von der Form

$$\Sigma \varrho_i A_i^4 = 0, \quad i = 1 \dots 5$$

sein muss, deren specielle Natur durch Clebsch bereits bekannt war. Hier benutzt er einen von Herrn Kronecker angedeuteten

Weg, die Untersuchung der Functionaldeterminante der Coefficienten der Curvengleichung: da dieselbe verschwindet, so sind die Coefficienten nicht von einander unabhängig. V.

Laguerre. Sur les courbes du quatrième degré qui ont trois points doubles à inflexion et en particulier sur la lemniscate. Nouv. Ann. (2) XVII. 337-351.

Der Verfasser betrachtet diejenigen Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, welche für jeden der sich in einem Doppelpunkte schneidenden Zweige dort einen Wendepunkt haben. Fallen zwei von diesen Punkten in die Kreispunkte der Ebene, so wird die Curve eine Lemniscate. Wenn das Dreieck der Doppelpunkte als Coordinatendreieck zu Grunde gelegt wird, lautet die Gleichung der Curve

$$ay^2z^2+bz^2x^2+cx^2y^2=0,$$

und von ihr ausgehend beweist der Verfasser zunächst den Satz, dass die cubische Polare eines Punktes der Curve in eine Gerade, die harmonische Gerade, und einen Kegelschnitt, den harmonischen Kegelschnitt des Punktes, zerfällt, und untersucht nun die Lagen dieser beiden Curven in besonderen Fällen, und gelangt besonders in der Specialisirung für die Lemniscate zu einer Reihe von eleganten Sätzen, deren Anführung hier nicht möglich ist. Lth.

F. Meyer. Anwendungen der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Curven, speciell der rationalen Curven 4ter und 5ter Ordnung. Diss. München.

Bei der Wichtigkeit der vielfachen Punkte einer Curve für die Erkenntniss ihrer gestaltlichen Verhältnisse erscheint es von besonderem Interesse, die topologischen Gesetze zu kennen, von denen die Lage derselben abhängt. Nun hatte Herr Tait (s. F. d. M. IX. 392) für die Beurtheilung der Gestalten endlicher ebener Curven zwei fruchtbare Gesichtspunkte angegeben: die Betrach-

tung der auf der Folge der vielfachen Punkte begründeten Haupt- und Normalschemata, sowie der auf der Zertheilung der Ebene in + und — Felder beruhenden Nebenschemata. Die Tait'schen Sätze, bei denen alle keine Verschlingung herbeiführenden Doppelpunkte als unwesentlich betrachtet werden, (topologische Curven), erweitert der Verfasser auf die Betrachtung algebraischer, insbesondere rationaler Curven mit beliebig vielen projectivisch unzerstörbaren Asymptoten. Den zweiten Theil der Arbeit bildet eine topologische Classification der rationalen Curven 4[ter] und 5[ter] Ordnung mit 3, bez. 6 reellen Doppelpunkten, durch welche die Verwendbarkeit der erweiterten Tait'schen Regeln in fruchtbarer Weise veranschaulicht wird. V.

H. J. STEPHEN SMITH. On the singularities of the modular equations and curves. Proc. L. M. S. IX. 242-272.

Gegenstand der Abhandlung ist die Untersuchung der charakteristischen Singularitäten der Modulargleichung

$$(1) \qquad F(p, q, 1) = 0,$$

(wo q das Modulquadrat einer gegebenen elliptischen Function, p das Quadrat des transformirten Moduls für eine primäre Transformation ungrader Ordnung N,) und die Untersuchung der in linearen Coordinaten ausgedrückten Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

der Modularcurve C, welche durch die Substitution $p = \frac{\alpha}{\gamma}$, $q = \frac{\beta}{\gamma}$ mit der Gleichung 1) zusammenhängt. P, Q, R sind die Spitzen des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$; S ist der Punkt $\alpha = \beta = \gamma$; p und q sind die Parameter zweier Linienbüschel $\alpha - p\gamma$, $\beta - q\gamma$, zwischen deren Strahlen die durch Gleichung (1) ausgedrückte Beziehung besteht: die Modularcurve C ist der Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen beider Büschel. Die Methode der Untersuchung ist schon in früheren Arbeiten von dem Herrn Verfasser befolgt, z. B. in einem der Pariser Akademie überreichten Mémoire: „Sur les équations modulaires", das in den Atti d. Acc. d Lincei (3) I. 1877 gedruckt wurde. Zuerst werden hier die Singularitäten

für den Fall untersucht, wo N keinen quadratischen Theiler hat; dann folgt der entgegengesetzte Fall. Für die Charakteristiken und Singularitäten der Modularcurve C ergeben sich folgende Resultate. Es sind g und g' conjugirte Theiler von N; h^2 ist das grösste in N enthaltene Quadrat; η der grösste gemeinsame Theiler von g und g'; $f(\eta)$ die Anzahl der Zahlen, die $\leqq \eta$ und relativ prim zu η; $f'(g)$ und $f'(g')$ sind definirt durch die Gleichung

$$\frac{f'(g)}{g} = \frac{f(\eta)}{\eta} = \frac{f'(g')}{g'};$$

und es ist

$$2\nu = \Sigma f(\eta), \quad A+B = \Sigma f'(g), \quad A_2+B_2 = (A+B)^2,$$

wo die Summe Σ sich auf alle Theiler g von N erstreckt, wo ferner A alle $f'(g)$ umfasst, für welche $g > \sqrt{N}$, und zugleich, wenn $N = \vartheta^2$, den Werth $\frac{1}{2}\vartheta' = \frac{1}{2}f(\vartheta)$, und wo A_2 alle Terme von $\Sigma f'(g_1).\Sigma f'(g_2)$, in denen $g_1 g_2 > N$, und die Hälfte aller Terme, wofür $g_1 g_2 = N$ ist, enthält. Die Definitionen von B und B_2 ergeben sich analog aus denen von A und A_2. Ferner bezeichnen m, n, K, J, D, T, H resp. die Ordnung, die Klasse, die Spitzen- und Flexions-Singularität, die Discriminanten-Ordnung und Klasse und das Geschlecht der Curve. Die Charakteristiken der Curve genügen dann folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m &= 2A,\\
n &= 3A-B-\vartheta',\\
H &= \tfrac{1}{2}(A+B)-3\nu+1,\\
K &= 2(A+B)-6\nu+\vartheta',\\
J &= 5A-B-6\nu-2\vartheta',\\
J-K &= 3A-3B-3\vartheta',\\
D &= 4A^2-5A+B+\vartheta',\\
T &= (3A-B-\vartheta')^2-5A+B+\vartheta',\\
T-D &= (3A-B-\vartheta')^2-4A^2.
\end{aligned}$$

Bezeichnen ferner die Symbole (XXY) oder (YXX) einen Zweig, oder ein Aggregat von Zweigen, die die Linie XY im Punkte X berühren; die Symbole $O(XXY)$, $C(XXY)$, $K(XXY)$, $J(XXY)$, $D(XXY)$, $T(XXY)$ die entsprechenden oben angegebenen Charakteristiken der Zweige (XXY), so hat man:

$$O(PPQ) = A - B;$$
$$C(PPQ) = B - \tfrac{1}{2}\vartheta',$$
$$K(PPQ) = A - B - \nu + \tfrac{1}{2}\vartheta';$$
$$J(PPQ) = B - \nu;$$
$$D(PPQ) = 2A^2 - A_2 - A + \tfrac{1}{2}\vartheta';$$
$$T(PPQ) = B_2 - B^2 - A - \vartheta' B + \tfrac{1}{2}\vartheta' + \tfrac{1}{2}\vartheta'^2;$$

etc. Auf gleiche Weise werden die Charakteristiken von (PRR), (QRR), (PSS), (QSS) etc. und die Symbole $O(X)$, $K(X)$, $D(X)$, $C(XY)$, $J(XY)$, $T(XY)$ etc. behandelt, welche eine ähnliche Bedeutung für die Zweige haben, die durch einen gegebenen Punkt X gehen, oder eine gegebene Linie XY berühren. Im Folgenden werden die 6 Modularcurven discutirt, welche den 6 Transformationen

$$x,\ 1-x,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x}{x-1},\ \frac{x-1}{x}$$

entsprechen, für welche die Modulargleichung ungeändert bleibt.

M.

F. Lindemann. Extrait d'une lettre, concernant l'application des intégrales abéliennes à la géométrie des courbes planes, adressée à M. Hermite.

Ch. Hermite. Extrait d'une lettre à M. Lindemann. (Observations algébriques sur les courbes planes.)

F. Lindemann. Extrait d'une seconde lettre à M. Hermite. Borchardt J. LXXXIV. 294-305.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2. p. 331).

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

J. Müller. Elemente der analytischen Geometrie, bearbeitet von H. Müller. Braunschweig. Vieweg.

W. MINK. Lehrbuch der analytischen Geometrie und der Kegelschnitte. Berlin. Nicolai.

Das Buch ist für den Gebrauch an höheren Lehranstalten bestimmt und enthält den gewöhnlichen Stoff solcher Bücher mit einer Reihe von Aufgaben für die einzelnen Abschnitte. Den Schluss bildet ein kurzer Abriss der Geometrie des Raumes, der den Punkt, die Gerade und die Ebene in Betracht zieht.

O.

A. BOSET. Traité de géométrie analytique précédé des éléments de la trigonométrie rectiligne et de la trigonométrie sphérique. Bruxelles, Mayolez. Paris, Gauthier-Villars. 8°.

Das Buch behandelt nichts weiter, als die Gerade und die Kegelschnitte in der Ebene, nebst den Elementen der Trigonometrie. Die Theile, welche mit Grenzbetrachtungen oder analogen Methoden behandelt werden, sind betreffs ihrer Strenge nicht einwurfsfrei. Das am sorgfältigsten und originellsten gearbeitete Capitel ist das zweite über Brennpunkte. Siehe F. d. M. IX. p. 495.

Mn. (O.)

J. WHITE. Elementary manuel of coordinate geometry and conic sections. London. Hodgson and son.

E. HAIN. Untersuchungen über das Dreieck. Grunert Arch. LXI. 417-427; LXII. 422-443.

Die Abhandlung zerfällt in zehn Abschnitte, von denen jeder ein besonderes Thema verfolgt. Ein zusammenfassendes Referat über die gewonnenen Resultate ist desshalb nicht möglich. Wir bemerken im Allgemeinen, dass der Verfasser die in seinen früheren Arbeiten nach verschiedenen Richtungen aufgenommenen Untersuchungen über Symmetriepunkte und Symmetriegeraden, besonders über die polaren Beziehungen dieser Gebilde in Bezug

auf das Dreieck; auf den Umkreis und Inkreis, und auf andere mit dem Dreieck in Verbindung gebrachte Kegelschnitte in der vorliegenden Arbeit weiter geführt und durch viele einzelne Resultate, welche er auf analytischem Wege durch Rechnungen mit trimetrischen Punktcoordinaten herleitet, bereichert hat. Im Uebrigen begnügen wir uns mit der Inhaltsangabe der einzelnen Capitel: Beziehungen des Umkreises; der Steinersche Kegelschnitt zweier Punkte; über den Polarkreis; Beispiele symmetrischer Transversalensysteme; die Antipunkte des Umkreises; über einige Symmetriekegelschnitte; Punkte Steiner'scher Verwandtschaft; die konischen Polaren; die geraden Polaren; ein Symmetriepunkt erster Ordnung. Schl.

N. van Aubel. Note concernant les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygone quelconque. N. C. M. IV. 40-44.

Anwendungen der Methode der Aequipollenzen.

Mn. (O.)

J. Casey. On the equations of circles. Proc. of London XXVIII. 417-419.

Fortsetzung der Arbeit mit demselben Titel, die 1866 in Proc. of Dublin publicirt worden ist. Die Arbeit wird wahrscheinlich in extenso in den Phil. Trans. erscheinen, weshalb das Referat bis dahin verschoben wird. Cly. (O.)

J. Casey. On a reciprocal relation between the equations of a system of four circles and the equations of a system of four other circles tangential to them. Hermath. 1878.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist der Beweis und die Anwendung folgenden allgemeinen Satzes: Wenn ein Kreis Σ eine Anzahl von Kreisen $S_1, S_2, \dots S_n$ berührt, und wenn man mit $P(i)$ das Product der gemeinsamen Tangenten, die von einem Kreise S_i des

Systems an die anderen Kreise gezogen sind, bezeichnet, so ist die Gleichung des berührenden Kreises Σ ein Factor in der Gleichung

$$\frac{S_1^{\frac{n-2}{2}}}{P(1)} - \frac{S_2^{\frac{n-2}{2}}}{P(2)} + \frac{S_3^{\frac{n-2}{2}}}{P(3)} + \cdots \pm \frac{S_n^{\frac{n-2}{2}}}{P(n)} = 0;$$

und die gemeinsame Tangente an irgend welche 2 Kreise ist eine directe oder transverse, je nachdem sie auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von Σ liegen. Csy. (O.)

P. G. Tait. Note on a geometrical theorem. Trans. of Edinb. IX. 533-534.

Analytischer Beweis des Talbot'schen Satzes: „Wenn zwei Systeme von drei concentrischen Kreisen, deren Radien dieselben Differenzen ergeben, einander schneiden, dann sind die Quotienten aus den Sehnen der Bogen, die auf dem mittleren Kreise jedes Systems herausgeschnitten werden, dividirt durch die äusseren des anderen Systems, einander gleich." Der Verfasser, der einen Beweis mit Quaternionen suchte, erhielt folgenden Satz: Gegeben seien, der Grösse und Richtung nach, 2 entgegengesetzte Seiten eines windschiefen Vierecks; wenn dann eine derselben fest bleibt und die Diagonalen gleiche Länge behalten, so ist der Ort der Endpunkte der anderen Seite eine Ebene. Cly. (O.)

E. Lucas. On the relation between the angles of five circles in a plane or of six spheres in space. Messenger (2) VIII. 37-42.

In dieser Arbeit leitet der Verfasser die allgemeinen Relationen her, welche sich auf die Entfernungen von Punkten, auf Winkel, gerade Linien und Kreise in einer Ebene und auf die Winkel von Ebenen und Kugeln im Raume beziehen, und zwar geschieht dies nur mit Hülfe elementarer Eigenschaften der Determinanten aus der Definition der Potenz eines Kreises. Zuerst wird bewiesen, dass die Potenzen eines Punktes in Bezug auf 5 Kreise oder 6 Kugeln im Raume durch eine lineare und homogene Gleichung verbunden sind, in welcher die Summe der Coefficienten

Null ist. Dann wird als wechselseitige (mutual) Potenz zweier Kreise mit den Radien a und b und der Centrale c definirt: $\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$, und sodann der Satz bewiesen. „Die Determinante, gebildet aus den wechselseitigen Potenzen beliebiger Punkte, gerader Linien oder Kreise in einer Ebene, deren Zahl wenigstens gleich 5 ist, ist identisch Null.“ Ein entsprechender Satz existirt im Raume für 6 oder mehr Punkte, Ebenen und Kugeln. Aus diesem allgemeinen Satze werden 15 Sätze als specielle Fälle hergeleitet, die bekannte Eigenschaften von Kreisen enthalten.

Glr. (O).

V. Schlegel. Ueber die Verallgemeinerung einer Erzeugungsart der Curven zweiten Grades. Schlömilch Z. XXIII. 402-406.

Nach einigen einleitenden Worten behandelt der Verfasser unter Voraussetzung der in den Grassmann'schen Werken, sowie in seiner „Raumlehre“ aufgestellten Begriffe die Aufgabe, den geometrischen Ort eines Punktes zu bestimmen, für welchen die algebraische Summe der Entfernungen von drei gegebenen Punkten constant ist. Es ergiebt sich eine Curve achten Grades, die genauer betrachtet wird. Ist die constante Summe der drei Entfernungen Null, so wird der Ort ein Kegelschnitt, der in dem Falle in einen Kreis übergeht, in welchem die drei gegebenen Punkte die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind. Weiter finden sich noch Andeutungen über andere Specialisirungen, sowie über die erweiterte Aufgabe, wenn vier Punkte gegeben sind, und wenn das Problem im Raume betrachtet werden soll. Zum Schluss wird noch die Construction erwähnt, welche, als Erweiterung der Fadenconstruction der Ellipse, für n beliebige feste Punkte denjenigen Zweig der Curve liefert, für welchen alle Entfernungen positiv sind.

Mz.

E. G. Détermination analytique des foyers dans les sections coniques. Nouv. Ann. (2) XVII. 26-29.

Der Verfasser zeigt, indem er einen Brennpunkt als solchen Punkt definirt, dass sein Abstand von einem beliebigen Punkte des Kegelschnitts eine lineare Function der Coordinaten dieses letzteren Punktes ist, wie man zu zwei Gleichungen gelangt, deren Wurzeln die Coordinaten eines Brennpunktes sind. Zunächst wird nachgewiesen, dass:

$$g^2-ac=0;\quad f^2-bc=0;\quad fg-hc=0$$

die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass:

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

ein vollständiges Quadrat einer linearen Function von x, y sei. Hierauf wird bei unveränderter Axenrichtung der Coordinatenanfang in den Punkt (α, β) verlegt, wodurch die Gleichung, welche durch Nullsetzen des vorigen Ausdrucks entsteht, in:

$$(1)\qquad ax^2+2hxy+by^2+\frac{\partial S}{\partial \alpha}x+\frac{\partial S}{\partial \beta}y+S=0$$

übergeht, während:

$$S=a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2+2g\alpha+2f\beta+c.$$

Schreibt man Gleichung (1) folgendermassen:

$$\lambda(x^2+y^2)=(a+\lambda)x^2+2hxy+(b+\lambda)y^2+\frac{\partial S}{\partial \alpha}x+\frac{\partial S}{\partial \beta}y+S,$$

wo λ eine willkürliche Constante, und setzt die Bedingungen an, unter denen die rechte Seite der letzten Gleichung ein vollständiges Quadrat ist, so hat man:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2-4(a+\lambda)S=0,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)^2-4(b+\lambda)S=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial S}{\partial \beta}-4hS=0.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ist λ zu eliminiren, wodurch:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)^2-4(a-b)S=0$$

hervorgeht. Diese Gleichung, mit der vorhergehenden combinirt, bestimmt die Brennpunkte (α, β) in Bezug auf die ursprünglichen Coordinatenaxen. Mz.

G. Dostor. Nouvelle méthode pour déterminer les foyers des courbes du second degré. Grunert Arch. LXII. 289-296.

Der Inhalt dieses Aufsatzes ist zunächst derselbe wie im voranstehenden Referat. Weiterhin werden aber noch die beiden Kegelschnitte genauer betrachtet, auf welche die Aufgabe, die Brennpunkte eines Kegelschnitts zu finden, führt.

Ferner wird die Gleichung der Axen dieses Kegelschnitts sowohl für rechtwinklige als auch für schiefwinklige Coordinatenaxen aufgestellt. Mz.

A. Scholtz. Sechs Punkte eines Kegelschnittes. Grunert Arch. LXII. 317-325.

Zweck der Abhandlung ist, den Zusammenhang der verschiedenen Formen, unter denen sich die Bedingung, dass 6 Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, algebraisch darstellt, auch auf rein algebraischem Wege nachzuweisen; einen gleichen Zweck verfolgt Hunyady in Borchardt J. LXXXIII. 76ff. (F. d. M. IX. 494); cfr. auch Mertens (Borchardt J. LXXXIV. 355 ff.). Ausgehend von der bekannten 6gliedrigen Determinante, deren Verschwinden der unmittelbare Ausdruck der genannten Bedingung ist, bringt der Verfasser dieselbe mit Hülfe einiger mehr oder weniger bekannten Determinantenrelationen auf diejenigen Formen, welche den Pascal'schen und den Chasles'schen Satz von der Constanz der Doppelverhältnisse analytisch darstellen.

T.

K. Zahradnik. Neue Eigenschaft der Kegelschnitte. Grunert Arch. LXII. 111-112.

Es wird die bekannte Beziehung (vergl. Salmon Conic Sections 4. ed. pag. 215) bei den Kegelschnitten hergeleitet, in der die drei Punkte A, B, C eines Kegelschnitts stehen, welche zu einem beliebig auf dem Kegelschnitte angenommenen Punkte D sich so bestimmen lassen, dass der in je einem von ihnen den

Kegelschnitt osculirende Kreis durch D geht. Bei Salmon ist die Beziehung aber vollständiger angegeben, indem es da heisst: Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist Mittelpunkt des Kegelschnitts — wogegen in dieser Arbeit nur gesagt ist, der Schwerpunkt liegt auf der Nebenaxe des Kegelschnitts. Die Methode des Beweises ist allerdings eine andere, als bei Salmon.

Mz.

A. Sýkora. Neuer Satz von den Kegelschnitten. Grunert Arch. LXI 444-445.

Dieser Satz betrifft die Verallgemeinerung des bekannten Satzes, dass die Abstände der Brennpunkte von einer Tangente ein constantes Product haben. Statt der Brennpunkte sind beliebige auf einer Axe gelegene zum Mittelpunkt symmetrische Punkte genommen.

Mz.

Laguerre. Recherches sur les normales que l'on peut, d'un point donné, mener à une conique. Bull S. M. F. V. 30-43. 1877.

Der Verfasser geht von dem Liouville'schen (Liouville J. (1) VI. 403) Satze aus: „Wenn man in den 4 Schnittpunkten eines Kreises und eines Kegelschnittes Normalen an den Kegelschnitt zieht, und ferner durch den Mittelpunkt des Kreises eine beliebige Secante zieht, so liegt der harmonische Mittelpunkt des Kreismittelpunktes in Beziehung auf die 4 Punkte, in denen die Secante die Normalen schneidet, im Unendlichen“, und leitet daraus eine Reihe von Sätzen über Normalen her, von denen hier der folgende Platz finden möge: „Wenn man mit a, b, c, d die Fusspunkte der 4 Normalen bezeichnet, die man von einem Punkte M an einen Kegelschnitt ziehen kann, und mit A, B, C, D die Mittelpunkte der den Dreiecken bcd, cda, dab, abc umschriebenen Kreise, so schneiden sich die Geraden, die durch diese Punkte parallel den Secanten Ma, Mb, Mc, Md gezogen sind, in einem Punkt μ. Dieser Punkt liegt auf der Geraden, die M mit dem Mittelpunkte des Kegelschnitts verbindet, auf der entgegen-

gesetzten Seite von M in einer Entfernung, die kleiner als die Hälfte davon ist.“ Der Verfasser wendet sich sodann zur Lösung der Aufgabe: Zu bestimmen die Kegelschnitte, die 4 gegebene Gerade, die durch einen Punkt M gehen, orthogonal schneiden. Angehängt finden sich 3 Noten, deren erste von der Bestimmung eines Kegelschnitts handelt, von dem man die Axen und zwei Normalen kennt. Die zweite giebt einige Sätze über Normalen an Curven und Flächen zweiten Grades, die dritte endlich behandelt eine Invariante zweier cubischen Formen, die in der Theorie der Normalen an einen Kegelschnitt auftritt.

O.

S. Roberts. Notes on the normals of conics. Proc. L. M. S. IX. 65-75.

Diese Arbeit enthält in gedrängter Kürze eine beträchtliche Anzahl von Sätzen, welche sich auf Kegelschnittnormalen beziehen. Die Methode der Herleitung ist sehr einfach; und der Vortheil, welcher dem Leser der Arbeit geboten wird, ist der, dass diese Sätze, welche sonst in verschiedenen Arbeiten zerstreut sich vorfinden, in geordneter Aufeinanderfolge gegeben sind. Zu Anfang ist hauptsächlich von rechtwinkligen Geraden, die in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, die Rede; von den Polen zweier solchen Geraden, und wie der Ort des einen Poles mit dem des andern zusammenhängt. Ebenso, wie die Enveloppe der einen von zwei senkrechten conjugirten Geraden mit der Enveloppe der andern in Beziehung steht. Es wird dies dann auf Kegelschnitte, die mit dem gegebenen confocal, und weiterhin auf solche, die mit dem gegebenen concentrisch, coaxial und ähnlich sind, ausgedehnt. U. s. w.

Mz.

H. T. Gerrans, Evans, S. Roberts, E. Rutter. Solutions of a question (5407). Educ. Times XXX. 45.

Zwei Systeme von Kegelschnitten haben jedes einen gemeinsamen Brennpunkt und gemeinsame Directrix. Dann ist der

Ort der Schnittpunkte entsprechender Kegelschnitte mit gleicher Excentricität vom 4ten Grade. O.

J. Hammond, Evans. Solutions of a question (4870). Educ. Times XXIX. 20-21.

Gegeben sind 3 Kegelschnitte, welche durch 4 gemeinsame Punkte gehen. Auf dem ersten ist ein Punkt A, auf dem zweiten ein Punkt B, auf dem dritten ein Punkt C angenommen. Es werde auf dem ersten ein Punkt A', und entsprechend auf dem zweiten und dritten B' und C' so bestimmt, dass die Schnittpunkte

von $A'B'$ und AC, $A'C'$ und AB auf dem ersten,
- $B'C'$ - BA, $B'A'$ - BC - - zweiten,
- $C'A'$ - CB, $C'B'$ - CA - - dritten

Kegelschnitt liegen. O.

J. Johnston, C. Bickendike, H. W. Harris, D. Edwards. Solutions of a question (5467). Educ. Times XXIX. 69.

Wenn drei Kegelschnitte einander berühren und einen gemeinsamen Brennpunkt haben, so schneiden die gemeinsamen Tangenten zweier von ihnen die Directrices des dritten in Punkten, die in einer Geraden liegen. O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte im Allgemeinen von R. Tucker, S. Tebay, J. J. Walker, W. J. C. Sharpe, Townsend, Ch. Ladd, finden sich Educ. Times XXIX. 71, 88; XXX. 92.

O.

W. Gallatly. To find the directrix of the parabola

$$(ax+by)^2+2dx+2cy+f=0.$$

Educ. Times XXIX. 37-38.

Analytische Lösung der Aufgabe. O.

J. VINCENZO and S. RUGGERO. Solutions of a question (5462). Educ. Times XXIX. 24.

Ein variabler Kreis geht durch 2 gegebene Punkte. Durch einen derselben gehen 2 gegebene Linien. Dann ist die Enveloppe der Sehne, welche die beiden andern Schnittpunkte des Kreises mit diesen Geraden verbindet, eine Parabel. O.

M. L. HOLMAN and E. A. ENGLER. The tangent of the parabola. Am. J. I. 379.

In dieser Arbeit werden die bekannten Eigenschaften der Parabel, die sich auf ihre Tangenten beziehen, mit Hülfe der Quaternionenrechnung behandelt. Mz.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über die Parabel von COCHEZ, R. TUCKER, WOLSTENHOLME finden sich Educ. Times XXX. 38, 109.

O.

R. HOPPE. Minimumsaufgabe. Grunert Arch. LXII. 215-218.

Lösung der Aufgabe: Die Ellipse von kleinstem Flächeninhalt zu finden, welche einen gegebenen Brennpunkt hat und durch 2 gegebene Punkte geht. O.

E. DUBOIS. De quelques propriétés des arcs d'ellipses. N. C. M. IV. 11-15.

Vom Mittelpunkte einer Ellipse fälle man Lothe p und q auf die Tangente und die Normale eines Punktes der Curve. Der Verfasser bestimmt den Werth von p und q und das Maximum von q, sucht ferner die Punkte, wo q einer gegebenen Länge gleich ist, und gelangt so zu bekannten Sätzen über Ellipsenbogen. Mn. (O.)

W. W. Hendrickson and W. W. Johnson. Solution of a problem (217). Analyst V. 154-156, 175-176.

Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist fest. Ueber den beiden Katheten errichtet man Quadrate. Man soll den Ort des Schnittpunktes der beiden geraden Linien finden, die von den Endpunkten der Hypotenuse nach den entferntesten Ecken der Quadrate gezogen werden. Glr. (O.)

Weitere Lösungen von Aufgaben über geometrische Oerter etc., die auf Linien 1ten und 2ten Grades führen, von R. F. Davis, J. O'Regan, J. Hammond, H. Murphy, R. Knowles, W. Gallatly, Scheffer, J. L. McKenzie, Ch. Ladd, Nash finden sich Educ. Times XXIX. 99; XXX. 20, 39, 92, 97, 98.

O.

H. Léauté. Étude géométrique sur quelques propriétés relatives aux courbes du second degré d'un théorème d'Abel. Mém. de Toul. (7) VIII. 139-150.

D. Andere specielle Curven.

Th. Walter. Ueber den Zusammenhang der ebenen Curven dritter Ordnung mit Kegelschnittschaaren. Pr. Büdingen. Diss. Giessen.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. B. p. 463.

A. S. Hart. On the intersection of plane curves of the third order. Trans. of Dublin. 1878.

Im sechsten Bande des Cambridge and Dublin Mathematical Journal findet sich eine lineare Construction zur Bestimmung des neunten Schnittpunktes von Curven dritter Ordnung, welche durch

8 gegebene Punkte gehen. Die vorliegende Arbeit lösst dasselbe Problem analytisch, d. h. also das Problem, die Coordinaten des neunten Punktes zu finden, wenn die Coordinaten von 8 Punkten gegeben sind.

Die gegebenen Punkte mögen durch die Indices 1, 2, 3 ... 8 bezeichnet werden, und die Linien, welche die Punkte 1, 5; 2, 6; 3, 7; 4, 8 verbinden, mit x, y, z, w resp. Setzt man dann zur Abkürzung:

$$y_1 y_5 = \beta_1, \quad z_1 z_5 = \gamma_1, \quad w_1 w_5 = \delta_1,$$
$$x_2 x_6 = \alpha_2, \quad x_3 x_7 = \alpha_3, \quad x_4 x_8 = \alpha_4, \quad \text{etc. etc.,}$$

so ist nach Carnot's Satz die Bedingung dafür, dass alle Punkte ausser 1, 5 auf einem Kegelschnitt liegen,

$$X = \gamma_2 \delta_3 \beta_4 - \delta_2 \beta_3 \gamma_4 = 0$$

und ebenso

$$Y = \delta_1 \alpha_3 \gamma_4 - \gamma_1 \delta_3 \alpha_4 = 0, \quad Z = \beta_1 \delta_2 \alpha_4 - \delta_1 \alpha_2 \beta_4 = 0,$$
$$W = \gamma_1 \alpha_2 \beta_3 - \beta_1 \gamma_2 \alpha_3 = 0.$$

Setzt man dann:

$$\alpha_2 Y = a_2, \quad \alpha_3 Z = a_3, \quad \alpha_4 W = a_4, \quad \beta_1 X = b_1, \quad \beta_3 Z = b_3, \quad \beta_4 W = b_4,$$
$$\gamma_1 X = c_1, \quad \gamma_2 Y = c_2, \quad \gamma_4 W = c_4, \quad \delta_1 X = d_1, \quad \delta_2 Y = d_2, \quad \delta_3 Z = d_3,$$

so wird bewiesen, dass die Coordinaten des neunten Schnittpunktes der Curven dritter Ordnung sind:

$$\begin{aligned} x_9 = {} & a_2^2 c_1 d_1 (b_1 + b_3 + b_4) + a_3^2 d_1 b_1 (c_1 + c_2 + c_4) + a_4^2 b_1 c_1 (d_1 + d_2 + d_3) \\ & + a_2 a_3 d_1 \{(b_1 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2 + c_4) + b_1 c_1 - b_4 c_4\} \\ & + a_3 a_4 b_1 \{(c_1 + c_2 + c_4)(d_1 + d_2 + d_3) + c_1 d_1 - c_2 d_2\} \\ & + a_4 a_2 c_1 \{(d_1 + d_2 + d_3)(b_1 + b_3 + b_4) + d_1 b_1 - d_3 b_3\}, \end{aligned}$$

und analoge Werthe für y_9, z_9, w_9. Csy. (O.)

H. M. Jeffery. On plane cubics of the third class with three single foci. Quart. J. XVI. 65-83.

Im Anschluss an seine Untersuchungen über Curven dritter Klasse mit einem dreifachen, bez. einem doppelten und einem einfachen Brennpunkte (Quart J. XIV. p. 53 und p. 359, F. d. M. VIII. p. 512, 476) wendet sich Herr Jeffery hier zu dem Falle dreier einfacher Brennpunkte. Die Eintheilung erfolgt nach der

Lage derselben gegen die unendlich ferne Gerade. Für eine bestimmte Lage der drei Brennpunkte wird jedesmal die Form der Gleichung der Curve in Hesse'schen Liniencoordinaten (Boothian Coordinates) gegeben; characteristisch ist für dieselbe die Lage des begleitenden Punktes (satellite point), d. h. des Schnittpunktes der von den Brennpunkten an die Curve gezogenen (reellen) Tangenten. Insbesondere wird die Zahl der Doppeltangenten (critic lines) in jeder Gruppe ermittelt, deren Character durch die Lage des begleitenden Punktes gegen diejenige Curve (bounding curve) bestimmt wird, auf welcher letzterer liegen muss, damit die Doppeltangente stationär wird. V.

J. Hammond, T. Murley. Solutions of a question (5805). Educ. Times XXX. 95-96.

Ein Kegelschnitt hat im Punkte P fünfpunktige Berührung mit der Curve $y = a + bx + cx^3$ und schneidet sie zum zweiten Male in Punkt Q. Bewegt sich P längs der Curve, so ist die Enveloppe der Geraden PQ

$$y = a + bx + \frac{343}{100} cx^3.$$

O.

A. Kolaćík. Das Blatt des Descartes. Casopis VII. 113-121, 146-157. (Böhmisch).

Eine gedrängte Monographie dieser Curve, durchgeführt mit Hilfe des Parameters u, der die Gleichung derselben in der Form

$$x = \frac{3au}{1+u^3}, \quad y = \frac{3au^2}{1+u^3}$$

erscheinen lässt. Std.

G. Darboux. Sur la rectification des ovales de Descartes. C. R. LXXXVII. 595-597.

Ohne weitere Rechnung, sondern nur durch ein combinatorisches Verfahren gelangt der Verfasser, indem er von dem Satze

ausgeht, dass die Differenz der Bogen des Ovals, die zwischen zwei von demselben Brennpunkt ausgehenden Radien vectoren liegen (oder die Summe, wenn die beiden Punkte, in denen der Radius vector die Curve trifft auf entgegengesetzten Seiten vom Brennpunkte aus liegen,) einem Ellipsenbogen gleich ist, zu folgendem, schon früher durch Rechnung nachgewiesenen Satze: Irgend ein Bogen des Cartesischen Ovals lässt sich durch drei Ellipsenbogen ausdrücken. Mz.

G. Darboux. Addition à la note sur la rectification des ovales de Descartes. C. R. LXXXVII. 741.

Nicht Herr Roberts hat zuerst die Rectification des Descartesschen Ovale gegeben. Genocchi hat im Il Cimento schon 1855 sein Theorem, das er Nov. 1873 der Academie überreichte, veröffentlicht: ebenso 1864 in Tortolini Ann. VI. M.

G. Darboux. Sur la rectification d'une classe de courbes du 4ième ordre. C. R. LXXXVII. 692-694.

In diesem Aufsatz ist eine Ausdehnung der vom Cartesischen Oval bekannten Rectification auf bicirculare Curven vierten Grades, sowie auf solche Raumcurven, welche durch den Durchschnitt einer Fläche zweiten Grades mit einer Kugel entstehen, enthalten. Mz.

J. W. Sharp, J. Hammond. Solution of a question (5333). Educ. Times XXIX. 86-87.

Die Berührungspunkte paralleler Tangenten eines Cartesischen Ovales liegen auf einem Kegelschnitte, der durch 4 feste Punkte geht. O.

K. Zahradnik. Ueber die Cardioide. Prag. Ber 1877. 184-191.

I. Pole constanter Berührungsdreiecke bei der Cardioide.

An eine Cardioide, deren Gleichung

$$K \equiv (x^2+y^2)^2 - 4ax(x^2+y^2) - 4a^2y^2 = 0,$$

gehen von einem beliebigen Punkte (xy) der Ebene drei Tangenten, deren Berührungspunkte aus der in u cubischen Gleichung

$$u^3 + \frac{3x}{y}u^2 - 3u - \frac{x-4a}{y} = 0$$

gefunden werden, insofern nämlich, wenn u_1 eine der Wurzeln dieser Gleichung,

$$\frac{4a(1-u_1^2)}{(1+u_1^2)^2}, \quad \frac{8au_1}{(1+u_1^2)^2}$$

Abscisse und Ordinate des zugehörenden Berührungspunktes sind. Die drei Berührungspunkte bilden nun ein Dreieck, dessen Pol der Punkt (xy) genannt wird. Es wird hierauf die Bedingung eingeführt, dass dieses Dreieck constanten Inhalt haben soll, und dann als Ort des Punktes (xy) eine Curve achten Grades gefunden. Weiterhin ist auch von dem Curvenbüschel von Curven achten Grades die Rede, das herauskommt, wenn jener constante Dreiecksinhalt der Reihe nach verschiedene Werthe annimmt.

II. Zusammenhang zwischen dem Pole und dem Schwerpunkte des Berührungsdreiecks bei der Cardioide.

Es wird die Aufgabe behandelt, den geometrischen Ort des Poles eines Berührungsdreiecks zu finden, wenn der Schwerpunkt dieses Berührungsdreiecks eine gegebene Curve durchläuft. Die Methode der Lösung ist dieselbe, wie vorher; und die Coordinaten des Schwerpunktes stellen sich als rationale Functionen der Coordinaten des entsprechenden Poles dar. Die Gradzahl im Zähler und Nenner ist vier, woraus folgt, dass der Pol eine Curve vom Grade $4n$ beschreibt, wenn der entsprechende Schwerpunkt sich auf einer Curve n^{ten} Grades bewegt. Mz.

K. ZAHRADNIK. Geometrischer Ort der Punkte constanter Berührungsdreiecke in Bezug auf die Cissoide.
Prag. Ber. 1877. 125-129; Grunert Arch. LXII. 443-448.

Es ist die Aufgabe behandelt, den Ort des Punktes P zu finden, so dass die drei von P an die Cissoide gehenden Tan-

genten Berührungspunkte haben, die Ecken eines Dreiecks von constantem Inhalt sind. Die Methode der Lösung ist richtig, und es kommt auch als Ort des Punktes P eine Curve fünften Grades; doch muss gegen Schluss ein Versehen gemacht sein, da die letzte Gleichung, sowie Einiges von dem Voraufgehenden nicht stimmt. Mz.

SCHWERING. Die Parallelcurve der Ellipse als Curve vom Range Eins, unter Anwendung eines neuen Liniencoordinatensystems. Pr. Brilon.

Nach Angabe des Verfahrens, durch welches man zur Punktgleichung derjenigen Curve gelangt, welche der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ parallel ist, stellt der Verfasser folgendes Coordinatensystem auf. In den Endpunkten der kleinen Axe der Ellipse ziehe man die Tangenten, und definire eine gerade Linie der Ebene durch die Stücke, welche sie auf jenen Tangenten, vom Berührungspunkt an gerechnet, bestimmt. Nennt man diese Stücke u und v, so ist hiernach die Tangentialgleichung der Ellipse $uv=a^2$. Bedeutet k das Stück, um welches die Normalen der Ellipse zu verlängern (und zu verkürzen) sind, damit man die Punkte der Parallelcurve erhalte, so ist die Tangentialgleichung der letzteren:
$$[4b^2(uv-a^2)+k^2(4b^2+(u-v)^2)]^2 = 4b^2k^2(u+v)^2(4b^2+(u-v)^2).$$
Die Curve ist daher vierter Klasse — und, wie die Punktgleichung lehrt — achten Grades. Ihr Defect ist eins, sie hat acht Doppelpunkte und zwölf Rückkehrpunkte, ferner zwei Doppeltangenten. Ihre Liniencoordinaten und ebenso ihre Punktcoordinaten lassen sich durch elliptische Functionen eines Parameters ausdrücken, und es wird dies unter Zugrundelegung der Functionen von Weierstrass genau durchgeführt. Mz.

K. ZAHRADNIK. Aus Kegelschnitten abgeleitete Curven. Casopis VII. 168-173. (Böhmisch).

Std.

J. C. Malet, H. T. Gerrans. Solution of a question (5520). Educ. Times XXIX. 24-25.

Die 6 Inflexionstangenten einer unicursalen Curve vierten Grades berühren alle denselben Kegelschnitt. O.

F. Pursei. Note on the geometrical treatment of bicircular quartics. Rep. Brit. Ass. 1878.

Die in dieser Arbeit gegebene Definition einer bicircularen Curve 4ter Ordnung ist folgende: „Sie ist der Ort der Punkte, deren Quasipolare in Bezug auf einen Kreis J einen Kegelschnitt F berührt.“ Unter Quasipolare versteht der Verfasser die Parallele zur Polare in der Mitte zwischen Punkt und Polare. Abgesehen von dem Worte Quasipolare ist übrigens diese Definition nicht neu. Sie ist überhaupt keine Definition, sondern ein Satz, der z. B. in des Referenten „Treatise on bicircular quartics“ bewiesen ist. Csy. (O.)

Picquet. Sur une nouvelle espèce de courbes et de surfaces anallagmatiques. C. R. LXXXVII. 460-463.

Die französischen Mathematiker nennen „anallagmatische“ Curven (Flächen) die Enveloppen von Kreisen (Kugeln), welche, während das Centrum eine gegebene Leitcurve (déférente) beschreibt, beständig einen festen Kreis (Kugel) orthogonal schneiden. Der Verfasser findet, dass jede (hyperelliptische) Curve n^{ter} Ordnung mit $(n-2)$-fachem Punkte, die einfach durch die imaginären Kreispunkte geht, und deren andere $n-2$ unendlich weite Punkte beziehungsweise auf den Tangenten des vielfachen Punktes liegen, anallagmatisch ist in Bezug auf den Kreis, dessen Mittelpunkt im vielfachen Punkt liegt, und der durch die Berührungspunkte der $2(n-1)$ Tangenten hindurchgeht, die man von diesem aus an die Curve ziehen kann. Die Leitlinie ist eine (rationale) Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse und $2(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $2(n-3)(n-4)$ Doppel- und $3(n-3)$ Rückkehrpunkten, welche die unendlich

ferne Gerade $(n-2)$-mal berührt. In analoger Weise erzeugt man anallagmatische Flächen im Raume. Bl.

G. Frattini. Equazione di certe curve del quint'ordine. Battaglini G. XVI. 377.

Aufstellung der Gleichung für den Fall von 3 Doppelpunkten und 2 Spitzen. O.

A. M. Démonstrations directes de quelques propriétés connues relatives à la courbe enveloppe d'un segment de droite de longueur constante qui se meut dans un angle. Nouv. Ann. (2) XVII. 321-325.

In dieser Arbeit werden auf sehr einfache Weise und ohne jeden Aufwand von Rechnung die zunächst liegenden Eigenschaften der im Titel definirten Curve bewiesen. Es wird gezeigt, wie man den Berührungspunkt auf einer gegebenen Tangente findet; hierauf folgt die Besprechung der Normale und dann der Evolute, welche eine Curve derselben Art wie die ursprüngliche ist, nur dass an Stelle eines beliebigen Winkels ein rechter Winkel getreten ist. Zuletzt wird noch die Rectification einer solchen Curve, bei welcher der feste Winkel ein rechter ist, behandelt. Mz.

S. Roberts. On the sextic curves represented by

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{2}{3}}=0$$

and the correlative quartics. Quart. J. XV. 224-230.

Die Gleichung der oben bezeichneten Curven, als deren Typus die Evolute eines Kegelschnittes betrachtet werden kann, lässt sich in die Form bringen

$$\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\right)^3-27\,\frac{x^2y^2z^2}{A^2B^2C^2}=0.$$

Sie hat sechs Spitzen, welche auf dem Durchschnitt des Kegel-

schnitts $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=0$ mit den drei Geraden $x=0$, $y=0$, $z=0$ liegen, und jede dieser drei Geraden ist die gemeinsame Rückkehrtangente für die Spitzen, die sie verbindet. Die Curve hat vier Doppelpunkte, deren Coordinaten sich verhalten wie $\pm A:\pm B:C$. Die Tangenten in den Doppelpunkten berühren den oben genannten Kegelschnitt.

Stellt man die Gleichung des Systems der vier durch einen Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ gehenden Tangenten auf und dann diejenige ihrer Durchschnittspunkte mit der Geraden $z=0$, so findet man als Invarianten der betreffenden binären Form vierten Grades

$$S=\tfrac{1}{12}\left(\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{y_1^2}{B^2}+\frac{z_1^2}{C^2}\right)^2,$$

$$T=\tfrac{1}{216}\left\{54\,\frac{x_1^2y_1^2z_1^2}{A^2B^2C^2}-\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\right)^3\right\}.$$

Nun lässt sich der Bruch $\frac{S^3}{T^2}$ durch das anharmonische Verhältniss jener vier Elemente ausdrücken. Man kann daraus folgern, dass, wenn $x_1\, y_1\, z_1$ auf dem oben erwähnten Kegelschnitt liegt, das anharmonische Verhältniss der vier Tangenten constant und zwar einer imaginären cubischen Einheitswurzel gleich ist. Allgemeiner findet man unter der Bedingung, dass das anharmonische Verhältniss constant sei, als Ort von x, y, z zwei Curven mit den Gleichungen

$$\left(\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{y_1^2}{B^2}+\frac{z_1^2}{C^2}\right)^3\pm\varkappa\left\{24\,\frac{x_1^2y_1^2z_1^2}{A^2B^2C^2}-\left(\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{y_1^2}{B^2}+\frac{z_1^2}{C^2}\right)^3\right\}=0,$$

woraus u. a. folgt, dass das anharmonische Verhältniss Null wird, oder dass zwei Tangenten zusammenfallen, wenn der Punkt auf einer der Geraden $x=0$, $y=0$, $z=0$ oder auf der Curve selbst liegt.

Bedeutet $x\,y\,z$ einen Punkt der Curve, und $X\,Y\,Z$ einen Punkt, der auf der Tangente in $x\,y\,z$ und auf dem mehrfach erwähnten Kegelschnitt liegt, so erhält man durch die Substitution

$$x=A\xi^3,\quad y=B\eta^3,\quad z=C\zeta^3$$

die Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$
$$\frac{X}{A\xi} + \frac{Y}{B\eta} + \frac{Z}{C\zeta} = 0,$$
$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 0,$$

und schliesslich durch Elimination von $A, B, C, \xi, \eta, \zeta$ die Gleichung

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} + \frac{z}{Z} = 0.$$

(Es ist zu bemerken, dass in der Originalabhandlung statt ξ, η, ζ bezüglich $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}$ gesetzt ist, und dass die Elimination sich in symmetrischer Weise ausführen lässt, während in der Abhandlung ein unsymmetrischer Weg gewählt ist, der das Wesen der Transformation nicht recht erkennen lässt.) Die letzte Gleichung zeigt, dass die Berührungspunkte der vier von einem Punkte des Kegelschnittes $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 0$ an die Curve gelegten Tangenten in einer Geraden liegen; diese Gerade aber berührt ausserdem die Curve in einem Punkte $x_1 y_1 z_1$. Denn setzt man

$$X = A\xi_1, \quad Y = B\eta_1, \quad Z = C\zeta_1,$$

so ist

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 0$$

und

$$x_1 = A\xi_1^3, \quad y_1 = B\eta_1^3, \quad z_1 = C\zeta_1^3,$$

also ist $x_1 y_1 z_1$ ein Punkt der Curve, und $\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} + \frac{z}{Z} = 0$ die Gleichung der Tangente in diesem Punkte. Die Curve, deren Gleichung ist

$$\frac{1}{A^2x^2} + \frac{1}{B^2y^2} + \frac{1}{C^2z^2} = 0,$$

ist das der besprochenen Curve nach dem Princip der Dualität entsprechende Gebilde, an welchem man die analogen Eigenschaften erkennt. Insbesondere lassen sich von jedem Punkte dieser Curve vier Tangenten an dieselbe legen (die Tangente im Punkte selbst nicht mitgerechnet); das anharmonische Verhältniss

derselben ist constant. Jede dieser vier Tangenten hat ausser dem Berührungspunkte noch einen zweiten Schnittpunkt mit der Curve. Diese vier zweiten Schnittpunkte liegen in einer Geraden, welche den Kegelschnitt

$$A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 = 0$$

berührt, u. s. f.

Die Constanz gewisser bei den betrachteten Curven vorkommender anharmonischer Verhältnisse führt den Verfasser schliesslich zur Erörterung einer allgemeineren Methode, wonach diese Constanz bei algebraischen Gebilden beurtheilt werden kann. Bestimmt sich nämlich für jeden Punkt einer algebraischen Curve ein anharmonisches Verhältniss, so ist, da die Coordinaten des Punktes Functionen eines Parameters α sind, auch das anharmonische Verhältniss eine Function von α (die rational oder irrational sein kann). Dann führt die Bedingung, dass das anharmonische Verhältniss einen gegebenen Werth, z. B. Null habe, stets auf eine Gleichung zur Bestimmung von d, welche nur dann widersprechend sein kann, wenn das anharmonische Verhältniss constant ist. Kann man also beweisen, dass das anharmonische Verhältniss nicht Null sein kann, d. h. dass zwei Elemente, die es bestimmen, nie zusammenfallen können, so muss dasselbe constant sein. An eine Curve sechster Klasse, wie wir sie oben betrachtet haben, z. B. lassen sich von jedem Curvenpunkte aus vier Tangenten legen, von denen nie zwei zusammenfallen können, also ist das anharmonische Verhältniss derselben constant. Eine gleiche Schlussweise lässt sich häufig anwenden.

A.

J. C. Malet. On the negative pedal of a central conic. Trans. of Dublin. 1878.

Ein Theil der in dieser Arbeit besprochenen Eigenschaften ist für eine allgemeine Klasse von Curven nachgewiesen, nämlich für unicursale Curven 6ten Grades mit 6 Spitzen. Für diese gelten z. B. folgende Sätze:

1) Die 6 Spitzen liegen auf einem Kegelschnitt.

2) Die 6 Cuspidaltangenten berühren einen Kegelschnitt.

3) Die 8 Tangenten an den 4 Doppelpunkten berühren einen Kegelschnitt.

4) Die 6 Berührungspunkte der drei Doppeltangenten liegen auf einem Kegelschnitt.

Der letzte Theil der Arbeit beschäftigt sich mit der Betrachtung des Orts der Mittelpunkte eines variablen Kreises, welcher einen gegebenen Kreis orthogonal schneidet und eine gegebene Curve berührt. Aus der Gleichung dieses Ortes kann man, wie gezeigt wird, die Gleichungen folgender Curven herleiten: 1) der negativen Fusspunktencurve der gegebenen Curve, 2) der Parallelen der gegebenen Curve, 3) der negativen Fusspunktencurve dieser Parallelen, 4) des Ortes der Mittelpunkte eines variabeln Kreises, der die Curve und einen festen Kreis berührt. Csy. (O.)

J. Hammond. Solution of a question (5304). Educ. Times XXIX. 47-50.

Die negative Fusspunktencurve einer Ellipse in Beziehung auf den Mittelpunkt hat 6 Spitzen und 4 Knoten. Es wird die Lage derselben bestimmt, sowie die Länge des für die Ellipse äusseren Bogens zwischen 2 reellen Spitzen. Zum Schluss werden die allgemeinen Resultate auf specielle Fälle angewandt. O.

A. G. Greenhill. The intrinsic equation of the elastic curve. Messenger (2) VIII. 82.

Es wird bewiesen, dass die „intrinsic equation“ der elastischen Curve ist

$$\psi = 2\,\mathrm{am}\left(\frac{s}{kc}, k\right).$$

Das giebt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2}{kc}\,dn\,\frac{s}{kc}$$

und

$$y = \frac{2c}{k}\,dn\,\frac{s}{kc}.$$

Glr. (O.)

R. A. Proctor. On the cycloid and all forms of cycloidal curves. London. Longmann.

W. E. Heal and J. E. Hendricks. Problem. Analyst V. 143-144.

Es handelt sich um eine Verfolgungscurve: Eine Ente schwimmt um den Rand eines kreisförmigen Teiches. Vom Mittelpunkte desselben beginnt ein Hund die Verfolgung, ihr immer direct nachschwimmend. Zu finden die Gleichung und Länge der Curve, wenn der Hund n mal so schnell schwimmt als die Ente. Glr. (O.)

Lösungen von Aufgaben über geometrische Oerter, die auf Curven dritten und höheren Grades führen, von Wolstenholme, R. E. Riley, E. Rutter, E. B. Elliott, Evans, C. Leudesdorf, Ch. Ladd, J. O'Regan, J. Hammond, V. Jacobini, J. J. Walker, W. Gallatly, S. Johnston, H. Murphy, S. Roberts, J. L. Kitchin finden sich Educ. Times XXIX. 27, 30, 56, 65, 96; XXX. 23, 75, 93. O.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

O. Röthig. Zur Theorie der Flächen. Borchardt J. LXXXV. 250-263.

Der Verfasser entwickelt zuerst die 2 Bedingungsgleichungen, welchen 2 benachbarte Normalen einer gegebenen Fläche genügen müssen, damit sie sich schneiden, und in welchen der Abstand des Schnittpunktes von der Fläche linear enthalten ist.

Nach dessen Elimination bleibt eine quadratische Gleichung für das Variationsverhältniss der 2 Parameter, in welchen die Fläche als dargestellt vorausgesetzt wird. Es werden 2 Beweise geführt, dass die Wurzeln derselben reell sind. Hiermit ergiebt sich die Existenz und Bestimmung der Krümmungslinien, die der Hauptkrümmungen und insbesondere ein Ausdruck des Krümmungsmasses. H.

Laguerre. Sur les systèmes de droites qui sont normales à une même surface. Nouv. Ann. (2) XVII. 184-186.

Es wird die Bedingung, dass ein System von Strahlen, die von Punkten einer Fläche S auslaufen, normal gegen eine andere Fläche gerichtet seien, in Form einer Gleichung dargestellt. Ein System von Strahlen genüge dieser Gleichung. Wird S so deformirt, dass jedes Curvenelement der Fläche seinen Werth behält, und wird bei der Deformation jeder Strahl mit der Tangentialebene, die zu ihm gehört, starr verbunden gedacht, so entsteht nach der Deformation ein neues System von Strahlen, und dieses ist gleichfalls ein Normalensystem für eine Fläche. Der Satz von Dupin, dass ein Normalensystem auch nach der Brechung an einer Fläche seine Eigenschaft bewahrt, lässt sich gleichfalls aus der Gleichungsform unmittelbar ablesen. Endlich ergiebt sich: „Wenn das System der Strahlen, die von S auslaufen, ein Normalensystem für eine zweite Fläche ist, gleichzeitig aber jeder Strahl mit der zu ihm gehörigen Tangentialebene von S einen constanten Winkel einschliesst, so ist die senkrechte Projection des Strahlensystems auf S ein System geodätischer Linien für diese Fläche." Das reciproke Theorem ist ebenfalls richtig. Bildet man auf S ein System geodätischer Linien und fordert, dass ein Normalensystem sich in dieses System projicire, so muss der Winkel, den jeder Strahl mit der ihm zugehörigen Tangentialebene von S einschliesst, unveränderlich sein. Als besonderer Fall ergiebt sich daraus das bekannte Theorem, wonach die Tangenten in den verschiedenen Punkten eines Systems geodätischer Linien ein Normalensystem bilden. Schn.

C. J. MONRO. On flexure of spaces. Proc. L. M. S. IX. 171-177.

Es wird der Satz bewiesen: Ein Raum von n Dimensionen lässt im allgemeinen reine Biegung in einem Raume von $n+n'$ Dimensionen zu mit einer Freiheit von höchstens

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)\ (n'-\tfrac{1}{2}n(n-1))$$

Graden. Unter reiner Biegung ist zu verstehen die Aenderung der Krümmungen (Biegung), bei welcher die kürzesten Distanzen je zweier Punkte längs des n Dimensionen-Raumes unverändert bleiben. Reine Biegung ist dem Satze zufolge nur möglich, wenn $n' > \tfrac{1}{2}n(n-1)$. Der Beweis wird dadurch geführt, dass ein n Dimensionen-Raum-Element um einen Punkt herum in Coordinaten, die in diesem Punkte ihren Anfang haben, durch Bestimmung der normalen Coordinate bis auf den zweiten Grad aller tangentialen mit Vernachlässigung der höhern Grade dargestellt, dann die Bedingungsgleichungen der reinen Biegung gezählt werden. H.

G. BOCKWOLDT. Ueber die Enneper'schen Flächen mit constantem positivem Krümmungsmass, bei denen die eine Schaar der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird. Diss. Göttingen.

Die Urschrift von Enneper, an welche sich das Gegenwärtige anschliesst, ist in Gött. Nachr. 1868, p. 258 u. 421 zu finden, und in F. d. M. I. 227 der resultirende analytische Ausdruck der genannten Flächen mitgetheilt. In diesem sind 2 elliptische Integrale enthalten: die Ebenen der ebenen Krümmungslinien schneiden sich in einer festen Geraden, welche zur Axe der z genommen ist, und bilden mit einer solchen Ebene Winkel φ, die sich als elliptische Integrale 3ter Gattung darstellen; ausserdem enthält z einen elliptischen Term ohne 3te Gattung. Diese Integrale werden hier auf ihre Grundform gebracht und discutirt, die Perioden untersucht, der Fall, wo die 2te Schaar, die stets aus sphärischen Curven gebildet wird, gleichfalls eben ist, besprochen, eine Rückkehrkante der Fläche bestimmt, eine äquidistante Fläche

in Betracht gezogen, dann die Fläche erst theilweise, endlich vollständig specialisirt, und die numerischen Werthe aller Bestimmungsgrössen aufgeführt. H.

M. Lévy. Sur une application industrielle du théorème de Gauss relatif à la courbure des surfaces. C. R. LXXXVI. 111-114.

Man kann zwar ein ebenes Stück Blech durch Treiben so umformen, dass es eine leichte Krümmung in jedem Sinne erhält, aber hierbei wird im Allgemeinen das Krümmungsmass in jedem Punkte nur wenig von Null verschieden sein.

Der Verfasser bespricht dagegen das Verfahren eines Pariser Industriellen Richard, welches geeignet ist, ein ebenes Blech ohne wesentliche Aenderung der Constitution des Metalles so zu deformiren, dass es in jedem Punkte ein sehr bedeutendes Krümmungsmass erhält. Dieses Verfahren, auf welches Herr Richard rein aus praktischen Versuchen bei der Construction von Anéroidbarometern geführt ist, beruht, wie der Verfasser auseinandersetzt, im Wesentlichen auf der Gauss'schen Theorie von der Biegung. Das Verfahren ist folgendes:

Ein rechteckiges Blech, dessen verticale Seite AA' und BB' seien, wird cylindrisch aufgerollt, so dass AA' etwas über BB' herausragt, und die Ränder werden provisorisch aneinander befestigt. Man erhält so einen dünnen Cylinder, dessen senkrechte Schnitte bis zu einer gewissen Grenze beliebig stark gekrümmt sind.

Dieser Cylinder kann nun durch Hämmern über einer Form in eine Rotationsfläche verwandelt werden, und zwar, wenn die Meridiancurve nur schwach gekrümmt ist und sich nur wenig von der ursprünglichen geraden Linie unterscheidet, kann dies ohne wesentliche Veränderung in der Constitution des Metalles erreicht werden, und es ist dies ein in der Praxis sehr häufig angewendeter Process. Diese Umänderung ist aber keine einfache Biegung, sondern eine, wenn auch geringe Deformation anderer Art.

Man hebt nun die Verbindung der Ränder AA' und BB' wieder auf. Alsdann kann man sie mit Leichtigkeit mit der blossen Hand von einander entfernen bis zu einer gewissen Grenze, über welche hinaus zu weiterer Entfernung eine verhältnissmässig sehr grosse Kraft nöthig sein würde. In dem Masse nun, als man die Ränder von einander trennt, nähern sich der obere und der untere Rand des Blechs und zwar sehr beträchtlich.

Dieser letzte Vorgang ist nun grade die interessante Anwendung der Gauss'schen Lehre vom Krümmungsmass. Denn da dieser Vorgang eine Biegung ist, so muss bei ihm das Krümmungsmass constant bleiben. Wenn man also die Krümmung der Parallelkreise nur wenig vermindert, so muss sich diejenige der Meridiane, und zwar sehr merklich vermehren. Auf diese Weise kann man sehr einfach bis zu gewissen Grenzen hin jedes beliebige Krümmungsmass erreichen. Der Verfasser glaubt, dass sich dieselbe Methode auch im Grossen zur Herstellung von Schiffsbekleidungen würde verwenden lassen.

Weil die Kraft, wenn eine gewisse Grenze erreicht ist, sehr gross werden muss, um die beiden Ränder weiter zu trennen, so glaubt Herr Richard auf dieses Princip die Construction gekrümmter Balken zu Brücken gründen zu können. Der Verfasser behauptet in Uebereinstimmung mit anderen, dass diese Anwendung gegen die Principien der Festigkeitslehre wäre, wenn er auch gewisse andere mechanische Anwendungen für möglich hält.

A.

L. Bianchi. Sopra la deformazione di una classe di superficie. Battaglini G. XVI. 267-270.

Es lassen sich bekanntlich alle Umdrehungsflächen auf unendliche viele Arten durch Biegung in andere Umdrehungsflächen verwandeln, so dass Meridian- und Parallelkreise sich erhalten, während die Winkel entsprechender Meridianebenen sich nach irgend einem Verhältniss ändern. Allgemeiner lassen sich die Flächen, die ein System ebener Krümmungslinien mit parallelen Ebenen haben, durch Biegung in andere verwandeln, so dass

jene Linien Krümmungslinien bleiben und wieder in parallelen Ebenen liegen.

Ein ähnliches Theorem beweist der Verfasser von einer anderen Klasse von Flächen, welche er Translationsflächen (superficie di traslazione) nennt.

Er versteht darunter solche Flächen, die entstehen, wenn eine ebene Curve C sich ohne Formänderung und ohne Drehung so bewegt, dass irgend einer ihrer Punkte eine ebene Curve C' beschreibt, deren Ebene senkrecht zur Ebene der C steht. Nimmt man als Coordinatenanfang einen Punkt der Curve C, der die Curve C' beschreibt, und die Ebene von C zur zy-, die von C' zur xy-Ebene, nennt man ferner v den Bogen vom Anfangspunkt bis zu einem beliebigen Punkt von C und u den Bogen bis zu einem beliebigen Punkt der Curve C', so kann man die Gleichungen der Curven C und C' in die Form bringen $y = V$ und $y = U$, wo V eine beliebige Function von v, U eine beliebige Function von u ist. Dann kann man u und v als Parameter der betrachteten Fläche nehmen und erhält

$$x = \int \sqrt{1-U'^2}\,du, \quad y = U + V, \quad z = \int \sqrt{1-V'^2}\,dv,$$

wenn U' und V' die Ableitungen von U und V sind. Das Linienelement dieser Fläche wird dann erhalten durch die Gleichung

$$ds^2 = du^2 + 2U'V'du\,dv + dv^2.$$

Dasselbe bleibt ungeändert, wenn man U durch kU und gleichzeitig V durch $\frac{1}{k}V$ ersetzt.

Hierdurch erhält man also eine andere Translationsfläche, welche durch Biegung aus der ersten entstanden ist und bei der die Parameterlinien die entsprechende Bedeutung haben.

Uebrigens hängt die Deformation der Parameterlinien mit derjenigen der Biegung einer Rotationsfläche in eine andere zusammen. Denn wenn die Curve C' um die x-Axe rotirt, so wird das Linienelement auf der Rotationsfläche erhalten durch die Gleichung

$$ds^2 = du^2 + U^2 dw^2.$$

Dasselbe bleibt ungeändert, wenn man U durch kU und w durch

$\frac{1}{k}w$ ersetzt, so dass man eine zweite Rotationsfläche erhält, welche durch Biegung aus der ersten entstanden ist. Man erkennt daraus, dass jeder Biegung einer Rotationsfläche in eine andere die Biegung einer Translationsfläche in eine andere entspricht, und umgekehrt jeder Biegung einer Translationsfläche die Biegungen der beiden entsprechenden Rotationsflächen mit reciprokem Biegungsparameter $\left(k \text{ und } \frac{1}{k}\right)$. Man kann dies auch so ausdrücken: Bei der oben vorgenommenen Biegung einer Translationsfläche ändern sich die Generatrices C und die Directrices C' so, dass auch die Rotationsflächen einer jeden durch Biegung ineinander übergeführt werden können, und zwar sind die Biegungsparameter reciprok. Diese allgemeinen Sätze werden nun specieller auf solche Flächen angewendet, bei welchen die Curven C und C' Tractrices oder Cycloiden sind, wofür sich besonders einfache Resultate ergeben, weil hier die Parametercurven bei der Biegung ihren geometrischen Charakter behalten.

A.

L. Bianchi. Sull' applicabilità delle superficie degli spazi a curvatura costante. R. Acc. d. L. (3) II. 149.

Zwei Flächen desselben oder zweier verschiedener Räume mit constantem Krümmungsmass werden auf einander abwickelbar genannt, wenn die Ausdrücke ihrer bezüglichen Linienelemente, nach den einander entsprechenden metrischen Bestimmungen berechnet, einander gleich sind, oder ineinander transformirbar. Versteht man dann unter Umdrehungsflächen in jedem beliebigen Raume mit constantem Krümmungsmass Flächen, deren Schnitte mit den Normalebenen einer Geraden Kreise sind, deren Mittelpunkte auf jener Geraden liegen, so folgt der Satz: Die Umdrehungsflächen der Räume mit constantem Krümmungsmass sind auf diejenigen des gewöhnlichen Raumes abwickelbar, so dass Meridiane und Parallelkreise der einen und der anderen Fläche einander entsprechen. Im Besondern sind also die Kugeln

in Räumen von constantem Krümmungsmass auf gewöhnliche Kugeln abwickelbar.

Aus dieser Eigenschaft schliesst der Verfasser weiter, dass die Fläche eines nicht-euclidischen Raumes, welche unverändert bleibt, bei einer Bewegung dieses Raumes abwickelbar ist auf eine Ebene des gewöhnlichen Raumes. A.

Th. Kötteritzsch. Zur Theorie dreifach orthogonaler Flächensysteme. Schlömilch Z. XXIII. 158-186.

Das Gegenwärtige bildet die Fortsetzung der Programm-Arbeit: „Die Ermittelung der Potentialcoordinaten etc." 1876, worüber in F. d. M. VIII. 627 referirt ist. H.

M. de Tilly. Sur les surfaces orthogonales. C. R. LXXXVII. 361-362.

M. Lévy. Sur le développement des surfaces dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène. C. R. LXXXVII. 788-791.

Das Mitgetheilte genügt nicht, die Gedanken der Verfasser daraus zu entnehmen. H.

G. Darboux. Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux. Ann. de l'Éc. N. (2) VII. 101-150, 227-260, 275-348.

Die Theorie der dreifach orthogonalen Flächensysteme bildet hier den Ausgangspunkt einer Theorie der krummlinigen Coordinaten, welche der Verfasser als Fortbildung der zuerst von Lamé bearbeiteten Theorie zu geben unternimmt, und zwar beginnt er sie unmittelbar mit der Untersuchung der Bedingung, unter der eine Flächenschaar einem dreifach orthogonalen System angehören kann. Die von ihm gebrauchte Ausdrucksform ist die, welche die Parameter der Flächenschaaren u_1, u_2, u_3 als

Functionen der cartesischen Coordinaten x_1, x_2, x_3 darstellt. Durch Transformation der Bedingungsgleichungen rechtwinkligen Durchschnitts und Elimination ergiebt sich als gesuchte Bedingung:

$$S = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{31} & A_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{31} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Indices bei u die partielle Differentiation nach den ebenso numerirten x bezeichnen, und

$$A_{ik} = u_1 u_{ik1} + u_2 u_{ik2} + u_3 u_{ik3} - 2(u_{i1} u_{k1} + u_{i2} u_{k2} + u_{i3} + u_{k3})$$

ist. Hieraus fliesst zunächst ein specielles Resultat von Bouquet, dann ein Resultat von Puiseux durch diejenige Vereinfachung, welche die Wahl solcher Axen, dass $u_2 = u_3 = u_{23} = 0$ wird, mit sich bringt. Man erhält hier:

$$S = K - \Omega;\ K = u_1^4(u_{22} - u_{33})u_{123};\ \Omega = 2u_1^2(u_{22} - u_{33})u_{12}u_{13}.$$

Verschwinden K und Ω einzeln, so hat man den Fall, wo die Flächenschaar aus Kugeln oder Ebenen besteht; den Beweis, dass auch das Umgekehrte gilt, übergeht der Verfasser. Die Gleichung $S = 0$ wird nun durch Einführung von

$$\frac{1}{H} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

in eine Gleichung $T = 0$ transformirt, wo T aus S hervorgeht, indem man für die A die gleichnumerirten H, als partielle Differentialquotienten zu verstehen, einsetzt. Bei obiger Wahl der Axen wird dann $T = -\frac{1}{2}SH^3$. Endlich wird dieses T durch Combination der Horizontalreihen in eine Functionsdeterminante 2ter Ordnung

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v_4}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 v_5}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 v_6}{\partial x \partial y} = 0$$

übergeführt, wo

$$v_i = \Phi_i(u)H + \alpha_i(u)\,(x^2 + y^2 + z^2) + \beta_i(u)\,x + \gamma_i(u)y + \delta_i(u)\,z + \zeta_i(u)$$

für willkürliche Coefficienten ist. Eine Particularlösung hiervon erhält man dann, indem man eins der $v = 0$ setzt. Die Gleichung $v_i = 0$ wird erfüllt durch eine Schaar von Kugeln, deren Parameter u ist. Die Coefficienten der Kugelgleichung sind durch ein System von Differentialgleichungen mit einer Unabhängigen u bestimmt, welches sich für gegebene Coefficienten von v_i nicht integriren lässt. Die Integration in dem Sinne, dass jene Coefficienten disponible Functionen bleiben, wird nun nach einer Methode von Bonnet gezeigt, von der der Verfasser jedoch im zweiten Theile abweicht, indem er die Anzahl der Variabeln successive um 1 vermindert. Das Integral ist in der Form dargestellt

$$C_1 S_1 + C_2 S_2 + \cdots + C_6 S_6 = 0,$$

wo die Constanten C durch eine Relation 2ten Grades verbunden sind. Sind die Coefficienten in v_i constant, so liegt die Integration auf der Hand. Einige andere besondere Fälle werden noch in Betracht gezogen. Es wird dann die Umgebung eines Punktes untersucht, und eine Formel von Maurice Levy hergeleitet. Von da an legt der Verfasser der Untersuchung den Ausdruck der Flächenschaar $\varphi(x, y, z, u) = 0$ zu Grunde, gestaltet erst die Gleichung $S = 0$ gemäss der impliciten Bestimmung von u und wendet sich besonders zu den Fällen, wo die Axen der x, y, z Symmetrieaxen sind, was ihn auf die Flächen 2ten Grades führt. Es folgt die Darlegung der Theorie der Fünfkugelcoordinaten. Setzt man

$$2\lambda x_k = \overset{k}{\alpha}_1 \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{2R} + \overset{k}{\alpha}_2 x + \overset{k}{\alpha}_3 y + \overset{k}{\alpha}_4 z + i\overset{k}{\alpha}_5 \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{2R},$$

wo x, y, z cartesische Coordinaten,

$$\left(\overset{k}{\alpha}_1\right)^2 + \cdots + \left(\overset{k}{\alpha}_5\right)^2 = 1,$$

so sind $x_1 = 0, \ldots x_5 = 0$ die 5 Kugeln, und $x_1 \ldots x_5$ die Fünfkugelcoordinaten. Jeder Mittelpunkt ist bestimmt durch die Coordinaten

$$x = -\alpha_2 \varrho, \quad y = -\alpha_3 \varrho, \quad z = -\alpha_4 \varrho,$$

wo

$$\varrho = \frac{R}{\alpha_1 + i\alpha_5}$$

den Radius ausdrückt. Damit sich die Kugeln rechtwinklig schneiden, muss sein

$$\overset{k}{\alpha}_1 \overset{h}{\alpha}_1 + \cdots + \overset{k}{\alpha}_5 \overset{h}{\alpha}_5 = 0.$$

Es ergiebt sich dann, dass

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 = 0,$$

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \frac{1}{4\lambda^2}(\partial x_1^2 + \cdots + \partial x_5^2).$$

Bestimmt man 2 Flächen in den Fünfkugelcoordinaten, so hat die Bedingung der Orthogonalität die gleiche Form wie bei gewöhnlichen. Angewandt auf die Cycliden ergiebt sich ein Ausdruck des Linienelements in Kugelrauten. Es werden dann orthogonale Systeme, gebildet aus einer Familie Cycliden, untersucht, dann verschiedene Probleme nach der bei Entwickelung der Gleichung 3ter Ordnung angewandten Methode gelöst. Im 2ten Theile werden die gleichen Untersuchungen auf orthogonale Systeme zu n Variabeln ausgedehnt, dann auf den Fall angewandt, wo der Parameter als Summe von Functionen je einer Variabeln dargestellt ist. Hieraus fliessen viele dreifach orthogonale Flächensysteme. Im 3ten Theile erweitert der Verfasser Lamé's, in Ann. de l'Éc. N. III. enthaltene Methode der Aufsuchung orthogonaler Systeme auf n Variabele, führt sie an dem Beispiele, wo alle H_i einander gleich sind, durch, weist auf eine allgemeinere Bedeutung der ersten der 2 Gruppen von Bedingungsgleichungen für die Integrabilität eines Systems partieller Differentialgleichungen hin, und beweist folgende 2 Sätze: Die erste Lamé'sche Gruppe drückt aus, dass die Flächen des dreifachen Systems sich längs conjugirter Linien schneiden. Entsprechen sich 2 Systeme krummliniger Coordinaten derart, dass in homologen Punkten die Berührungsebenen der 3 Flächen in beiden Systemen parallel sind, so schneiden sich die Flächen jedes Systems längs conjugirten Linien; und umgekehrt, wenn 3 Flächenfamilien sich längs conjugirten Linien schneiden, so giebt es andere Systeme krummliniger Coordinaten mit 3 willkürlichen Functionen derart, dass jene Ebenen parallel sind. Es werden sodann einige dreifache Systeme von Flächen, die sich längs conjugirter Linien

schneiden, untersucht; dann aus gegebenen orthogonalen Systemen zu n Variabeln verschiedene orthogonale Systeme abgeleitet; dann davon Anwendung gemacht auf ein orthogonales System, welches die isothermen Systeme als besondern Fall enthält; schliesslich hierin einem Exponenten nach einander die Werthe 1, 2, $\frac{1}{2}$ ertheilt. H.

Castet. Du plus court chemin sur une surface de révolution entre deux points de la génératrice. Mém. de Bord. (2) II. 185-188.

I. Wenn eine begrenzte Gerade AB um eine Axe XY rotirt, welche zu ihr windschief ist, und die Spuren der Punkte A und B auf irgend einer Meridianebene (genauer Halbmeridianebene) M und N sind, so ist die Gerade $MN < AB$.

II. Der Halbmeridian einer Umdrehungsfläche ist die kürzeste Verbindungslinie für je zwei auf ihm liegende Punkte.

Der erste dieser Sätze folgt aus den Elementen der Stereometrie, der zweite aus dem ersten durch ein sehr einfaches Grenzverfahren.

Für die Vollmeridiane ist der zweite Satz im Allgemeinen nicht zutreffend, wenn er auch in gewissen Fällen bestehen bleibt.

A.

L. F. M. Terreiras. Algunas propriedades dos superficies. Jorn. sc. math. phys. nat. 1878. 175-182.

A. Mannheim. Sur les surfaces réglées. Liouville J. (3) IV. 57-61.

In Bd. IV pag. 287 dieses Jahrbuchs sind die Elementarbegriffe klargelegt, welche Herr Mannheim mit besonderem Erfolg beim Studium geradliniger Flächen verwendet. Gestützt auf diese behandelt er folgendes Problem. Es sei G eine Erzeugende einer windschiefen Fläche (G), c sei ein Punkt der Strictionslinie (c), S die Tangente in diesem Punkte längs (c) und C die conjugirte

Gerade von S in Bezug auf die Indicatrix von (G) in c. Diese Gerade C ist die Charakteristik der Centralebene von G, wenn man vom Centralpunkt c zu einem Nachbarpunkt der Strictionslinie übergeht. Zieht man in der Centralebene von c aus eine Gerade G' unter einem gegebenen Winkel, und construirt mit Beibehaltung dieses Winkels in jeder Centralebene von (G) die analogen Geraden, so bilden diese eine Fläche (G'). Es sollen Beziehungen zwischen (G) und (G') ermittelt werden. Herr Mannheim findet, dass beide Flächen dieselbe Strictionslinie haben; eine ist der anderen umgeschrieben längs dieser Linie. Was die Vertheilungsparameter der Tangentialebenen beider Flächen für die Erzeugenden G und G' betrifft, so gilt, wenn K_g und $K_{g'}$ diese Parameter bedeuten, die Relation:

$$\frac{K_g}{K_{g'}} = \frac{\sin(S, C)\sin(G', C)}{\sin(G, C)\sin(S, G')}.$$

Schn.

A. Mannheim. Geometrical demonstration of a known theorem relating to surfaces. Messenger (2) VIII. 122.

Geometrischer Beweis des Satzes: Die Winkel der geodätischen Torsion der Schnittcurve zweier Oberflächen, welche einander unter constantem Winkel schneiden, sind gleich.

Glr. (O.)

P. G. Tait. Note on the surface of a body in terms of a volume-integral. Proc. of Edinb. IX. 541-542.

Der Verfasser bezieht sich auf einen Satz, der in seiner Arbeit: „On Green's and other allied theorems" (Trans. of. Edinb. 1869/70, s. F. d. M. II. p. 748) enthalten ist, und leitet daraus eine Relation zwischen einem Volumen und einem Flächenintegral her, die er in der Form:

$$\iiint \nabla U(\nabla P)\,dS = -\iint ds$$

ausdrückt. In dem Fall des Ellipsoids ergiebt sich die Oberfläche

$$=\iiint dx\,dy\,dz \left\{\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{z^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right\}$$
$$:\left\{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right\}^2,$$

wo die Grenzen durch die Gleichung der Oberfläche gegeben werden. Cly. (O.)

E. CATALAN. Théorie analytique des lignes à double courbure. Mém. de Liège VI.

In dieser Arbeit behandelt der Verfasser mit der ihm eigenen Eleganz die meisten der classischen Fragen über Raumcurven und findet dabei mehrere neue Sätze. Mn. (O.)

W. K. CLIFFORD. On the classification of loci. Phil. Trans. CLXIX. 663-681.

Von dieser interessanten Arbeit ist nur Theil I. „Curven" von dem inzwischen verstorbenen Verfasser niedergeschrieben; einige Zusätze tragen das Datum: Januar 1879.

Unter „Curve" wird ein continuirliches eindimensionales Aggregat einer Art von Elementen verstanden, also nicht das, was man im gewöhnlichen geometrischen Sinne eine Curve nennt, sondern zugleich ein einzelnes unendliches System von Curven, Oberflächen, Complexen etc., das so beschaffen ist, dass eine Bedingung hinreicht, eine endliche Zahl derselben zu bestimmen. Die Elemente werden als durch k Coordinaten bestimmt betrachtet. Sind diese durch $k-1$ Gleichungen irgend eines Grades verbunden, so ist die Curve entweder das gesammte Aggregat der gemeinsamen Lösungen dieser Gleichungen, oder, wenn dasselbe sich in algebraisch getrennte Theile zerlegt, so ist die Curve einer dieser Theile. Wendet man jedoch die Sprache der Geometrie an, so ist eine solche Curve der vollständige oder theilweise Durchschnitt von $k-1$ Oertern im flachen (flat) Raum von k Dimensionen und kann daher ein k-flach (k-flat) genannt werden. Ist eine gewisse Zahl, z. B. h der Gleichungen linear, so ist es offen-

bar möglich, in diesen Gleichungen durch eine lineare Transformation h der Coordinaten zu Null zu machen. Es ist dann rathsam, diese Coordinaten sämmtlich ausser Betracht zu lassen und sich auf die übrigen $k-h-1$ Gleichungen zwischen $k-h$ Coordinaten zu beschränken. In diesem Fall wird dann die Curve betrachtet als eine Curve im flachen Raum von $k-h$ Dimensionen. Wenn also in diesem Falle eine Curve im flachen Raum als von k Dimensionen angesehen wird, so ist dies so zu verstehen, dass dieselbe in einem flachen Raum von $k-1$ Dimensionen nicht existiren kann.

Die Abhandlung enthält allgemeine Untersuchungen über Curven von gegebener Ordnung in einem flachen Raum, dessen Dimensionenzahl gegeben ist. Nach den vorhergehenden Erläuterungen wird der allgemeine Charakter der Resultate durch einige Beispiele klar werden. Eine eigentliche Curve zweiter Ordnung muss immer eine ebene Curve sein. Wenn sie auch im gewöhnlichen (dreidimensionalen) Raume oder im Raume von 4 oder mehr Dimensionen existirt, so giebt es immer einen zweidimensionalen Raum, der sie enthält. Oder analytisch gesprochen: Die Gleichungen können in allen Fällen reducirt werden auf eine einzige Gleichung $(*)\widehat{(xy)}^2 = 0$ zwischen zwei der Coordinaten und die übrigen Gleichungen $z = 0$, $w = 0$ etc.; der Satz heisst also: Jede Curve von der Ordnung 2 liegt in einem flachen Raume von 2 Dimensionen. So ergiebt sich allgemein der Satz A) des Verfassers: „Jede eigentliche Curve von der Ordnung n liegt in einem flachen Raume von n oder weniger Dimensionen."

So kann auch eine Curve von der Ordnung 3 in einem Raume von 3 (und nicht weniger als 3) Dimensionen, Punkt für Punkt, dargestellt werden auf einer Curve der Ordnung 2 in einer Ebene, d. h. die Punkte einer nicht ebenen Curve 3[ter] Ordnung können eine (1,1) Correspondenz mit denen eines Kegelschnitts haben; oder was dasselbe ist: die nicht ebene cubische Curve ist nothwendiger Weise unicursal. Fasst man dies zusammen, so hat man des Verfassers Satz B): „Eine Curve der Ordnung n in einem flachen Raum von n (und nicht weniger als n) Dimensionen kann, Punkt für Punkt, auf einer Curve von der Ordnung $n-k+2$ in einer Ebene dargestellt werden." Die Theile der Abhandlung sind:

1) unicursale Curven von der Ordnung n im n-dimensionalen Raume, 2) unicursale Curven der Ordnung n in $n-1$ Dimensionen, 3) unicursale Curven der Ordnung n in $n-k$ Dimensionen, 4) elliptische (oder bicursale) Curven der Ordnung n in $n-1$ Dimensionen [Theorie der derivirten Punkte auf einer elliptischen (oder bicursalen) Curve]; Curven vom Geschlecht p; Sätze über Abel'sche Functionen. Beziehungen zwischen der Ordnung und dem Geschlecht einer Curve. Aus diesem letzten Paragraphen mag der Satz erwähnt werden: „Eine Curve von der Ordnung n und dem Geschlecht p, das nicht grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, kann höchstens in $n-p$ Dimensionen existiren." Cly. (O.)

J. Collet. Note sur le contact géométrique des courbes et des surfaces. Liouville J. (3) IV. 315-334.

Eine Berührung $n$ter Ordnung zwischen 2 Curven, 2 Flächen oder einer Curve und einer Fläche soll, wie der Verfasser vorschlägt, dann stattfinden, wenn das von beiden Gebilden begrenzte Stück einer variabeln Geraden, welche sich dem Berührungspunkt, aber keiner Tangente, unendlich nähert, in $(n+1)^{\text{ter}}$ Potenz mit dem Abstande vom Berührungspunkte verschwindet. Es wird bewiesen, dass diese Zahl bei jeder Variation der Geraden dieselbe ist, nur nicht wenn sie finaliter in eine Tangente übergeht. H.

R. Mehmke. Bemerkung über den Torsionshalbmesser von Raumcurven. Grunert Arch. LXII. 212-214.

Betrachtet man das Dreieck zwischen 3 und das Tetraeder zwischen 4 consecutiven Punkten einer Curve, so stellt sich der Sinus des Contingenzwinkels der Schmiegungsebene als Quotient der Höhen beider, das Linienelement als Quotient des doppelten Dreiecks und seiner Höhe dar. Die Tetraederhöhe ist wieder Quotient des dreifachen Tetraeders und seiner Grundfläche. Nach Division hebt sich die Dreieckshöhe, und der Torsionsradius wird $\frac{2}{3}$ vom Product zweier Seitenflächen dividirt durch das Tetraeder, woraus nach Uebergang zur Grenze der bekannte Ausdruck folgt.

H.

E. Combescure. Sur les paramètres différentielles des fonctions et sur les lignes isothermes permanentes. Ann. de l'Éc. N. (2) VII. 409-432.

Bericht im folgenden Jahrgang. H.

C. A. M. de Almeida. Estudo general dos espelhos curvos. Jorn. sc. math. phys. nat. 1877. 130-141; 1878. 165-174.

A. Fais. Intorno alle curve gobbe aventi le stesse normali principali. Rend. di Bol. 1877-1878. 25-26; Mem. di Bol. VIII. 609-624.

Das Problem zweier Raumcurven, welche dieselben Hauptnormalen haben, hat zuerst Bertrand behandelt (Liouville J. Bd. XV); ihm sind Andere gefolgt. Nach Erwähnung der betreffenden Arbeiten leitet der Verfasser durch einfache Betrachtungen der Infinitesimal-Geometrie die Formeln her, welche die zwischen den Radien der Krümmung und der Torsion der beiden Raumcurven bestehenden Beziehungen ausdrücken, und giebt ihnen zum Theil eine einfachere Gestalt, als die, unter der sie bisher bekannt waren (vergl. F. d. M. IX. p. 439). B. K.

A. Mannheim. De l'emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d'une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe. C. R. LXXXVI. 1254-1257.

Die entwickelten Relationen verknüpfen die Elemente einer Raumcurve mit den Elementen der Fläche, welche von den Hauptnormalen dieser Curve gebildet wird, sie enthalten Gesetze für solche Curven, für welche die Summe der Quadrate der Krümmungen constant ist, und geben eine Einsicht in den Zusammenhang der Elemente von Curven, welche dieselben Hauptnormalen besitzen. Schn.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

P. Serret. Sur un principe unique contenant toute la théorie des courbes et des surfaces d'ordre ou de classe quelconque. C. R. LXXXVI. 39-42.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. B. p. 452.

H. G. Grassmann. Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde. Borchardt J. LXXXIV. 273-283.

In diesem Aufsatze, dem letzten mathematischen Inhaltes, der aus seiner Feder hervorgegangen ist, zeigt Grassmann, wie die Erweiterungen, welche Herr Reye in die Theorie der Polaren und der Systeme von algebraischen Gebilden eingeführt hat, sich in einfacher und naturgemässer Weise aus den Principien seiner Ausdehnungslehre ergeben. Ein erhöhtes Interesse gewinnt dieselbe durch die übersichtliche Darstellung, welche der hochverdiente Verfasser darin von den Principien seiner Symbolverknüpfung sowie von den Erweiterungen derselben giebt, zu denen er durch die Entwickelung der neueren algebraisch-geometrischen Methoden gelangt war. V.

E. Kummer. Ueber diejenigen Flächen, welche mit ihren reciprok polaren Flächen von gleicher Ordnung sind und dieselben Singularitäten besitzen. Berl. Monatsber. 1878. 25-36.

A. Cayley. On a sibi-reciprocal surface. Berl. Monatsber. 1878. 309-313.

Siehe Abschn. IX. Cap. 4.

E. Picard. Sur une classe de surfaces algébriques. Soc. philom. Paris. 127-132.

Der Verfasser wünscht zu beweisen, dass, abgesehen von der Römischen Fläche von Steiner, jede Fläche, deren ebene Schnitte unicursale Curven sind, eine Regelfläche ist. Es muss die Durchführung des nur skizzirten Beweisganges abgewartet werden. Bl.

G. Halphen. Sur les lignes singulières des surfaces algébriques. Brioschi Ann. (2) IX. 68-105.

Man kennt die Bemühungen, den Grad der Reciprocalfläche zu einer algebraischen, sowie dasjenige geringste Mass von Singularitäten zu bestimmen, dessen Einführung sich dualistisch als nothwendig erweist. Zeuthen, der diese Untersuchungen zu einem ersten Abschluss gebracht hat, berücksichtigt von singulären Linien nur Doppel- und Rückkehrcurven. Lässt man höhere singuläre Linien zu, so compliciren sich die Verhältnisse derart, dass ein detaillirtes Studium einzelner vorläufiger Fragen nothwendig wird. Die vorliegende Abhandlung beabsichtigt, diejenigen Elemente einer solchen Curve oder vielmehr der Fläche in ihrer Nähe zu bezeichnen, welche zur Definition des dualistisch entsprechenden Gebildes nöthig sind.

Ebenso wie die vielfachen Punkte einer ebenen Curve aus unicursalen Zweigen (der Verfasser nennt sie „Cyclen") bestehen, die einzeln dem Studium zugänglich sind, so hat man auf einer Fläche zunächst die einzelnen in einer vielfachen Curve sich durchsetzenden Mäntel zu untersuchen. Längs dieser bildet ein solcher Mantel selbst einen „Cyclus", wenn die durch die Punkte der singulären Linie gelegten ebenen Schnitte Curven ergeben, die an dieser Stelle Cyclen besitzen. Aus der Form der Reihenentwickelungen, welche in einem jeden Punkt der singulären Linie für die Punkt-Coordinaten der Fläche als bekannt angenommen werden, schliesst der Verfasser auf das erste Glied der analogen Entwickelungen für die Ebenen-Coordinaten. Je nachdem die Lage der Tangential-Ebene der Fläche längs jener Curve von

Punkt zu Punkt sich ändert oder nicht, je nachdem dieselbe zugleich Schmiegungsebene der singulären Linie ist, oder nicht, oder diese eine Gerade ist, endlich je nach der Beschaffenheit der ersten Exponenten der gegebenen Entwickelungen ändern sich diejenigen der gesuchten. Die erhaltenen Resultate vereinigt der Verfasser in eine Relation zwischen Ordnung und Rang der Fläche und den auf die singulären Curven bezüglichen Zahlen, vermöge deren u. A. der Rang der Umdrehungsfläche bestimmt wird, deren Meridiancurve beliebige Singularitäten besitzt.

Bl.

G. Halphen. Sur les singularités des courbes gauches algébriques. Bull. S. M. F. VI. 10-43.

Entsprechend den aus einem Zweig bestehenden Singularitäten ebener Curven („Cyclen") kommen auf Raumcurven singuläre Punkte vor, in deren Umgebung die rechtwinkligen Coordinaten sich in der Form:

$$x = t^n; \quad y = At^{n+i} + \cdots; \quad z = Bt^{n+i+\nu} + \cdots$$

darstellen lassen. Die Zahlen n, i, ν zeigen, wenn man die Raumcurve auf eine Ebene projicirt, verschiedenes Verhalten, dem entsprechend der Verfasser sie bezw. Ordnung, Rang und Klasse des „Cyclus", den jene Entwickelungen darstellen, nennt. Eine Rolle spielen sie namentlich in denjenigen Aufgaben der abzählenden Geometrie, die sich auf differentielle Bedingungsgleichungen beziehen, welchen die Raumcurve in gewissen Punkten genügen soll. Eine solche Differentialgleichung, vermöge deren die gesuchten Punkte projectivisch invariante Eigenschaften besitzen, kann man unter Zugrundelegung eines beliebigen Coordinatentetraeders auf eine homogene Form bringen und in dieser untersuchen. Die letztere ist besonders geeignet, um den Ausdruck für die Bedingung, dass die Anzahl der Null- und Unendlichkeitspunkte des verschwindenden Differentialausdrucks auf der Curve dieselbe sein muss, in die Gestalt einer Charakteristikengleichung zu bringen, so dass die gesuchte Zahl der Nullpunkte sich bilinear aus zwei Reihen von Zahlen zusammensetzt, deren eine von den äusseren Bedingungen allein, während die andere nur

von Eigenschaften der Curve abhängt. Der Verfasser beweist so eine Anzahl (theilweise bekannter) Sätze. Bezüglich der algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung findet er, dass die Anzahl der Punkte einer algebraischen Raumcurve, die einer solchen genügen, sich durch eine Summe von vier Producten der erwähnten Art ausdrücken lässt. Ein Analogon hierzu für Differentialgleichungen höherer Ordnung giebt es nicht, man beschränkte sich denn auf Curven mit speciellen Eigenschaften, z. B. solche ohne andere Singularitäten als Rückkehrpunkte.

Bl.

L. Saltel. Mémoire sur la classification arguesienne des courbes gauches algébriques ou extension à ces courbes du principe arguesien. Bull. de Belg. (2) XLVI. 90-123.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLVI. 11-13.

Untersuchung der Transformation, die durch die Gleichungen

$$Xx = Yy = Zz = Tt$$

zwischen den tetraedrischen Coordinaten zweier Raumcurven definirt wird.

Mn. (O.)

P. Appell. Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales de quatrième ordre. Grunert Arch. LXII. 175-182.

Wenn die Tangenten einer Curve vierter Ordnung einem linearen Complex angehören, so kann man ihre Coordinaten in der Form darstellen:

$$x:y:z:1 = 1:\lambda:\lambda^3:\lambda^4.$$

Der Verfasser wendet auf diese Darstellung die auf den Raum übertragenen Operationen an, welche für rationale ebene Curven vierter Ordnung zur Aufstellung der Gleichung der Tangente, der Wendepunkte u. s. w. von dem Referenten angegeben wurden, und findet einige einfache Beziehungen.

Bl.

J. J. WALKER, EVANS. Solutions of a question (5638). Educ. Times XXX. 44.

Die Curve

$$2(n-1)\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}-x\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}\frac{d^2u}{dx^2}-y\frac{du}{dx}\frac{du}{dz}\frac{d^2u}{dy^2}-z\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dz^2}=0$$

geht durch die Inflexionspunkte auf $u=0$; n ist der Grad von u.

O.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

V. MOLLAME. Su coordinate della più corta distanza fra due rette. Rend. di Napoli XVII. 106-110.

Herr Cayley hatte im Quart. J. XV. 164 (s. F. d. M. IX. 552) die kürzeste Entfernung zweier Geraden der Grösse und Lage nach in Liniencoordinaten bestimmt und war dabei von rechtwinkligen Axen ausgegangen. Herr Mollame giebt in der vorliegenden Arbeit eine Herleitung derselben Grössen unter Zugrundelegung schiefwinkliger Axen. O.

R. DIESEL. Gypsmodelle von Flächen zweiter Ordnung. In zwei Gruppen von 7 und 11 Modellen. Darmstadt. Brill.

Diese neue Serie von Modellen, welche für das Bedürfniss des mathematischen Unterrichtes insbesondere bestimmt sind, besitzt ebenfalls die Sauberkeit, durch welche sich die beiden ersten aus dem Atelier des Herrn Kreittmayr hervorgegangenen Serien auszeichnen. Als besonders erwünscht erscheint die — hier zum ersten Male gegebene — systematische Darstellung der Krümmungslinien auf allen Flächen zweiter Ordnung. Referent möchte nur den Wunsch aussprechen, dass die erste Gruppe etwas anders angeordnet werde; so, wie sie vorliegt, kann sie fast nur

zur Anschauung der rein gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dienen. V.

A. L. Lowell. Surfaces of the second order, as treated by quaternions. Proc. Am. Ac. XIII. 222-250.

Es werden in dieser Arbeit einige bekannte Eigenschaften der Flächen zweiten Grades mit den Methoden des Quaternionen-Calcüls untersucht; besonders die Beziehungen zwischen conjugirten Durchmessern und Diametralebenen, die Hauptaxen, Pole und Polarebenen, cyclische Normalen, Tangentenkegel u. dgl. Die nicht centrischen Flächen erfordern eine besondere Behandlung. Eine wesentliche Abkürzung scheint durch diese Behandlungsweise nicht erreicht zu werden. A.

Souvander. Sur les sections circulaires des surfaces du second ordre. Borchardt J. LXXXV. 339-344.

Die Fläche zweiten Grades mit der Gleichung

$$a_{1,1}x^2+a_{2,2}y^2+a_{3,3}z^2+2a_{2,3}yz+2a_{3,1}zx+2a_{1,2}xy$$
$$+2a_{1,4}x+2a_{2,4}y+2a_{3,4}z+a_{4,4} = 0$$

und die Ebene

$$ax+by+cz+d = 0$$

schneiden sich in einem Kegelschnitte, dessen Hauptaxenbestimmung von der Lösung der quadratischen Gleichung

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-x, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & a \\ a_{1,2}, & a_{2,2}-x, & a_{2,3}, & b \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3}-x, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

abhängt; und damit jener Schnitt ein Kreisschnitt sei, muss die quadratische Gleichung zwei gleiche Wurzeln haben, also ihre Discriminante verschwinden.

Diese Discriminante ist zuerst von Hesse vermittelst orthogonaler Substitutionen in Summen von 5 bis 10 Quadraten zerlegt (Borchardt J. LX. 305.). Später hat Henrici gezeigt, dass sie sich unter drei Formen als Summe zweier Quadrate darstellen

lässt (Borchardt J. LXIV. 187). Die Kreisschnitte sind dann unter anderen Gesichtspunkten von verschiedenen Seiten untersucht, u. a. hat Souillart die Discriminante ebenfalls in eine Summe zweier Quadrate zerlegt (Borchardt J. LXV. 320.) Indessen sind die Formen dieser Quadrate bei beiden zuletzt erwähnten Zerlegungen ziemlich complicirt.

Der Herr Verfasser gelangt nun zu einer Reihe von Zerlegungen, deren Formen einfacher sind, von denen die letzten hier Platz finden mögen.

Wenn x_1, x_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung sind, wenn ferner $a^2+b^2+c^2=1$ ist, und $\alpha_{1,2}\,\alpha_{2,2}\dots$ etc. die Unterdeterminanten der Determinante $\delta=f(0)$ bedeuten, dann ist

$$(1-a^2)(x_1-x_2)^2 = [2\alpha_{1,1}-(1-a^2)(\alpha_{1,1}+\alpha_{2,2}+\alpha_{3,3})]^2+4[b\alpha_{3,1}-c\alpha_{2,1}]^2,$$

$$(1-b^2)(x_1-x_2)^2 = [2\alpha_{2,2}-(1-b^2)(\alpha_{1,1}+\alpha_{2,2}+\alpha_{3,3})]^2+4[c\alpha_{1,2}-a\alpha_{3,2}]^2,$$

$$(1-c^2)(x_1-x_2)^2 = [2\alpha_{3,3}-(1-c^2)(\alpha_{1,1}+\alpha_{2,2}+\alpha_{3,3})]^2+4[a\alpha_{2,3}-b\alpha_{1,3}]^2.$$

Durch jede dieser Formeln ist die Discriminante der quadratischen Gleichung in eine Summe zweier Quadrate zerlegt. A.

LAGUERRE. Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. Liouville J. (3) IV. 247-257.

Die wesentlichen Resultate der analytisch geführten Untersuchung liegen in folgenden Theoremen:

„Es sei M ein Punkt einer Fläche zweiten Grades, MT und MT' die Richtungen der Krümmungslinien in diesem Punkte. Die Richtung MT' bestimmt mit dem Centrum der Fläche eine Ebene P. Die von M ausgehende Normale trifft eine Symmetrieebene der Fläche in einem Punkte, und in diesem construire man senkrecht zur Normalen eine Ebene Q. Die Ebenen P und Q schneiden sich längs einer Geraden; durch diese führe man eine Ebene senkrecht gegen die in Betracht gezogene Symmetrieebene. Diese

zuletzt construirte Ebene schneidet die Normale in dem Krümmungscentrum des Normalschnitts der Fläche, welcher durch die Richtung *MT* bestimmt ist."

„Die Normale in einem Punkt *M* einer Fläche zweiten Grades schneidet die drei Hauptebenen der Fläche in drei Punkten, die in ihnen auf die bezüglichen Hauptebenen errichteten drei Perpendikel bestimmen ein Hyperboloid. Unter den Erzeugenden des Hyperboloids, welche derselben Schaar wie die drei Perpendikel angehören, giebt es zwei, welche zu dem nach *M* führenden Durchmesser der Fläche senkrecht stehen. Diese Erzeugenden treffen die Normale in den beiden Hauptkrümmungscentren, und die Ebenen, welche durch jenen Durchmesser gehen und auf den construirten beiden Erzeugenden senkrecht stehen, schneiden die Tangentialebene in *M* längs den Axen der Indicatrix."

„Projicirt man die Normale eines Punktes *M* einer Fläche zweiten Grades nebst einer Axe der Indicatrix dieses Punktes auf die Ebene zweier Symmetrieaxen der Fläche, so giebt es eine Parabel, welche die beiden Projectionen und die beiden Symmetrieaxen berührt. Dieselbe berührt die Projection der Normalen in dem Projectionspunkt des Krümmungscentrums, welches dem durch die betrachtete Indicatrixaxe bestimmten Normalschnitt angehört."

Es mag darauf hingewiesen werden, dass das erste der angeführten Theoreme als eine Ausdehnung eines Satzes aufgefasst werden kann, den Herr Mannheim für Kegelschnitte ausgesprochen hat. Derselbe lautet: Wenn man in dem Punkte, in welchem die Normale eines Kegelschnitts eine Axe desselben schneidet, ein Perpendikel errichtet, so trifft dieses den Durchmesser, der nach dem Ausgangspunkt der Normalen läuft, in einem bestimmten Punkte; das Loth von diesem Punkte auf die betrachtete Axe trifft die Normale in dem Krümmungsmittelpunkt.

Endlich enthält die Arbeit noch eine geometrische Construction der Axen der Indicatrix und der Hauptkrümmungscentren, wenn die Fläche zweiten Grades dadurch bestimmt ist, dass die Hauptaxen der Lage nach, ein Punkt der Fläche und die zu ihm gehörige Normale gegeben sind.

Schn.

R. Mehmke. Zwei Sätze von den Flächen zweiten Grades. Grunert Arch. LXII. 214-215.

1. Wenn man durch einen festen Punkt Parallelen zur Tangente und zur Hauptnormale einer Krümmungslinie auf einer Fläche zweiten Grades zieht und die Abschnitte vom festen Punkte bis zur Fläche auf diesen Parallelen s_1 und s_2, t_1 und t_2 nennt, so ist für dieselbe Krümmungslinie

$$\frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{t_1 t_2} = \text{const.}$$

2. Der geometrische Ort der durch einen festen Punkt gelegten Parallelen zu den conjugirten Tangenten einer Krümmungslinie ist ein Kegel zweiten Grades, welcher mit der gegebenen Fläche die Kreisschnittebenen gemein hat und sie längs einer sphärischen Curve schneidet. Der Mittelpunkt der Kugel, auf welcher diese Curve liegt, liegt auf dem vom festen Punkte auf seine Polarebene gefällten Lothe. Variirt die Krümmungslinie, so beschreibt die Kugel einen Büschel mit imaginärem Fundamentalkreise, dessen Ebene in der Mitte zwischen dem festen Punkte und dem Fusspunkte des Lothes liegt, oder alle Kugeln des Büschels schneiden orthogonal diejenige Kugel, welche das Loth vom festen Punkt bis zur Polarebene zum Durchmesser hat; u. s. f. A.

Laguerre. Sur les normales aux surfaces du second ordre. Nouv. Ann. (2) XVII. 163-178.

Eine Reihe Relationen, welche sich auf die 6 Normalen beziehen, die sich von einem Punkte des Raumes auf eine Fläche zweiten Grades fällen lassen. Schn.

J. Loudon. Condition of a straight line touching a surface. Am. J. I. 388.

Darstellung der Bedingung für die Berührung einer Geraden mit einer Fläche zweiten Grades in Form einer Determinante zwischen den Coefficienten der Gleichungen. O.

A. Haillecourt. Foyers des surfaces du second ordre. Nouv. Ann. (2) XVII. 457-466.

Abweichend von der in neuerer Zeit von Darboux und anderen festgestellten Definition der Brennpunkte bei Flächen stellt der Verfasser eine engere Definition auf, indem er unter einem Brennpunkt einer Fläche zweiten Grades den Mittelpunkt einer unendlich kleinen Kugel versteht, welche die Fläche längs eines Kreises berührt, und unter Focalkugel eine Kugel, welche die Fläche längs eines Kreises berührt.

Solche Brennpunkte und Focalkugeln existiren natürlich nur bei Rotationsflächen. Neues ist in der Arbeit nicht enthalten, so dass dem Referenten der Zweck derselben nicht recht ersichtlich ist. A.

Townsend, R. F. Scott, C. Wright. Solutions of a question (5749). Educ. Times XXX. 69-71.

Es wird die Gleichung des Orts der Hauptkrümmungsmittelpunkte einer gegebenen centralen Fläche zweiten Grades bestimmt. Sind ferner a, b, c die Halbaxen der gegebenen Fläche, α, β, γ die einer anderen confocalen Fläche, so ist die Enveloppe einer andern confocalen und coaxialen Fläche mit den Halbaxen $\frac{\alpha^2}{a}$, $\frac{\beta^2}{b}$, $\frac{\gamma^2}{c}$ die Mittelpunktsfläche. O.

W. J. C. Sharp, Evans, Townsend. Solutions of a question (5662). Educ. Times XXX. 29-30.

$$S_1 = a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + 2f_1yz + 2g_1zx + 2h_1xy = 0,$$
$$S_2 = a_2x^2 + b_2y^2 + c_2z^2 + 2f_2yz + 2g_2zx + 2h_2xy = 0$$

seien die Gleichungen der Asymptotenkegel zweier Flächen zweiten Grades mit gemeinsamem Mittelpunkt. Dann sind die drei gemeinsamen conjugirten Diametralebenen gegeben durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{dS_1}{dx}, & \frac{dS_1}{dy}, & \frac{dS_1}{dz} \\ \frac{dS_2}{dx}, & \frac{dS_2}{dy}, & \frac{dS_2}{dz} \\ \frac{dS_3}{dx}, & \frac{dS_3}{dy}, & \frac{dS_3}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$S_3 = A_1\left(\frac{dS_2}{dx}\right)^2 + \cdots \quad \text{oder} \quad = A_2\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 + \cdots$$

und $A_1, B_1, \dots, A_2, B_2, \dots$ die reciproken Coefficienten zu $a_1, b_1, \dots, a_2, b_2, \dots$ sind. O.

E. W. Symons, W. J. C. Sharp. Solution of a question (5653). Educ. Times XXX. 60-61.

Es werden die Radien und Richtungscosinus der centralen Kreisschnitte des Conicoids

$$\psi(xyz) \equiv a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2bcyz - 2caxz - 2abxy - 1 = 0$$

bestimmt. Ferner wird bewiesen, dass, wenn

$$\begin{vmatrix} l, & m, & n, \\ x, & y, & z, \\ \frac{d\psi}{dx}, & \frac{d\psi}{dy}, & \frac{d\psi}{dz} \end{vmatrix}$$

für alle Werthe von x, y, z, die den Gleichungen

$$lx + my + nz = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0$$

genügen, identisch verschwindet, die Gleichungen

$$4a^2b^2c^2r^6 - r^2(a^2 + b^2 + c^2) + 1 = 0$$

und

$$\frac{m^2 + n^2}{(bn + mc)^2} = \frac{n^2 + l^2}{(cl + am)^2} = \frac{l^2 + m^2}{(am + bl)^2} = s^2$$

gelten, wo

$$r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2.$$

O.

E. Mugnaini. Sulla sfera osculatrice all' ellissoide di rivoluzione. Battaglini G. XVI. 270-279.

Um die Schwierigkeiten bei der Auflösung geodätischer Dreiecke zu überwinden, welche daraus entspringen, dass die Oberfläche der Erde nicht sphärisch ist, pflegt man den betreffenden Theil der Erdoberfläche durch eine Kugel zu ersetzen, deren Radius mit der Lage des betrachteten Flächenstücks variirt. Als Radius dieser Kugel wird häufig der grosse Hauptkrümmungsradius genommen.

Der Verfasser schlägt vor, als Radius den der mittleren Krümmung zu nehmen; die Kugel ist alsdann keine stationär berührende, sondern sie osculirt die beiden geodätischen Linien, welche die Hauptrichtungen unter Winkeln von 45° schneiden. Ist das Verhältniss der Hauptkrümmungen sehr wenig von 1 verschieden, so kann dieser Radius ohne merklichen Fehler gleich dem arithmetischen Mittel aus den Hauptkrümmungsradien gesetzt werden. Der Verfasser vergleicht nun die Fehler, welche entstehen, wenn man einen der Hauptkrümmungsradien, und wenn man den der mittleren Krümmung nimmt. Endlich bemerkt der Verfasser, dass diese Kugel, wenn man die höheren als die zweiten Potenzen der Excentricität des Dupin'schen Kegelschnitts vernachlässigt, mit der Kugel gleich wird, welche dasselbe Krümmungsmass hat, wie das Ellipsoid.

Da die Eigenschaft der Abwickelbarkeit auf der Gleichheit des Krümmungsmasses beruht, so müsste diese letztere Kugel besonders geeignet erscheinen, und es ist nicht recht ersichtlich, warum der Verfasser nicht direct von dieser Kugel ausgegangen ist. A.

R. E. Riley, R. F. Davis. Solutions of a question (5549). Educ. Times XXIX. 75-76.

Wenn eine Ebene ein Rotationssphäroïd unter einem Winkel α mit der Axe schneidet, so ist die Excentricität des Schnittes $e\cos\alpha$, wo e die Excentricität eines Schnittes durch die Axe bezeichnet. O.

E. Catalan. Sur les lignes de courbure de l'ellipsoide et de la surface des ondes. Ass. Franc. Paris.

Ergänzung zu der Arbeit, über die F. d. M. III. 398—400 referirt worden ist. Bekannte und bisher noch nicht bekannte Eigenschaften der Wellenfläche, welche aus den entsprechenden Eigenschaften des Ellipsoids hergeleitet werden.

Mn. (O.)

A. Schönfliess. Ueber das gleichseitige hyperbolische Paraboloid und ein aus ihm abgeleitetes Strahlsystem. Schlömilch Z. XXIII. 245-254.

A. Schönfliess. Ueber ein specielles Hyperboloid und andere mit ihm zusammenhängende Regelflächen. Schlömich Z. XXIII. 269-285.

Die geometrischen Beziehungen, welche den Ausgangspunkt der beiden Arbeiten bilden, sind bereits von Binet, Steiner, Chasles und Schroeter untersucht (Vgl. Schroeter, Berl. Monatsber. 1877. 594, siehe F. d. M. IX. 553), und demgemäss sind auch manche der Resultate bereits in jenen Arbeiten enthalten; indessen ist der Weg, den der Herr Verfasser eingeschlagen hat, ein anderer, und auch die Gesichtspunkte, nach denen die Untersuchung weiter ausgedehnt ist. Auch ist dem Verfasser die citirte Schroeter'sche Arbeit erst während des Druckes der zweiten vorliegenden Arbeit bekannt geworden.

Der geometrische Ort für die Punkte, deren Entfernungen von zwei windschiefen Geraden ein constantes Verhältniss haben, ist bekanntlich ein einschaliges Hyperboloid, welches, wie Steiner gefunden hat, die specielle Eigenschaft besitzt, dass es der Ort der Durchschnittskanten zweier projectivischer Ebenenbüschel ist, deren entsprechende Glieder auf einander senkrecht stehen. (Hierin liegt eine gewisse Analogie zu der Eigenschaft des Kreises, dass die Peripheriewinkel im Halbkreise rechte sind.) Die beiden windschiefen Geraden g und h sind conjugirte Polaren, und ihre betreffenden Involutionen sind, wie Schroeter bewiesen hat,

circulare. Ist der Werth des Verhältnisses Eins, so geht das Hyperboloid in ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid über.

Ist umgekehrt ein derartiges specielles Hyperboloid gegeben, so giebt es unzählig viele Geradenpaare g, h, welche in der oben besprochenen Beziehung zur Fläche stehen, der Ort derselben ist im Allgemeinen eine Regelfläche achter Ordnung R_8, während er sich beim hyperbolischen Paraboloid auf den dritten Grad reducirt (R_3).

Ueber diesen speciellen Fall enthält nun die erste Abhandlung folgende Resultate: Auf jeder Geraden u des Paraboloids giebt es einen Punkt, welcher von allen Erzeugenden der R_3 zugleich die kürzeste Entfernung hat. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet für jede Schaar der Geraden des Paraboloids eine gerade Linie, nämlich die durch den Scheitel gehende, zur anderen Schaar gehörige Generatrix. Die Geraden des kürzesten Abstandes von der festen Geraden g nach der veränderlichen u liegen wieder auf einem Paraboloid. Variirt man dann g auf R_3, so variirt dieses letztere Paraboloid, und die sämmtlichen Geraden der kürzesten Abstände erfüllen ein Strahlsystem erster Ordnung und Klasse, welches nur eine Directrix besitzt (oder bei der beide Directrices in eine zusammengefallen sind). Auch die Grenzflächen dieses Strahlsystems im Kummer'schen Sinne lassen sich leicht bestimmen. Es giebt ein zweites Strahlsystem, dem hier betrachteten entsprechend, wenn man an Stelle der ersten Schaar u die zweite Schaar v des Paraboloids treten lässt. Die diesen beiden Strahlsystemen gemeinsame Regelfläche reducirt sich auf zwei windschiefe Gerade.

Durch Variation des Parameters p in der Gleichung des Paraboloids $x^2 - y^2 = 2pz$ variirt man auch die Fläche R_3 mit der Gleichung $2z(x^2+y^2)+p(x^2-y^2) = 0$, und jene Strahlensysteme erzeugen je einen Complex von der ersten Ordnung und Klasse. Ein solcher Complex umfasst alle Geraden, welche die eine der beiden Scheitel-Generatrices des Paraboloides durchschneiden.

Weniger einfach sind die Beziehungen in dem allgemeinen Fall, der in der zweiten Abhandlung untersucht wird.

Die Gleichung des speciellen Hyperboloides, auf welches die allgemeinere Aufgabe führt, kann in die Form gebracht werden:

$$A^2x^2+B^2y^2-C^2z^2 = 1, \text{ wo } A^2 = B^2-C^2 \text{ ist.}$$

Führt man die numerischen Excentricitäten ein

$$\varepsilon^2 = \frac{C^2}{B^2},\ \varepsilon_1^2 = \frac{B^2}{C^2},\ \varepsilon_2^2 = 1+\frac{B^2}{C^2},$$

so wird die Gleichung von R_8

$$(\varepsilon_1^2-\varepsilon^2)^2y^2z^2+(y^2+z^2)^2(1-(\varepsilon_1^2+\varepsilon^2)A^2x^2+A^4x^4) = 0.$$

Diese Regelfläche besitzt zwei vierfache Gerade, erstens $y = 0$, $z = 0$, zweitens die unendlich entfernte Gerade in der Ebene $x = 0$, welche beide nicht zu den Generatrices gehören.

Der Verfasser stellt nun gewisse Parameter der Fläche R_8 durch die Weierstrass'schen 5 Functionen dar, wodurch die Coordinaten eines Punktes von R_8 sich bequemer ausdrücken.

Es ergiebt sich, dass jedem Werthe des Verhältnisses vier Paar Gerader der Fläche R entsprechen, und dann weiter, dass die Fläche vier Doppelerzeugende hat, aber ausser diesen und den vierfachen Geraden keine vielfachen Geraden oder Doppelcurven. Bestimmt man wieder für eine Gerade g von R_8 und eine Gerade u des Hyperboloids eine dritte Gerade s, welche auf beiden senkrecht steht, und deren Schnittpunkte mit g und u G und U seien, und lässt u alle möglichen Generatrices einer Schaar durchlaufen, während g festbleibt, so ist der Ort von u eine Raumcurve C_4 vierten Grades und zweiter Art (welche bekanntlich rationale Parameter hat), welche von jeder Geraden der Schaar u einmal, von jeder Geraden der Schaar v dreimal geschnitten wird. Alle die C_4, welche verschiedenen g entsprechen, gehen durch die Punkte hindurch, in welchen das Hyperboloid die X-Axe schneidet. Zu zwei conjugirten Geraden g und h gehört dieselbe Curve C_4. Der Ort der Geraden s ist eine gewisse Regelfläche sechster Ordnung, welche eine vierfache Gerade und vier Doppelgerade enthält.
A.

A. Cayley. On the deformation of a model of a hyperboloid. Messenger (2) VIII. 51-52.

Lösung folgender Frage, die von Herrn Greenhill aufgestellt ist: Wenn man das Modell eines einschaligen Hyperboloids aus Stäben construirt, die die erzeugenden Geraden darstellen und an den Kreuzungspunkten verbunden sind, und das Modell wird so deformirt, dass es die Form eines confocalen Hyperboloides darstellt, so ist zu beweisen, dass die Bahn eines Punktes auf dem Modell orthogonal ist zu dem System confocaler Hyperboloide. Glr. (O.)

S. Gundelfinger. Ueber die Transformation von Differentialausdrücken vermittelst elliptischer Coordinaten. Borchardt J. LXXXV. 80-88.

Siehe Abschn. IX. Cap. 1. p. 445.

C. Rodenberg. Zur Classification der Flächen dritter Ordnung. Clebsch Ann. XIV. 46-111.

Während der Herr Verfasser in einer früheren Arbeit „das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung beim Auftreten von Singularitäten“ untersucht hatte, schlägt er in der vorliegenden Arbeit den umgekehrten Weg ein, indem er alle diejenigen Flächen aufsucht, welche demselben Pentaeder angehören. Sobald das Pentaeder aus fünf getrennten Ebenen besteht, können unter den betrachteten Flächen nur conische Knoten auftreten, und jede solche Fläche mit conischem Knoten bildet den Uebergang zwischen Flächen, welche zwei verschiedenen der fünf Schläfli'schen Arten angehören, welche sich durch die Realität der 27 Geraden der Fläche unterscheiden, gerade so wie bei Flächen zweiter Ordnung der Kegel den Uebergang zwischen dem einschaligen und dem zweischaligen Hyperboloid bildet. Die Möglichkeit einer hierauf gegründeten Classification beruht auf einem Satze von Herrn F. Klein, wonach alle Flächen ohne Singularitäten, welche derselben Schläfli'schen Art angehören, durch continuirliche Aenderung der Constanten in einander übergeführt werden können, ohne dass hierbei ein Knoten auftrete.

Kann man nun diese Ueberführung so bewerkstelligen, dass das Pentaeder keine Singularität durchmacht, dass also nicht etwa vier Ebenen durch einen Punkt gehen, so geben die Uebergänge durch Knoten, denen immer eine Verbindung (+) oder eine Trennung (—) zweier Theile der Fläche entspricht, alle möglichen Arten ohne Singularitäten. Herr Klein hat dies durch folgendes Schema dargestellt. Geht man aus von einer Fläche mit vier Knoten, an deren jedem man eine Verbindung oder Trennung vornehmen kann, so liefert die Operation

$++++$	I Flächen mit 27 rellen Geraden,	
$+++-$	II „ „ 15 „ „ ,	
$++--$	III „ „ 7 „ „ ,	
$+---$	IV „ „ 3 „ „	und 7 reellen Ebenen,
$----$	V „ „ 3 „ „	„ 13 „ „ .

Diese Operationen lassen sich nun in der Rechnung sehr leicht durchführen, wenn die Gleichung in ihrer canonischen Form gegeben ist, nämlich die linke Seite als eine Summe von fünf Cuben.

Die Singularitäten aber, welche auftreten, wenn vier Pentaederebenen durch einen Punkt gehen, wobei dieselben nicht mehr immer eindeutig bestimmt bleiben, bedürfen einer besonderen Discussion. Hierher gehört auch das Zusammenfallen zweier oder mehrerer Pentaederebenen. Bei solchen Flächen treten biplanare Knoten auf. Den Gang der sehr ausgedehnten Discussion skizzirt der Herr Verfasser selbst etwa folgendermassen:

Nach einleitenden Betrachtungen über pentaedrische Coordinaten werden die Flächen mit der Gleichungsform

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2}+\frac{x_2^3}{\alpha_2^2}+\frac{x_3^3}{\alpha_3^2}+\frac{x_4^3}{\alpha_4^2}+\frac{x_5^3}{\alpha_5^2}=0$$

vorausgesetzt, wo x_1 den mit einer Constanten multiplicirten Abstand des Punktes von einer Pentaederebene bedeutet und $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ ist.

Da aber Flächen mit biplanarem Knoten in dieser Gleichungsform nicht enthalten sind, so werden Durchgänge durch solche Punkte besonders untersucht. Als Abschluss dieser Untersuchung folgt eine Vertheilung der Knoten, welche dabei auftreten können,

in die verschiedenen Kammern, in welche der Raum durch die Pentaederebenen getheilt wird, und die Aufzählung der dabei auftretenden Mannigfaltigkeiten. Es giebt nämlich fünf Tetraederkammern und zehn Pentaederkammern, wenn sämmtliche Ebenen reell sind und man den Raum als durch's Unendliche geschlossen ansieht; sind aber Pentaederebenen conjugirt, so ändern sich diese Beziehungen in leicht erkennbarer Weise. Die isolirten Knoten erfüllen die Tetraederkammern, die nicht isolirten die Pentaederkammern. Complicirter werden diese Gesetze durch die Singularitäten, welche bei dem Pentaeder eintreten können. Es wird dann ein Satz abgeleitet, mit Hülfe dessen die Gleichungen aller Flächen mit mehrfachen Pentaederebenen aufgestellt werden können. Diese werden alsdann besonders discutirt. Darauf werden die Flächen mit unbestimmtem Pentaeder aufgezählt und untersucht. Den Schluss bildet eine tabellarische Zusammenstellung aller gewonnenen Resultate. A.

Ad. Hochheim. Ueber die Polarflächen der windschiefen Flächen dritter Ordnung. Schlömilch Z. XXIII. 308-326, 345-361.

Die Arbeit ist eine sehr eingehende Discussion der Polarflächen der windschiefen Flächen dritter Ordnung auf analytischer Grundlage.

Die allgemeine Gleichung der genannten Flächen in tetraedrischen Coordinaten ist

$$x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2 = 0.$$

Sie enthält die Gerade $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ als Doppelgerade D und ausserdem die Gerade $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ als einfache Gerade E, die nicht zur Schaar der geradlinigen Erzeugenden gehört. Jede Gerade, die zur Schaar der Erzeugenden gehört, genügt den Gleichungen

$$x_1 = \alpha^2 x_2, \quad x_3 = \alpha x_4$$

und schneidet sowohl D als E. Durch jeden Punkt von D gehen zwei, durch jeden Punkt von E geht eine Erzeugende; in jeder Ebene durch D liegt eine, in jeder Ebene durch E liegen zwei

Erzeugende, welche zweimal in eine zusammenfallen (doppelte Erzeugende). Eine Singularität, auf welche zuerst Cayley aufmerksam gemacht hat, tritt ein, wenn die Geraden D und E zusammenfallen; alsdann kann die Gleichung der Fläche in die Form gebracht werden

$$x_2^3 + x_1(x_1 x_3 + x_2 x_4) = 0,$$

wo

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

die Gleichungen der Geraden T sind, in die sowohl D als E fällt.

Die Untersuchung erstreckt sich nun zunächst auf die quadratischen und ebenen Polarflächen der characterisirten Flächen, wobei auch das Resultat gewonnen wird, dass die Klasse der Flächen ihrem Grade gleich ist, (eine Eigenschaft, welche, wie Referent bemerken möchte, nach einem leicht zu erweisenden Chasles'schen Satze, allen windschiefen Flächen zukommt,) auf ihre Hessesche Fläche (von Steiner Kernfläche genannt), deren allgemeine Gleichung $16x_3^2 x_4^2 = 0$ ist, die also in zwei doppeltgedachte Ebenen zerfällt; auf die parabolische Linie (von Steiner Wendungscurve genannt), welche aus der Linie D und den beiden doppelten Erzeugenden besteht; auf den Tangentenkegel, auf die Inflexionstangenten, welche sich von einem Punkte ausserhalb an die Fläche ziehen lassen, deren Anzahl im Allgemeinen sechs ist, von denen aber drei durch D gehende zusammenfallen; auf die gemischte Polare zweier Punkte, auf die erste Polare einer Geraden, auf die Pole einer Ebene. Ein zweiter Abschnitt behandelt die verschiedenen Enveloppen der Polarebenen, welche ebenfalls den allgemeinen Methoden entsprechend discutirt werden. In Folge der einfachen Form der Gleichung der Fläche lassen sich die Rechnungen sämmtlich bequem durchführen. Besondere Resultate, welche sich nicht aus den allgemeineren Theorien erwarten liessen, sind nicht hervorzuheben. A.

Nash, Morel. Solutions of a question (5432). Educ. Times XXX. 96-97.

Von einem Punkt sind Senkrechte auf die Erzeugenden der Fläche $z(x^2+y^2)-2mxy = 0$ gefällt. Ihre Fusspunkte liegen auf einer ebenen Ellipse. O.

A. Voss. Ueber vier Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung. Clebsch Ann. XIII. 168-174.

Wenn man alle Raumcurven dritter Ordnung betrachtet, welche drei gegebene Gerade berühren, so bilden ihre sämmtlichen Tangenten nicht, wie man erwarten sollte, eine Mannigfaltigkeit von 4, sondern nur eine solche von 3 Dimensionen, oder einen Complex, indem immer 4 Linien, die von einer Curve berührt werden, von unendlich vielen berührt werden. Die nähere Untersuchung dieses Complexes, der, wie sich zeigt, vom vierten Grade ist, ist die Aufgabe der obengenannten Arbeit.

Lth.

G. Smith Sykes. Spherical conics. Proc. Am. Ac. XIV. 375-395.

Die Arbeit enthält eine allgemeine Theorie der sphärischen Kegelschnitte. Als sphärische Coordinaten werden die Tangenten der Länge und Breite eines Punktes der Kugel gewählt, was auf eine centrale Projection der Kugel auf eine Tangentialebene hinauskommt. Nach Bestimmung der Tangenten und Normalen kommen zur Behandlung die conjugirten Durchmesser, die Beziehung der Curve zu ihren cyclischen Bogen (d. h. zu den grössten Kreisen, deren Ebene den projicirenden Kegel in Punktkreisen schneiden), welche bekanntlich grosse Analogie mit den Asymptoten der Hyperbel zeigen, die Focaleigenschaften, welche aus den die cyclischen Bogen betreffenden durch Uebergang zum Supplementarkegelschnitt hervorgehen, ferner einige Sätze über concyclische und confocale Kegelschnitte, dann die Beziehung zwischen Pol und Polare, speciell zwischen Brennpunkt und Directrix, die projectivischen Relationen, und einige andere Eigenschaften. Zum Schluss wird der Uebergang zu ebenen Kegelschnitten gemacht, indem der Mittelpunkt der Kugel in's Unend-

liche gerückt wird, wobei je nach den besonderen Voraussetzungen Ellipse, Hyperbel oder Parabel entstehen, deren Eigenschaften sich so durch Grenzbetrachtungen aus denen der sphärischen Kegelschnitte ergeben.

Der Gegenstand selbst ist in verschiedener Form z. B. in Salmon-Fiedlers Analytischer Geometrie und in der Abhandlung von H. Voigt: Der sphärische Kegelschnitt. Diss. Breslau 1873 (siehe F. d. M. V. p. 395) sehr eingehend behandelt. Die vorliegende Darstellung ist einfach und kurz. A.

H. M. Jeffery. On the spherical class cubic with three single foci. Rep. Brit. Ass. 1878.

Die drei Brennpunkte ABC mögen einen Quadranten für sich bilden, so dass das Beziehungsdreieck ABC drei rechte Winkel hat. Eine Gruppe einer Klasse dritten Grades (class cubics) kann dann in Liniencoordinaten bezeichnet werden durch

$$2dpqr+(\alpha p+\beta q+\gamma r)(p^2+q^2+r^2)=0.$$

Wenn dann in dieser Gruppe Curven mit Inflexionspunkten sind, so kann man die Art des begleitenden Punktes (satellite point) finden durch Elimination von d aus den Invarianten vierten und sechsten Grades der cubischen Gleichung.

Csy. (O.)

D. Andere specielle Raumgebilde.

E. Amigues. Sur la quartique de Steiner. C. R. LXXXVI. 38-39.

Einige Sätze über die Steiner'sche Fläche, besonders der Nachweis eines Punktes, der in manchen Beziehungen sich wie der Mittelpunkt bei den Kegelschnitten verhält.

Lth.

S. Lie. Petite contribution à la théorie de la surface Steinérienne. Arch. f. Math. og Naturv. III. 84-91.

Versteht man unter dem Pol einer Ebene in Beziehung auf einen Kegelschnitt den Pol der Durchschnittsgeraden der gegebenen Ebene mit der Ebene des Kegelschnitts, so besteht der Satz: Der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle Kegelschnitte, die auf einer Steiner'schen Fläche vierter Ordnung dritter Klasse liegen, ist wiederum eine solche Fläche. Wenn jedoch die vorgelegte Fläche die Ebene berührt, so ist die neue Fläche eine Fläche zweiten Grades. Der Satz bleibt gültig, wenn die vorgelegte Fläche in eine Linienfläche dritter Ordnung ausartet. L.

K. Rohn. Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Functionen $p = 2$. Diss. München.

Die vorliegende inhaltreiche Arbeit steht im Zusammenhange mit den Arbeiten der Herren Borchardt (Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche, Borchardt J. LXXXIII. 234—245, siehe F. d. M. IX. 562) und Cayley (On the 16 nodal quartic surface, Borchardt J. LXXXIV. 238—241, siehe F. d. M. IX. 567, ferner: On the double thetafunctions, Borchardt J. LXXXIII. 210—219, siehe F. d. M. IX. 365). Sie nimmt aber ihren Ausgangspunkt von gewissen Betrachtungen der Liniengeometrie, durch welche in der That die Kummer'sche Fläche, wie Plücker, Clebsch und Klein gezeigt haben, auf eine sehr elegante Weise behandelt werden kann.

Im ersten Theile werden diese geometrischen Betrachtungen durchgeführt. Bedeuten

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \ . \ . \ . \ x_6 = 0$$

die Gleichungen sechs linearer Complexe, während die linken Seiten der identischen Relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0$$

genügen, so stellt die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{k_1} + \frac{x_2^2}{k_2} + \cdots + \frac{x_6^2}{k_6} = 0$$

die allgemeinste Gleichung eines Complexes zweiten Grades dar, und die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \cdots + \frac{x_6^2}{k_6 - \lambda} = 0$$

stellt für den Parameter λ eine Schaar von Complexen zweiten Grades dar, welche wegen der Analogie mit den Flächen zweiten Grades als „confocal" bezeichnet werden können. Diese Schaar kann ganz analog mit den confocalen Flächen zur Darstellung „elliptischer Liniencoordinaten" benutzt werden. Setzt man nämlich für $x_1 x_2 \ldots x_6$ die Coordinaten einer gegebenen Geraden ein, so erhält man 4 Werthe für λ; giebt man umgekehrt vier beliebige Werthe $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$, so haben die vier entsprechenden confocalen Complexe 32 Gerade gemein, welche sich nur durch die Vorzeichen ihrer Coordinaten unterscheiden.

Die sämmtlichen confocalen Complexe haben eine gemeinschaftliche Singularitätenfläche, welche von denjenigen Geraden berührt wird, für welche zwei der vier λ zusammenfallen. Dieses ist eine Kummer'sche Fläche. Es zeigt sich dann weiter, dass alle Tangenten in einem Punkte der Kummer'schen Fläche zwei confocalen Complexen angehören, welche den Parametern λ_1 und λ_2 entsprechen mögen. Diese beiden Parameter bestimmen also je 32 Punkte der Kummer'schen Fläche. Variirt man einen der Parameter, während der andere constant bleibt, so bewegen sich die 32 Punkte in der Richtung der Haupttangenten. Auf eine grosse Menge anderer Beziehungen, welche aus der Betrachtung der λ gewonnen werden, kann hier nicht eingegangen werden. Es werden nun die Lagenbeziehungen und gestaltlichen Verhältnisse der Kummer'schen Fläche untersucht, wobei dieselbe durch geringe Constantenänderung abgeleitet wird aus einer doppelt gezählten Fläche zweiten Grades, welche einem Tetraeder eingeschrieben ist. Auf die Lage der 16 Knotenpunkte und den Verlauf der Haupttangentencurven, welche in der vorigen Betrachtung als Parameterlinien auftreten, wird hierbei besonders eingegangen,

und zwar mit Rücksicht auf die verschiedenen Fälle hinsichtlich der Realität.

Im zweiten Theile werden nun die zweiunddreissig Punkte, welche denselben Parameterwerthen entsprechen, durch Einführung hyperelliptischer Functionen in der Weise getrennt, dass die Vieldeutigkeit auf Unterschiede in den Perioden zurückgeführt wird. Es wird dann genauer die Vertheilung der Parameterwerthe auf die 16 Felder mit hyperbolischer Krümmung (negativem Krümmungsmass) und die 16 Felder mit elliptischer Krümmung (positivem Krümmungsmass) untersucht.

Im dritten Theil der Arbeit ist gezeigt, wie die Darstellung mit der Cayley-Borchardt'schen zusammenhängt. Als ein charakteristischer Unterschied erscheint zunächst, dass, während die Darstellung des Herrn Verfassers eine eindeutige ist, jene Darstellung in 16 verschiedenen Weisen auftritt. Der Herr Verfasser zeigt, wie durch eine Transformation zweiten Grades dieser Unterschied beseitigt werden kann, und deckt durch diese Transformation den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellungsweisen auf. A.

H. Weber. Ueber die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen. Borchardt J. LXXXIV. 332-355.

Der Herr Verfasser wendet, angeregt durch die Arbeiten der Herren Borchardt und Cayley über die Kummer'sche Fläche (Borchardt J. LXXXIII. 234 und 238, siehe F. d. M. IX. 562 und 567), auf diese Fläche eine früher von ihm durchgeführte Untersuchung über die Charakteristiken der Thetafunctionen mit zwei Variablen an, ganz analog derjenigen, welche die Grundlage seiner Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3 (Preisschrift. Berlin, G. Reimer 1876, siehe F. d. M. VIII. 293) bildet. Man vergleiche übrigens das vorstehende Referat.

Bedeutet

$$\varphi(x_1 x_2) = a_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

eine Function zweiten Grades, deren reeller Bestandtheil wesentlich negativ ist, so setzt man

$$\vartheta \left\{ \begin{matrix} g_1 \, g_2 \\ h_1 \, h_2 \end{matrix} \right\} (v_1 \, v_2)$$

$$= \Sigma \Sigma e^{\varphi\left(n_1 + \frac{g_1}{2},\, n_2 + \frac{g_2}{2}\right) + \left(n_1 + \frac{g_1}{2}\right)(2v_1 + h_1 \pi i) + \left(n_2 + \frac{g_2}{2}\right)(2v_2 + h_2 \pi i)},$$

wo sich die Summation für n_1 und n_2 von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, und die g und h gleich Null oder Eins zu setzen sind. Das Symbol $\left\{ \begin{matrix} g_1 \, g_2 \\ h_1 \, h_2 \end{matrix} \right\}$ heisst die Charakteristik der Thetafunction und zugleich der halben Perioden

$$\tfrac{1}{2}(h_1 \pi i + g_1 a_{1,1} + g_2 a_{1,2}), \quad \tfrac{1}{2}(h_2 \pi i + g_1 a_{2,1} + g_2 a_{2,2}).$$

Diese Charakteristik wird oft kürzer durch einen eingeklammerten Buchstaben bezeichnet.

Eine Charakteristik heisst grade oder ungrade, jenachdem $(g_1 h_1 + g_2 h_2)$ grade oder ungrade ist. Dem entsprechend sind die Thetafunctionen gerade oder ungerade Functionen ihrer Argumente. Unter den sechzehn verschiedenen Charakteristiken, welche überhaupt vorhanden sind, giebt es, wie leicht zu erkennen ist, 6 ungrade und 10 grade. Die ersteren werden in beliebiger Reihenfolge durch

$$(\beta_i) \quad i = 1 \ldots i = 6$$

bezeichnet.

Ist

$$(\omega) = \begin{pmatrix} g_1 \, g_2 \\ h_1 \, h_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\omega') = \begin{pmatrix} g'_1 \, g'_2 \\ h'_1 \, h'_2 \end{pmatrix},$$

so wird unter der Summe der Charakteristiken verstanden die Charakteristik

$$(\omega + \omega') = \begin{pmatrix} g_1 + g'_1, & h_1 + h'_1 \\ g_2 + g'_2, & h_2 + h'_2 \end{pmatrix},$$

bei welcher die Elemente auf ihren Rest mod. 2 reducirt werden können, so dass Summe und Differenz zweier Charakteristiken identisch sind.

Dann gelten folgende leicht erweisbare Gesetze:

I. Die Summe aller ungraden Charakteristiken ist gleich

$$\begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} = (0).$$

II. Jede Characteristik, ausser (0), lässt sich auf eine einzige Art als Summe zweier ungrader Characteristiken darstellen.

III. Jede Characteristik, ausser (0), lässt sich auf vier Arten in eine grade und eine ungrade und auf drei Arten in zwei grade Characteristiken zerlegen.

IV. Die Summe dreier von einander verschiedener ungraden Characteristiken ist stets grade.

V. Jede grade Charakteristik, einschliesslich (0), lässt sich auf zwei Arten in drei von einander verschiedene ungrade Charakteristiken zerlegen.

Zunächst wird mit Hülfe dieser einfachen Gesetze bewiesen, dass zwischen je fünf Thetaquadraten eine lineare homogene Gleichung existirt, und dass sich sechzehn Systeme von je sechs Thetaquadraten finden lassen von der Art, dass zwischen je vier Quadraten eines Systems eine homogene lineare Gleichung besteht. Die sechs Thetaquadrate, die den ungraden Characteristiken entsprechen, bilden ein solches System

$$(\beta_1),\quad (\beta_2),\quad (\beta_3),\quad (\beta_4),\quad (\beta_5),\quad (\beta_6),$$

ein anderes ist

$$(\beta_1),\ (\beta_2),\ (\beta_1+\beta_2+\beta_3),\ (\beta_1+\beta_2+\beta_4),\ (\beta_1+\beta_2+\beta_5),\ (\beta_1+\beta_2+\beta_6)$$

u. s. f.

Ferner wird gezeigt, dass zwischen drei Producten von je zwei Thetafunctionen, deren Characteristiken dieselbe Summe haben, eine homogene lineare Relation besteht, und zwar ist die Zahl dieser Relationen 120. Aus den hier besprochenen Relationen lassen sich dann die Göpel'schen Relationen vierter Ordnung herleiten, welche Herr Borchardt in der oben genannten Arbeit benutzt.

Ferner folgen daraus die Rosenhain'schen Relationen zwischen den Nullwerthen der Thetafunctionen und solche, in denen die Nullwerthe der Ableitungen der ungraden Thetafunction vorkommen, die ebenfalls von Rosenhain, jedoch ohne Beweis, mitgetheilt sind.

Die Beziehung zu den hyperelliptischen Integralen wird nun dadurch gewonnen, dass man für die beiden Argumente v_1 und v_2 die hyperelliptischen Integrale erster Gattung einsetzt, nämlich

$$v_1 = \int_{z_1}^{z_1} \frac{(a_1 + b_1 z)\, dz}{\sqrt{(1-\alpha_1 z)(1-\alpha_2 z)(1-\alpha_3 z)(1-\alpha_4 z)(1-\alpha_5 z)(1-\alpha_6 z)}},$$

$$v_2 = \int_{z_1}^{z_2} \frac{(a_2 + b_2 z)\, dz}{\sqrt{(1-\alpha_1 z)(1-\alpha_2 z)(1-\alpha_3 z)(1-\alpha_4 z)(1-\alpha_5 z)(1-\alpha_6 z)}},$$

wo gewisse Beziehungen zwischen den Constanten $a_1\, b_1\, a_2\, b_2$ der Moduln der Thetafunctionen und den Periodicitätsmoduln der Integrale bestehen. Alsdann lassen sich die Quotienten zweier Thetafunctionen algebraisch durch Z_1 und Z_2 darstellen. Diese Darstellung wird in der Abhandlung ihrer wichtigsten Beziehungen noch kurz behandelt.

Setzt man nun irgend vier linear unabhängige von den Quadraten der Thetafunctionen proportional den homogenen Coordinaten eines Punktes im Raum p, q, r, s, so ist hierdurch, wenn man die Argumente $v_1\, v_2$ als willkürliche Veränderliche betrachtet, eine Fläche dargestellt. Jedem Werthepaar $v_1\, v_2$ entspricht ein Punkt, und allen Werthsystemen, die sich um Periodensysteme unterscheiden, derselbe Punkt. Setzt man ausserdem irgend eine Thetafunction gleich Null, so erhält man einen ebenen Schnitt jener Fläche, da zwischen je fünf Thetafunctionen eine lineare homogene Gleichung besteht.

Die Gleichung der betrachteten Fläche wird durch Elimination von v_1 und v_2 mit Hülfe der oben entwickelten Relationen aufgestellt in 120 analogen Formen; eine derselben ist

$$\sqrt{p\left(s\frac{\vartheta^2\binom{0\,0}{1\,0}\vartheta\binom{0\,0}{0\,1}\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}}{\vartheta^2\binom{0\,0}{1\,1}\vartheta^2\binom{1\,1}{1\,1}} - q\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}} + r\frac{\vartheta\binom{0\,0}{0\,1}\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}}{\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}}\right)}$$
$$+\sqrt{q\left(s\frac{\vartheta^2\binom{0\,0}{1\,1}\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}}{\vartheta^2\binom{1\,1}{1\,1}\vartheta^2\binom{0\,0}{1\,0}} - p\frac{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,1}\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}} + r\frac{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}}{\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}}\right)}$$
$$+\sqrt{r\left(s\frac{\vartheta^2\binom{1\,1}{1\,1}\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,1}}{\vartheta^2\binom{0\,0}{1\,0}\vartheta^2\binom{0\,0}{1\,1}} - p\frac{\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,1}\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}} + q\frac{\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}}\right)} = 0$$

wo die ϑ die Nullwerthe bedeuten.

Diese Gleichung stimmt im Wesentlichen mit der Gleichung der Kummer'schen Flächen überein (Monatsber. d. Berl. Ac. 1864 p. 252). Auch hat die hier dargestellte Fläche denselben Grad der Allgemeinheit, d. h. sie ist die allgemeinste Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten. Jede der sechzehn Thetafunctionen, gleich Null gesetzt, ergiebt den Durchschnitt (im weiteren Sinne) mit einer singulären Tangentialebene, d. h. mit einer solchen, welche die Fläche längs eines Kegelschnittes berührt; von diesen Ebenen gehen 16 mal je sechs durch einen Knotenpunkt, und die Charakteristiken geben ein Mittel, zu erkennen, ob eine bestimmte dieser Ebenen durch einen bestimmten Knotenpunkt geht, oder nicht.

In Bezug auf die Lagenverhältnisse der Knotenpunkte und singulären Ebenen gewinnt der Herr Verfasser nun folgende Resultate:

1) Durch irgend zwei Knotenpunkte gehen zwei singuläre Tangentialebenen;

2) die Systeme von drei Knotenpunkten zerfallen in zwei Klassen, je nachdem die durch sie bestimmte Ebene eine singuläre Tangentialebene ist, oder nicht. Es giebt 320 Systeme der ersten, 240 der zweiten Klasse;

3) die Systeme von 4 Knotenpunkten und die durch sie bestimmten Tetraeder zerfallen in drei Klassen:

a. Tetraeder der ersten Art, deren vier Ebenen singuläre Tangentialebenen sind (80);

b. der zweiten Art, welche gar keine singulären Tangentialebenen enthalten (60);

c. der dritten Art, welche zwei und nur zwei singuläre Tangentialebenen enthalten (1440).

In den vier Ebenen eines Tetraeders der ersten Art sind alle sechzehn Knotenpunkte enthalten.

Die sechzehn Knotenpunkte lassen sich ferner auf fünfzehn verschiedene Arten in vier Tetraeder der zweiten Art zusammenfassen, von denen jedes die drei übrigen vollständig bestimmt. Es ergiebt sich hieraus ferner, dass zwischen gewissen Systemen von 6 Knotenpunkten gewisse projectivische Relationen bestehen.

Von sechs Knotenpunkten, welche nicht in dieser Relation stehen, bilden je vier ein Tetraeder der zweiten Art. Aus sechs solchen Knotenpunkten können die übrigen sämmtlich linear construirt werden. Uebrigens ist zu beachten, dass das der Kummer'schen Fläche entsprechende polare Gebilde wieder eine Kummer'sche Fläche ist, dass also alle hier besprochenen Beziehungen polar entsprechende Beziehungen zur Folge haben. Zum Schluss bemerkt der Herr Verfasser, dass in einem besondern Falle vier Knotenpunkte in eine Ebene fallen können, welche nicht singuläre Tangentialebene ist. Ist dies der Fall, so giebt es viermal vier Knotenpunkte, die diese Eigenschaft haben. Die hierbei auftretenden Thetafunctionen können vermittelst einer Transformation zweiten Grades durch elliptische Thetafunctionen ausgedrückt werden. Dieser Fall tritt ein bei der Fresnel'schen Wellenfläche und ihren projectivischen Umformungen. Die rechtwinkligen Coordinaten der Wellenfläche stellen sich dann folgendermassen dar:

$$x = b \sin\operatorname{am}(u, \varkappa)\ \Delta\operatorname{am}(v, \lambda)$$
$$y = a \cos\operatorname{am}(u, \varkappa)\ \cos\operatorname{am}(v, \lambda)$$
$$z = a \Delta\operatorname{am}(u, \varkappa)\ \sin\operatorname{am}(v, \lambda)$$
$$\varkappa^2 = \frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}, \quad \varkappa'^2 = \frac{c^2-b^2}{c^2-a^2},$$
$$\lambda^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}, \quad \lambda'^2 = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}.$$

Die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ bilden zwei orthogonale Curvenschaaren der Fläche. A.

H. M. Jeffery. On a cubic referred to a tetrad of corresponding points. Quart. J. XV. 198-224.

Von einem Punkte P einer Curve dritter Ordnung aus lassen sich im Allgemeinen vier Tangenten an dieselbe legen, welche nicht in P berühren, für deren Berührungspunkte $ABCD$ also der Punkt P der sogenannte Tangentialpunkt ist. Diese vier Punkte bilden ein Quadrupel (a tetrad of corresponding points). Es ist

bekannt und leicht zu beweisen, dass die drei Durchschnittspunkte *QRS* der Diagonalen des vollständigen Vierecks *ABCD* mit *P* zusammen wieder in solches Quadrupel bilden, ferner, dass die vier Strahlen von einem beliebigen Curvenpunkt *T* aus nach einem Quadrupel P, Q, R, S gezogen die Curve ausserdem in den vier Punkten eines neuen Quadrupels $P' Q' R' S'$ schneiden, und dass man auf diese Weise die sämmtlichen Quadrupel aus einem einzigen in linearer Weise construiren kann. Von den sechs Diagonalen berühren je zwei, welche durch einen Diagonalpunkt gehen, dieselbe Cayley'sche Curve dritter Klasse, wie Hesse bewiesen hat.

Betrachtet man die Curve selbst als eine Hesse'sche, so gehört sie als solche zu drei durch dieselben neun Wendepunkte gelegten (sogenannten syzygetischen) Curven dritter Ordnung und zu drei Cayley'schen Curven dritter Klasse, die eben die oben bezeichnete Eigenschaft haben.

Der Ort der Durchschnittspunkte von Tangentenpaaren, welche in dem zweiten und dritten Durchschnittspunkt eines durch *P* gezogenen Strahls gelegt sind, ist eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, welche durch die vier Punkte des Quadrupels *ABCD* gehen, in *Q*, *R*, *S* Doppelpunkte haben und durch den Tangentialpunkt des Quadrupels *PQRS* geht.

Die Art derjenigen drei Punkte *UVW*, welche die von *P* ausgehenden Sehnen $PP_1 P_2$

1) arithmetisch theilen, d. h. so, dass

$$PU = \frac{PP_1 + PP_2}{2};$$

2) geometrisch, d. h. so, dass

$$PV = \sqrt{PP_1 \cdot PP_2};$$

3) harmonisch, d. h. so, dass

$$\frac{2}{PW} = \frac{1}{PP_1} + \frac{1}{PP_1},$$

sind 1) und 2) gewisse Curven dritter Ordnung, und 3) ein Kegelschnitt, nämlich die erste Polare der gegebenen Curve in Bezug auf den Pol *P*.

Für Curven mit Singularitäten, d. h. einem Doppel- oder Rückkehrpunkt modificiren sich diese Resultate.

Die sämmtlichen Betrachtungen lassen sich auf sphärische Curven und dann nach dem Gesetz der Dualität auf ebene und sphärische Curven dritter Klasse übertragen.

Als Ausgangspunkt für die analytische Behandlung der angedeuteten Probleme dient die Definition der zu untersuchenden Curve als geometrischen Ortes der Berührungspunkte der von einem Punkte P ausgehenden Tangenten an die durch die vier Punkte $ABCD$ gelegten Kegelschnitte. Nimmt man als Coordinatendreieck dasjenige, dessen Eckpunkte die Durchschnittspunkte QRS der Gegenseiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ sind, und sind die Coordinaten der vier Eckpunkte

$$\pm x, \ \pm y, \ \pm z,$$

diejenigen des Punktes P aber f, g, h, so ist die Gleichung der Curve

$$\frac{x^2}{\alpha}(\beta h-\gamma g)+\frac{y^2}{\beta}(\gamma f-\alpha h)+\frac{z^2}{\gamma}(\alpha g-\beta f)=0,$$

wenn $\alpha\beta\gamma$ die laufenden Coordinaten sind. Die Punkte $ABCD$ bilden, wie oben, das erste Quadrupel, $PQRS$ das zweite, der gemeinsame Tangentialpunkt des zweiten Quadrupels hat, wenn man $f:g:h=1:1:1$ setzt, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann, die Coordinaten $x^2:y^2:z^2$. Die Untersuchung lässt sich dann auf dieser Grundlage bequem durchführen. So ergeben sich z. B., wenn man die Punkte des Quadrupels $PQRS$ oder (1, 11), (1,00), (0,10), (0,01) mit einem beliebigen T verbindet, für die Punkte des aus den dritten Schnittpunkten gebildeten Quadrupels $P' R' Q' S'$ die Coordinatenwerthe

$$(FGH) \ (Fgh) \ (fGh) \ (fgH),$$

wo

$$F:G:H=x^2\frac{gh}{f}\,\frac{g-h}{gz^2-hy^2}:y^2\frac{hf}{g}\,\frac{h-f}{hx^2-fz^2}:z^2\frac{fg}{h}\,\frac{f-g}{fy^2-gx^2}.$$

Die Gleichung des Ortes der Schnittpunkte von Tangentenpaaren, deren Berührungspunkte auf einem beliebigen Strahl durch P liegen, ist

$$\Sigma\frac{x^2(y^2-z^2)}{\alpha^2}=0.$$

Die drei Cayley'schen Curven dritter Klasse haben Gleichungen von der Form

$$(p+q+2r)(p^2x^2-q^2y^2)+r^2(p-q)z^2=0.$$

Die Gleichungen der drei Curven, deren Hesse'sche die gegebene ist, sind

$$\frac{\alpha^2}{x^2}-\frac{\beta^2}{y^2}-\frac{(\alpha-\gamma)^2}{x^2-z^2}+\frac{(\beta-\gamma)^2}{y^2-z^2}=0$$

und die beiden durch cyclische Vertauschung der Buchstaben hieraus entstehenden. (Bei dieser Gleichung steht durch ein Versehen in der Abhandlung

$$\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\beta^2}{y^2}-\frac{(\alpha-\gamma)^2}{x^2-z^2}+\frac{(\beta-\gamma)^2}{y^2-z^2}=0.)$$

In einem Anhange werden die Curven dritter Ordnung in der Gleichungsform

$$\frac{l}{\alpha}+\frac{m}{\beta}+\frac{n}{\gamma}+\frac{r}{\delta}=0$$

untersucht, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Abstände des Punktes von vier festen Geraden bedeuten, wie dies von andern mehrfach geschehen ist, und es wird der Zusammenhang dieser Darstellung mit den Quadrupeln besprochen. Die angewendeten Methoden erscheinen für die analytische Behandlung der Sache in der That wohl geeignet, doch ist nicht zu übersehen, dass sich die meisten der Resultate durch allgemeinere synthetische Betrachtungen sehr einfach ergeben und bereits in mannigfacher Weise untersucht sind. A.

Picquet. Sur une nouvelle espèce de courbes et de surfaces anallagmatiques. C. R. LXXXVII. 460-463.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. D. p. 487.

J. C. Malet. On certain surfaces derived from a quadric. Trans. of Dublin. 1878.

Enthält die Ausdehnung der Resultate der Arbeit „On the negative pedal of a central conic" (s. Abschn. IX. Cap. 2. D. p. 491) auf Oberflächen. Csy. (O.)

Henneberg. Bestimmung der niedrigsten Klassenzahl der algebraischen Minimalflächen. Brioschi Ann. (2) IX. 54-58.

Referat im folgenden Bande. M.

Kiepert. Ueber Minimalflächen. Zweite Abhandlung. Borchardt J. LXXXV. 171-183.

Die in der ersten Abhandlung über Minimalflächen (Borchardt J. LXXXI. 337-348; siehe F. d. M. VIII. 528) von dem Herrn Verfasser gegebenen allgemeinen Formeln werden hier auf 2 specielle Schaaren von Minimalflächen angewendet. Es sind dies die von Herrn Schwarz (Berl. Monatsber. 1872, p. 25 und 26) sogenannte Enneper'sche Flächenschaar, deren Gleichung die Form

$$k^2 Ch(2kx) - k'^2 Ch(2k'y) = \cos(2kk'z)$$

hat (vgl. Gött. Nachr. 1867 p. 297), und die Scherk'sche Flächenschaar mit der Gleichung

$$\cos x = e^z . \cos y$$

(vergl. Jablonow Acta. 1832, IV. fasc. II. 205-280 und Crelle J. XIII. 185-208). Die Coordinaten eines Punktes dieser Flächen lassen sich auf einfache Weise durch elliptische Functionen zweier Veränderlichen ξ, η darstellen. Für constante Werthe von ξ, η erhält man auf den Enneper'schen Flächen die Krümmungslinien, denen auf den Scherk'schen Flächen die Asymptotenlinien entsprechen; und für constante Werthe von $\xi \pm \eta$ ergeben sich auf den Enneper'schen Flächen die Asymptotenlinien, auf den Scherk'schen die Krümmungslinien. Auf den Enneper'schen Minimalflächen giebt es zwei Schaaren ebener Curven, deren Bogen ein elliptisches Integral erster Gattung ist, wobei die obere Grenze eine sehr einfache geometrische Bedeutung hat, und der Bogen der Krümmungslinien ist einem eben solchen elliptischen Integral proportional. Von der Scherk'schen Flächenschaar gilt Entsprechendes. M.

S. Lie. Sätze über Minimalflächen. I. Arch. f. Math. og Naturv. III. 166-176.

Enthält eine Minimalfläche eine ebene Krümmungslinie, so ist die Fläche algebraisch, wenn die Curve die Evolute einer ebenen algebraischen Curve ist, sonst nicht. Berührt eine Minimalfläche eine Cylinderfläche längs einer geodätischen Curve, die nicht eben ist, so ist die Fläche algebraisch, wenn die Curve algebraisch ist, und nur in diesem Falle. Die Minimalfläche, die die Evolute (die Polarfläche) einer algebraischen Raumcurve längs des Ortes der Krümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch. Berührt eine Minimalfläche die Evolute einer algebraischen Raumcurve C längs des Ortes der Krümmungsmittelpunkte, so steht sie in demselben Verhältnisse zu den Evoluten aller Focalcurven von C. Jede algebraische Minimalfläche berührt ∞^3 Evoluten algebraischer Raumcurven längs des Ortes der Krümmungsmittelpunkte. (Henneberg hat schon früher gezeigt, dass eine Minimalfläche mit einer ebenen geodätischen Curve nur dann algebraisch ist, wenn die Curve die Evolute einer ebenen algebraischen Curve ist). L.

S. Lie. Sätze über Minimalflächen. II. Arch. f. Math. og Naturv. IV. 224-233.

Die Tangentenkegel einer algebraischen Minimalfläche berühren dieselbe nach ∞^3 algebraischen Curven. Diesen Curven entsprechen auf der Bonnet'schen Biegungsfläche die ∞^3 Curven, längs deren diese letzte Fläche die Evoluten algebraischer Raumcurven berührt. In jedem allgebraischen Kegel ist es möglich, unbeschränkt viele (∞^∞) algebraische Minimalflächen einzuschreiben. Es ist möglich alle diese Flächen zu bestimmen.

L.

S. Lie. Sätze über Minimalflächen. III. Arch. f. Math. og Naturv. IV. 340-351.

Henneberg hat gezeigt, dass der orthogonale Querschnitt eines jeden einer algebraischen Minimalfläche umschriebenen Cylinders die Evolute einer ebenen algebraischen Curve ist. Es stellt sich daher die Aufgabe zu entscheiden, in welchen alge-

braischen Developpablen sich algebraische Minimalflächen einschreiben lassen.

In jede einer algebraischen Minimalfläche umschriebene Developpable ist es möglich ∞^{∞} algebraische Minimalflächen einzuschreiben. Dies ist somit der Fall mit allen Evoluten von algebraischen Raumcurven, und zugleich mit einer jeden Developpable, deren Ebenen eine feste Gerade unter constantem Winkel schneiden. Die eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen werden durch eine elegante Construction bestimmt. L.

H. Molins. Sur de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs représentent exactement la fonction elliptique de première espèce à module quelconque. Liouville J. (3) IV. 187-213.

Die Curve, welche die in der Ueberschrift erwähnte Eigenschaft hat, wird durch Transformation mittelst reciproker Radienvectoren (mit dem Ursprung des Coordinatensystems als Pol) aus der folgenden abgeleitet:

$$x = a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta$$
$$y = a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta$$
$$z = c\sin\zeta,$$

wo ζ ein Parameter, p eine rationale Zahl ist. Der Bogen dieser Curve drückt sich durch ein elliptisches Integral 2ter Gattung, der der transformirten durch ein solches 1ter Gattung aus. Für $c^2 = 4ab(1-p^2)$ gehen dieselben in Kreisintegrale über. Bl.

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

A. Schönfliess. Ueber das gleichseitige hyperbolische Paraboloid und ein aus ihm abgeleitetes Strahlsystem. Schlömilch Z. XXIII. 245-255.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3. C. p. 522.

E. Kummer. Ueber diejenigen Flächen, welche mit ihren reciprok polaren Flächen von gleicher Ordnung sind und dieselben Singularitäten besitzen. Berl. Monatsber. 1878. 25-36.

A. Cayley. On a sibi-reciprocal surface. Berl. Monatsber. 1878. 309-313.

In der erstgenannten Arbeit zeigt Herr Kummer eine neue Fläche, welche mit der sogenannten Kummer'schen Fläche die Eigenschaft theilt, sich selbst reciprok zu sein. Sie ist die Brennfläche eines Strahlensystems dritter Ordnung und dritter Klasse, im Falle dieses die Eigenschaft hat, dass die drei durch einen Punkt gehenden Strahlen nicht in einer Ebene liegen. Die Fläche besitzt eine Wendungscurve 8ten Grades, 12 singuläre, längs Kegelschnitten berührende Tangentenebenen und 12 Knotenpunkte, welche in sechs Schnittlinien der singulären Tangentenebenen liegen, dabei ist jede dieser Ebenen in 4 Punkten Schmiegungsebene der Wendungscurve, welche zugleich auf dem Berührungskegelschnitt der Tangentenebene gelegen sind.

Die Fläche kann auch erzeugt werden als Einhüllende einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung, die einen Parameter im dritten Grade enthalten.

In der zweiten der oben angeführten Abhandlungen zeigt Herr Cayley, dass in Folge dessen die Fläche zu einer Klasse gehört, die er im II. Bde. d. Proc. Lond. Math. Soc. aufgestellt hat. Die vorliegende Fläche kann, wie er beweist, angesehen werden als Einhüllende derjenigen Flächen zweiter Ordnung, in welchen sich entsprechende Complexe aus drei projectiven Büscheln von Complexen schneiden.

Lth.

Th. Reye. Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten. Borchardt J. LXXXVI. 84-107.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. B. p. 420.

F. ASCHIERI. Nozioni preliminari per la geometria projettiva dello spazio rigato. Nota I. Battaglini G. XVI. 346-364.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. B. p. 421.

L. CREMONA e G. BATTAGLINI. Relazioni sopra due lavori de E. Caporali. Atti R. Acc. d. Linc. (3) II. 175-176.

Berichte über die später zu besprechenden beiden Arbeiten von Caporali über die Complexe zweiten Grades und über die Kummer'sche Fläche. Nr.

F. ASCHIERI. Varie generazione di un complesso particolare di 2° grado determinato da un sistema polare nullo e da un sistema piano polare. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 612-620.

Der hier untersuchte Complex besteht aus den Treffgeraden der Strahlen zweier projectiver Büschel, welche auf der Schnittlinie ihrer Ebenen zwei projective Punktreihen mit zusammenfallenden Doppelpunkten bestimmen, und ist ein specieller Fall des tetraedralen. V.

R. KRAUSE. Ueber ein Gebilde der analytischen Geometrie des Raumes, welches dem Connexe zweiter Ordnung und erster Klasse entspricht. Pr. Chemnitz. Clebsch Ann. XIV. 294-322.

Für die Behandlung der Connexe in der Ebene hatte schon Clebsch in einer seiner letzten Arbeiten (Clebsch Ann. VI. S. 103) die Hauptgesichtspunkte angegeben. Der Verfasser erweitert den rein geometrischen Theil derselben auf den Raumconnex $a_\alpha^m \alpha_u^n = 0$ oder $[m, n]$ und untersucht insbesondere den Connex $[2, 1]$. Jeder Ebene entspricht eine F_2 als Connexfläche, welche in einen Kegel übergeht, wenn die Ebenen eine Fläche vierter Classe, die Determinantenfläche des Connexes umhüllen; die

Kegelspitzen liegen dann auf der Kernfläche vierter Ordnung K. Sodann wird der Begriff des conjugirten Connexes, sowie der eines anderen covarianten Gebildes entwickelt; der conjugirte Connex ist für [2, 1] ein [4, 8], dessen Gleichung in symbolischer Form als Resultante dreier ternärer quadratischer Formen erhalten werden kann. Die Abhandlung schliesst mit einigen Bemerkungen über die Haupt-Coincidenzcurven des Connexes. V.

A. Cayley. On the geometrical representation of imaginary variables by a real correspondence of two planes. Proc. L. M. S. IX. 31-39.

Die sämmtlichen Werthe der complexen Zahlen u, v, welche eine Gleichung $f(uv) = 0$ befriedigen, kann man in zwei verschiedenen Ebenen P, Π darstellen; jeder Curve C in P entspricht dann eine correspondirende Curve Γ in Π. Von dieser Auffassung hatte bereits Herr Frege in seiner Dissertation: „Geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene," Jena 1873, Gebrauch gemacht. Herr Cayley, welcher schon (Proc. L. M. S. VIII. p. 212) die Gleichung $u^2+v^2 = a^2$ interpretirt hatte, erläutert vom Standpunkt der Analysis situs aus die verschiedenen Gestalten der Curven Γ, welche einer geschlossenen Curve C entsprechen, insbesondere den Fall, wo C einen Verzweigungspunkt von P einschliesst. V.

A. Voss. Raumcurven und Developpabele. Clebsch Ann. XIII. 232-249.

Soll eine Gerade zwei unendlich nahe Tangenten einer Raumcurve treffen, so muss dieselbe entweder eine Treffgerade der Curve oder eine Tangente der zu letzterer gehörenden Developpabelen sein. Die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten wird daher durch eine Discriminante dargestellt, welche vermöge der Identität zwischen diesen Liniencoordinaten in zwei rationale Factoren zerfallen muss. Diese Verhältnisse werden algebraisch erläutert an den rationalen Raumcurven, insbesondere an der

Raumcurve dritter Ordnung und in Verbindung damit der Zusammenhang des Formensystems einer binären biquadratischen Form geometrisch interpretirt. V.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

EM. WEYR. Ueber die Abbildung einer mit einem Cuspidalpunkt versehenen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt. Wien. Ber. LXXVIII. 396-398.

EM. WEYR. Ueber die Abbildung einer Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt auf einen Kegelschnitt. Wien. Ber. LXXVIII. 891-895.

Es handelt sich um die Uebertragung einiger Beziehungen zwischen Punkten der genannten Curven vierter Ordnung auf Constructionen an einem Kegelschnitt, dessen Punkte eindeutig dem Parameter entsprechen, durch welchen sich die Coordinaten jener Curven darstellen lassen. Man kann als die Quelle der Ueberlegungen des Verfassers wohl die bekannten v. Staudt'schen Constructionen von Würfen auf einem Kegelschnitt bezeichnen.

Bl.

E. WEYR. Vorläufige Bemerkungen über die Abbildungen der rationalen ebenen Curven auf einander. Wien. Ber. 1878. 228-229.

Bl.

F. P. Ruffini. Risoluzione di 2 equazioni di condizione di trasformazione cremoniana di figure piane. Mém. di Bologna VIII.

P. Mansion. Sur la transformation harmonique linéaire. N. C. M. IV. 257-261, 313-318.

Die homologische Transformation, definirt durch

$$X(z+a) = ax, \quad Y(z+a) = ay, \quad Z(z+a)+az = 0$$

ist die einzige umkehrbare lineare Transformation.

Mn. (O.)

B. Igel. Ueber die orthogonalen und einige ihnen verwandte Substitutionen. Wien, Gerold.

Werden in den Collineationsformeln zweier n-facher Mannigfaltigkeiten:

$$\mu x_i = \Sigma a_{ik} y_k$$

mit den Auflösungen:

$$\frac{R y_i}{\mu} = \Sigma A_{ik} x_k$$

beide Male die sich selbst entsprechenden Elemente aufgesucht, so entstehen zwei Gleichungen n^{ten} Grades mit den nämlichen Wurzeln μ. Dieses Principes bedient sich der Verfasser, um einige bekannte Determinantensätze, sowie ein Theorem von Aronhold (Crelle's J. LV. p. 97) zu erweisen.

V.

L. Bianchi. Nota sulle trasformazioni univoche nel piano e nello spazio. Battaglini G. XVI. 263-266.

Eindeutige Transformation einiger einfacher homaloidischer Curvenschaaren, d. h. Netz von rationalen Curven, die sich in je einem beweglichen Punkte schneiden. Die Raumtransformationen betreffen den bekannten Fall, wo die der Ebene entsprechenden Flächen, von der Ordnung n, einen $(n-1)$-fachen gemeinsamen Punkt haben.

Nr.

E. Bertini. Trasformazioni univoche involutorie nel piano. Darboux Bull. (2) II. 212-213.

R. de Paolis. Le trasformazioni piane doppie. Darboux Bull. (2) II. 209-211.

Referate über die in diesem Jahrbuch IX. p. 577 und 581 besprochenen Arbeiten. Nr.

M. Nöther. Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen. Erl. Ber. X. 81-86.

Ueber den Gegenstand dieser Note und über die betreffende Literatur ist in dem Jahrbuch IX. (1877), p. 581, gelegentlich einer Arbeit des Herrn de Paolis eingehend referirt worden. In jener Arbeit waren nur die Beziehungen betrachtet worden, welche nach geleisteter Abbildung zwischen den beiden Ebenen stattfinden; ohne dass die fundamentaleren Fragen: welche Doppelebenen überhaupt auf die einfache Ebene abbildbar sind, und wie man alle Systeme von hyperelliptischen Curven der einfachen Ebene, welche zu Doppelebenen führen, zu construiren habe, berührt waren. Mit diesen Fragen beschäftigt sich die vorliegende Note. Die beiden Fragen hängen in ihrer Lösung unmittelbar von einander ab; und die Note behandelt den Gegenstand nach der ersteren Seite. Man hat dabei die Aufgabe, ein zweifach unendliches System von rationalen Curven anzugeben, welche eine gegebene Curve (die Uebergangscurve der Doppelebene) überall, wo sie dieselbe treffen, von Fundamentalpunkten abgesehen, in der ersten Ordnung berühren, und unter deren gegenseitigen Schnittpunkten jeweils einer ausgezeichnet ist. Diese Aufgabe wird nach einer allgemeinen Methode, deren Fundament der „Restsatz“ (Clebsch Ann. VII. p. 271) ist, behandelt, wobei sich alle abbildbaren Doppelebenen, einige ganz singuläre Fälle möglicherweise ausgenommen, ergeben. Das Resultat ist, dass nur drei Arten und die aus denselben durch eindeutige Transformation ableitbaren existiren. Eine der drei Arten war vorher unbekannt, nämlich die, wo die Uebergangscurve eine

Curve 6ter Ordnung mit zwei benachbarten dreifachen Punkten wird. Nr.

R. DE PAOLIS. La trasformazione piana doppia di secondo ordine e la sua applicazione alla geometria non-euklidea. Mem. R. Acc. d. Linc. (3) II.

Von dem einfachsten Fall der ein-zweideutigen Ebenentransformationen (vgl. das vorhergehende Referat, sowie das Jahrb. IX. p. 581) wird eine Anwendung auf die Entwickelung der Beziehungen der nicht-Euklidischen Geometrie gemacht. In diesem Fall entsprechen den Geraden der einfachen Ebene E' die Kegelschnitte ϑ, welche durch einen festen Punkt der Doppelebene E gehen und deren Uebergangscurve Ω, einen Kegelschnitt, doppelt berühren; den Geraden der Doppelebene entspricht ein Netz von Kegelschnitten in E', welche durch zwei feste Punkte gehen. Lässt man diese zwei Punkte mit den Kreispunkten von E' zusammenfallen, so erhält man eine Transformation, durch welche alle Euklidischen Kreise von E' in die Kegelschnitte von E übergehen, welche Ω doppelt berühren, d. h. in die nicht-Euklidischen Kreise von E', wenn man Ω als absoluten Kegelschnitt für die projectivische Massbestimmung in E' zu Grunde legt. Umgekehrt entsprechen jedem solchen Kreise in E' zwei conjugirte Euklidische Kreise in E. Auf diesem Wege ist es möglich, alle Mass- und Lagenbeziehungen der Euklidischen Geometrie unmittelbar in solche der nicht-Euklidischen Geometrie zu übertragen. Dies geschieht vom Verfasser, wobei besonders auf die Systeme, welche Systemen orthogonaler Kreise, sich berührender Kreise etc. entsprechen, ausführlich eingegangen wird.

Nr.

R. DE PAOLIS. La trasformazione piana doppia di terzo ordine primo genere e la sua applicazione alle curve del quarto ordine. Mem. R. Acc. d. Linc. (3) II. 152.

L. Cremona e G. Battaglini. Relazione sopra la trasformazione piana doppia etc. Atti R. Acc. de Linc. (3) II. 152.

Der Fall der ein-zweideutigen Ebenentransformationen (siehe F. d. M. IX. 581), bei welchem die Uebergangscurve Ω der Doppelebene E eine allgemeine Curve 4[ter] Ordnung ist, ist von Clebsch behandelt und auf die Auszeichnung eines Aronhold'schen Systems von 7 Doppeltangenten der Ω, d. h. eines solchen Systems, bei welchem die Berührungspunkte von irgend drei derselben nicht auf einen Kegelschnitt liegen, zurückgeführt worden; und ein anderer Beweis der Abbildbarkeit einer solchen Doppelebene findet sich in der oben (p. 550) besprochenen Note des Referenten. Der Verfasser der vorliegenden Abhandlung geht nun von der bereits als bewiesen gedachten Abbildung selbst aus, also von demjenigen System von Curven 3[ter] Ordnung, C_3, mit 7 festen Fundamentalpunkten, welche in der einfachen Ebene E' gelegen sind, und den Geraden von E entsprechen. Es werden die Formeln der Abbildung entwickelt, wobei sich für die Uebergangscurve Ω und deren 28 Doppeltangenten explicite Ausdrücke ergeben, die aber natürlich im Wesentlichen identisch sind mit den schon von Aronhold gegebenen, da sie eben auf dem Ausdruck der Curve durch das Aronhold'sche 7-System beruhen. Dieser Weg ist zu einer eingehenden Darlegung der gegenseitigen Beziehungen der Berührungscurven der Ω besonders geeignet, da die Beziehungen der entsprechenden Bilder in E' einfacher Art werden. Dies wird vom Verfasser durchgeführt, wobei die von den andern Geometern entdeckten Eigenschaften der Berührungscurve wiedergefunden werden, zunächst ohne Zufügung neuer Eigenschaften. Die zweite Note ist ein Referat über diese Abhandlung. Nr.

B. Conforme Abbildung.

C. Neumann. Ueber die peripolaren Coordinaten. Leipz. Ber 1877. 134-153.

Es sind dies dieselben Coordinaten, die der Verfasser bereits in seiner Schrift über die Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe (Halle 1864) angewendet hat.

In dem vorliegenden Aufsatz (der eigentlich nur eine vorbereitende Arbeit für gewisse elektrostatische Aufgaben repräsentirt) wird namentlich folgende Aufgabe behandelt: Im Raume sind irgend zwei Punkte ξ, x und irgend zwei Kreise β, b gegeben; ferner sind λ, ω, φ die peripolaren Coordinaten von ξ in Bezug auf β, und l, w, v diejenigen von x in Bezug auf b. In welcher Beziehung werden alsdann λ, ω, φ zu l, w, v stehen, falls man voraussetzt, dass die Figuren ξ, β und x, b einander conjugirt sind in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche? Nn.

C. Neumann. Zur Theorie der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche. Leipz. Ber. 1877. 154-155.

Die unendliche Ebene sei durch eine geschlossene Curve σ in einen äusseren Theil A und einen inneren Theil J zerlegt. Markirt man innerhalb J einen festen Punkt j, und will man die Fläche J durch conforme Abbildung in eine Kreisfläche vom Radius Eins verwandeln, deren Centrum dem Punkte j entspricht, so hat man längs σ eine Massenbelegung auszubreiten, welche für alle auf und ausserhalb σ gelegenen Punkte äquipotential (selbstverständlich ist hier immer vom logarithmischen Potential die Rede) ist mit einer in j concentrirten Masse Eins. Bezeichnet man alsdann das Potential dieser Belegung auf einen innerhalb J gelegenen Punkt (x, y) mit $G = G(x, y)$, ferner das Potential jener in j concentrirten Masse Eins auf ebendenselben Punkt (x, y) mit $T = T(x, y)$, und setzt man endlich:

$$U = G - T,$$

so bewerkstelligt sich die in Rede stehende Abbildung mittelst der Formel:

$$\xi + i\eta = e^{U+iV},$$

wo V die zu U conjugirte Function bezeichnet. Dabei ist alsdann (ξ, η) derjenige Punkt der Kreisfläche, welcher mit dem Punkte (x, y) der Fläche J in Correspondenz steht.

Für die Abbildung der Fläche A auf einer Kreisfläche giebt der Verfasser einen analogen Satz an. Nn.

C. Neumann. Zur Theorie der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche. Clebsch Ann. XIII. 573-574.

Die Aufgabe, eine von einer geschlossenen Curve begrenzte endliche Fläche durch conforme Abbildung in eine Kreisfläche vom Radius 1 zu verwandeln derart, dass der Mittelpunkt der Kreisfläche einem gegebenen Punkte der Fläche entspricht, lässt sich, wie der Verfasser früher gezeigt (Borchardt J. LIX), auf eine Potentialaufgabe (es ist das logarithmische Potential gemeint) zurückführen. Hier wird die analoge Reduction für den Fall mitgetheilt, dass der ausserhalb der geschlossenen Curve liegende Theil der Ebene in der oben genannten Art abgebildet werden soll. (Vgl. das vorige Referat.) Wn.

Ed. Weyr. Ueber die conforme Abbildung der Flächen durch centrale Projection. Prag. Ber. 1877. 273-276.

Eine Fläche sei auf eine andere central projicirt, also diejenigen Punkte als entsprechend bezeichnet, die mit dem festen Projectionscentrum in einer Geraden liegen; es soll untersucht werden, wann durch diese Projection die Flächen zugleich conform auf einander abgebildet sind. Durch Einführung der Gauss'schen Bedingung für eine conforme Abbildung ergiebt sich mittelst einer einfachen Rechnung das bekannte Resultat, dass die beiden Flächen entweder ähnlich oder durch reciproke Radien aus einander hervorgegangen sein müssen, wenn die centrale Projection zugleich eine conforme sein soll. Wn.

H. E. Grassmann. Zur Theorie der reciproken Radien. Clebsch Ann. XIII. 559-560.

Sind bei der Abbildung durch reciproke Radien ξ und x

correspondirende Punkte, desgleichen η und y, und ist O das Centrum der Radien, so ist bekanntlich

$$\frac{(\xi\eta)}{(xy)} = \sqrt{\frac{(O\xi).(O\eta)}{(Ox).(Oy)}}.$$

Diese Relation bleibt, wie Herr C. Neumann in seinen Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential gezeigt hat, noch gültig, wenn man die correspondirenden Punkte η, y durch zwei einander correspondirende Kugelflächen σ, s ersetzt; nur sind dann unter $(O\sigma)$, $(\xi\sigma)$ und (Os), (xs) die von den Punkten O, ξ, x an σ, resp. s gelegten Tangenten zu verstehen. In der vorliegenden Notiz wird der Neumann'sche analytische Beweis des angeführten Satzes durch einen einfachen geometrischen ersetzt. Wn.

O. Ullrich. Die perspectivischen Kartenprojectionen, descriptiv behandelt. Pr. Breslau.

Die vorliegende Arbeit bespricht die Abbildung einer Kugelfläche auf einer Ebene mittelst perspectivischer Projection. Durch rein geometrische Betrachtungen werden für die verschiedenen möglichen Lagen des Projectionscentrums die wichtigsten Eigenschaften der einzelnen Projectionsarten abgeleitet, am ausführlichsten die der stereographischen Projection. Sodann wird gezeigt, wie mit Hülfe der darstellenden Geometrie die Gradnetze in jedem Falle zu construiren sind.

Wn.

F. Schellhammer. Ueber äquivalente Abbildung. Schlömilch Z. XXIII. 69-84.

In der Theorie der Kartenprojection ist neben der conformen die sogenannte äquivalente Abbildung von Wichtigkeit, d. h. diejenige, welche die Flächengleichheit des abgebildeten Stückes mit dem Bilde in allen Theilen zum Princip macht. Diese Art der Abbildung wendet der Verfasser der vorliegenden Arbeit auf die Abbildung zweier Ebenen an, namentlich auf die Aufgabe, gerad-

linig begrenzte Figuren auf einen Kreis abzubilden. Die Aufgabe ist viel leichter, als die betreffende Aufgabe der conformen Abbildung, weil von grösserer Unbestimmtheit. Sind nämlich $\xi\eta$ die Coordinaten der einen, xy die der anderen Ebene, so wird der Aufgabe genügt durch

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = \int \frac{dy}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}} + F(\xi) = -\int \frac{dx}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} + \Phi(\xi),$$

wo f, F, Φ willkürliche Functionen sind. Zunächst wird die Bedeutung der Function $F(\xi)$ untersucht, indem $f(x, y) = x$ gesetzt wird. Bei dieser Abbildung wird ein unendlich schmaler zur y-Axe paralleler Streifen ohne Veränderung der relativen Lage seiner Punkte in der Richtung der y-Axe verschoben. Wählt man für $F(\xi)$ eine einen discontinuirlichen Factor enthaltende Function, so kann man ein Viereck auf ein Dreieck, ebenso ein n-Eck auf ein $(n-1)$-Eck abbilden. Wählt man

$$F(\xi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2},$$

so wird ein Halbkreis auf eine Ellipse abgebildet. Weiter wird, indem von der Function $F(\xi)$ abgesehen wird, für f eine lineare Function, resp. der Quotient zweier solchen angenommen; dadurch wird ein Dreieck auf ein anderes mit gegebenen Winkeln, resp. auf ein Parallelogramm abgebildet. Sodann wird die Lösung der allgemeinen Aufgabe in Polarcoordinaten aufgestellt und mit ihrer Hülfe untersucht, in welcher Weise ein Kreis auf sich selbst äquivalent abgebildet werden kann, ohne dass der Rand verschoben wird. Das ist auf unendlich viele Arten möglich, und daraus folgt, dass die Aufgabe, eine Figur auf eine andere in der Weise äquivalent abzubilden, dass die Begrenzungscurven einander entsprechen, eine unendliche Zahl von Lösungen zulässt. Für folgende Aufgaben werden dann noch Lösungen durch analytische Functionen angegeben und discutirt: Ein Dreieck auf einen Kreissector von gegebenem Centriwinkel, auf einen Halbkreis, auf einen Kreis, desgleichen ein Rechteck auf einen Kreis abzubilden. Wn.

A. Tissot. Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Nouv. Ann. (2) XVII. 49-55, 145-163, 351-367.

Um bei dem Entwurf eines geographischen Kartennetzes die für jeden speciellen Fall geeignete Projectionsart zu erhalten, behandelt der Verfasser das Problem der Abbildung einer Fläche auf einer anderen ohne specielle Voraussetzung über die Art der Abbildung und gewinnt so einige allgemeine Sätze, durch welche die Behandlung specieller Fälle erleichtert werden soll. Man kann zunächst jede Abbildung einer Fläche auf einer anderen durch unendlich viele orthogonale Projectionen ersetzen, verbunden mit Aenderungen der Grösse, indem bei der Projection jedes Flächenelements zugleich der Massstab der Vergrösserung und die Projectionsebene geändert wird. Daraus folgt, dass es in jedem Punkte der einen Fläche zwei (und, falls die Abbildung nicht conform ist, nur zwei) auf einander senkrechte Tangenten giebt derart, dass die entsprechenden Tangenten der anderen Fläche wieder senkrecht stehen. Diese beiden Tangenten werden Haupttangenten genannt. Auf jeder der beiden Flächen giebt es daher ein (und bei nicht conformer Abbildung nur ein) System von orthogonalen Curven, deren Bilder sich wieder senkrecht schneiden. Ein um einen Punkt der einen Fläche beschriebener unendlich kleiner Kreis entspricht einer Ellipse der anderen Fläche. Diese Ellipse ist in jedem Punkte eine Art Indicatrix des Projectionssystems; ihre Axen liegen in den Haupttangenten, und die Lage und Grösse dieser Axen bestimmt völlig die Projection. Aus diesen Axen ergeben sich auf bekannte Weise die bei der Projection eintretenden Aenderungen der Winkel, Längen und Flächen. Um diese Ellipse für jeden Punkt zu bestimmen, denkt der Verfasser die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes sowohl der einen, als der anderen Fläche durch dieselben Parameter l, m ausgedrückt und betrachtet ein Flächenelement der einen Fläche, das durch zwei unendlich nahe Curven $l =$ Const. und zwei unendlich nahe Curven $m =$ Const. begrenzt wird, sowie das zu denselben Werthen von l und m gehörige Element der anderen Fläche. Da das eine Element die Projection des

anderen sein soll, wird durch das Verhältniss entsprechender Seiten, sowie durch die Winkel der beiden Flächenelemente die Projection, daher Lage und Grösse der Ellipsenaxen für den betreffenden Punkt bestimmt. Damit sind auf beiden Flächen auch die Curvenschaaren bestimmt, die, ursprünglich orthogonal, bei der Projection orthogonal bleiben. Es wird weiter erörtert, wie man auf den Flächen Curvenschaaren bestimmen kann, die gewisse Bedingungen erfüllen, z. B. diejenigen Curven, auf denen alle Längen in einem constanten Verhältniss verkürzt werden etc. Der Verfasser erläutert dann die allgemeinen Sätze, die Bestimmung der Ellipse und die Bestimmung der bei der Abbildung eintretenden Verzerrung an 2 Beispielen: 1) Es soll eine Rotationsfläche so auf einer Ebene abgebildet werden, dass ein Meridian, ohne seine Länge zu ändern, längs einer gegebenen Geraden verläuft, während die Parallelkreise durch andere Gerade senkrecht zu dieser dargestellt werden (die Abbildung gehört zu den äquivalenten); 2) Bei der Abbildung der Rotationsfläche sollen die Meridiane durch Gerade dargestellt werden, die von einem Punkte ausgehen und dieselben Winkel mit einander bilden, wie die Meridiane, die Parallelkreise dagegen durch concentrische Kreise.

Soweit der vorliegende Theil der Arbeit. Die specielleren Anwendungen auf die Kartenprojection sollen später folgen. Bemerkt werden mag noch, dass der Verfasser einige seiner Resultate ohne Beweis schon früher mitgetheilt hatte (C. R. Bd. 49), und dass diese von Germain in seinem „Traité des projections des cartes géographiques“, sowie von Dini benutzt sind. Indess sind die von diesen Autoren gegebenen Beweise weniger einfach, als die hier mitgetheilten. Wn.

G. Rayet. Note sur quelques propriétés géométriques du canevas des cartes orthodromiques équatoriales. Mém. de Bord. (2) II. 135-187.

Die Notiz enthält einige Formeln bezüglich der unter dem Namen der geometrischen Meridianprojection bekannten perspec-

tivischen Abbildungsart der Erde, bei welcher das Projectionscentrum im Mittelpunkt liegt und die Bildebene eine Tangentialebene ist, deren Berührungspunkt auf dem Aequator liegt.

Dieselben sind im Wesentlichen in den Lehrbüchern über Kartenprojection z. B. in dem von Gretschel (Weimar 1873) S. 45—60 enthalten, während es aus dieser Notiz den Anschein gewinnen könnte, als sei die Projection überhaupt erst in neuster Zeit von Hilleret (C. R. LXXXII. 1095—1096. F. d. M. VIII. 540 bis 541) aufgestellt. Selbst die praktische Verwendung derartiger Karten für nautische Zwecke ist schon vor längerer Zeit von verschiedenen Seiten angeregt. A.

P. Glotin. Navigation orthodromique. Mém. de Bord. (2) II. 189-210.

Die Arbeit enthält eine praktische Modification des Vorschlags von Hilleret (C. R. LXXXII. 1095—1096, Ref. F. d. M. VIII. 540), welcher auf die grossen Umwege hinwies, die bei der Schifffahrt entstehen, wenn man auf loxodromischen Linien statt auf kürzesten Linien fährt. Während Hilleret die Anlage gnomonischer Karten (Projection der Kugel vom Centrum auf eine Tangentialebene) empfahl, entwickelt der Herr Verfasser ein Verfahren, um mittelst einer Hülfskarte die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf der Mercatorschen Projection zu entwerfen, und hierdurch den Schiffscurs in jedem Moment der Fahrt bestimmen zu können. Er hält dies Verfahren aus dem Grunde für praktischer, weil durch die gnomonischen Karten die Winkel zur Bestimmung der Cursrichtung doch nicht direct erkannt würden, sondern erst berechnet werden müssten. A.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

LAPLACE. Oeuvres complètes. Tome III. Paris.

Dritter Band der von der Familie des grossen Mathematikers besorgten Ausgabe der Werke, welche den dritten Band der Mécanique céleste enthält. O.

J. SOMOFF. Theoretische Mechanik. Aus dem Russischen übersetzt von A. Ziwet. Theil. I. Kinematik. Leipzig. Teubner.

Der vorliegende erste Theil ist eine Uebersetzung des Buches, welches bereits in Bd. III. d. F. d. M. p. 424 besprochen worden ist. Aenderungen sind vom Uebersetzer nicht vorgenommen. Am Schluss finden sich zwei Zusätze aus den Papieren des verstorbenen Verfassers, die derselbe für eine etwaige zweite Auflage in Aussicht genommen hatte. Der erste derselben giebt eine Vervollständigung der Beispiele, die sich auf die Erläuterung des Begriffs der Geschwindigkeit bei einer veränderlichen Bewegung beziehen. Der zweite betrifft § 48, in dem die Bedingung entwickelt wird dafür, dass drei Functionen φ_1, φ_2, φ_3 der Coordinaten q_1, q_2, q_3 als Coordinaten eines Punktes betrachtet werden können. O.

W. K. Clifford. Elements of dynamics. London. Macmillan.

P. G. Tait, W. J. Stelle. Treatise on dynamics of a particle. London. Macmillan.

C. H. Durval. Trattato di meccanica razionale dei solidi. Roma. A. Manzoni.

P. Langer. Die Grundprobleme der Mechanik. Eine kosmologische Skizze. Halle a. S. Nebert.

Der Verfasser findet in den Grundlagen der Galilei-Newton'schen Mechanik soviel Schwierigkeiten, dass er zum Ersatz nach neuen Grundlagen sucht. Speciell, meint er, müssten der alte Kraftbegriff und der Massenbegriff verlassen werden. Er sucht daher nach neuen Definitionen und gelangt zu solchen, die nach seiner Ansicht zugleich Verallgemeinerungen der bisher angenommenen Grundlagen enthalten. „Kraft ist Alles, was eine bestehende Beziehung ändern oder lösen kann." Dass in dieser Definition der Begriff der Beziehung zweier Dinge an sich völlig klar sei, möchte Referent nicht zugeben. Die Grundlagen, die der Verfasser dann weiter aufstellt, heissen: „1) Alle formalen räumlichen Beziehungen unterliegen einer formvermittelnden Kraft (Erweiterung des Princips der Attractionskräfte). 2) Alle formalen räumlichen Beziehungen setzen ihrer Vernichtung einen Trägheitswiderstand entgegen, der ihrer eigenen Grösse direct proportional gesetzt wird (Verallgemeinerung der Trägheitsgesetze)." Der Begriff der formvermittelnden Kraft wird als universelles Princip aufgestellt. Zunächst sucht dann der Verfasser nach der mathematischen Form für die beiden Sätze. Dazu wird vor allen Dingen der Ausdruck für die Grösse von Beziehung und die Grösse von Kraft bestimmt. Im weiteren Verlauf wendet er dann seine Principien namentlich auf das Problem der drei Körper an. Referent glaubt indess nicht näher hierauf eingehen zu sollen. Grade die Begründung

der Principien und die Definitionen erscheinen ihm nicht überall klar genug dargelegt und würden daher eine eingehende Kritik erfordern, die an dieser Stelle zu weit führen würde. Der zweite Theil, die Anwendung auf die Aesthetik, gehört nicht in den Bereich des Jahrbuches. O.

Capitel 2.

Kinematik.

G. Darboux. Sur le mouvement d'une figure invariable; propriétés relatives aux aires, aux arcs des courbes décrites et aux volumes des surfaces trajectoires.
Darboux Bull. (2) II. 333-356.

Die vorliegende Arbeit des Herrn Darboux vermittelt durch eine höchst gewandte Analyse eine Einsicht in eine Reihe von Theoremen, auf die Steiner zuerst den Blick lenkte und die im Verlaufe gar mannigfache Verallgemeinerungen durch die Herren Gilbert, Williamson, Leudesdorf, Kempe, Liguine erfahren haben (cfr. p. 570, 573). Ueber die historische Entwickelung dieser Theoreme, die sich auf die Flächen beziehen, die von Punkten eines beweglichen, aber in sich starren Gebildes bei der Bewegung umschrieben werden, giebt Herr Liguine in der Abhandlung „Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable (Bull. des sciences mathématiques. Tome II. Aout 1878) einen ausführlichen Bericht. Die Gesichtspunkte, von denen Herr Darboux ausgeht, und die Resultate seiner Untersuchung sind kurz folgende:

Eine Ebene bewege sich auf einer Ebene; die Lage eines Punktes in der beweglichen Ebene sei durch die Coordinaten x, y auf ein in ihr befindliches Axenkreuz bezogen, während seine Lage in Bezug auf ein festes Axenkreuz in der anderen Ebene durch die Coordinaten x_1, y_1 bestimmt werde. Der Zusammenhang zwischen diesen und jenen kann durch die Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} x_1 = (x-\alpha)\cos\omega - (y-\beta)\sin\omega, \\ y_1 = (x-\alpha)\sin\omega + (y-\beta)\cos\omega, \end{cases}$$

worin α, β, ω eine bekannte geometrische Bedeutung haben. Bei einer irgendwie vorliegenden Bewegung kann man α, β, ω als Functionen einer unabhängigen Variabeln auffassen, oder auch α und β als Functionen der als unabhängig zu betrachtenden Grösse ω. Geht nun die bewegliche, aber in sich starre Ebene aus einer Lage P_0 nach irgend einem Gesetz in die Lage P_1 über, so beschreibt ein Punkt M eine Bahn von M_0 bis M_1, und ein Radius vector, welcher von dem Kreuzungspunkt des in der festen Ebene ruhenden Axenkreuzes nach dem beweglichen Punkt ausläuft, ein Flächenstück $\mathfrak{A}$, welches durch die Gleichung

$$2\mathfrak{A} = \int_{M_0}^{M_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1)$$

bestimmt ist Die Bedeutung dieses Integrals ist bei einer irgend wie gefundenen Bahn in dem von Gauss festgestellten Sinne zu nehmen. Die Differentiale dx_1 und dy_1 sind Functionen von ω, während für ein und denselben Punkt (x, y) der beweglichen Ebene x und y als unveränderlich zu betrachten sind. Bildet man daher die Differentiale aus obigen Gleichungen und führt sie in das Integral ein, so lassen sich die Grössen x, y vor die nach $d\omega$ auszuführenden Integrale ziehen, und man erhält einen Ausdruck von der Form:

$$\mathfrak{A} = \frac{O}{2}(x^2 + y^2) - Ax - By + C.$$

Hierin bedeutet $O = \omega_1 - \omega_0$ den Winkel, um welchen das bewegliche Gebilde beim Uebergang aus der einen Lage in die andere sich gedreht hat; A, B, C sind aber Integrale in Bezug auf die Veränderliche ω, welche ein x oder y nicht enthalten. Es giebt demnach in der Ebene der beweglichen Figur im Allgemeinen einen Kreis, für dessen Punkte die Flächen $\mathfrak{A}$ Null sind, die Fläche aber, welche irgend ein anderer Punkt der Ebene umschreibt, ist gleich $\frac{O}{2}$ mal der Potenz dieses Punktes in Bezug auf jenen Kreis. Die Punkte also, welche auf einem mit jenem concentrischen Kreise liegen, umschreiben Flächen von gleichem

Inhalt. Der Werth der Integrale A und B bestimmt den Mittelpunkt jener Kreisschaar. Ihre Untersuchung führt Herrn Darboux auf einen einfachen Zusammenhang desselben mit dem Steiner'schen Krümmungsschwerpunkte. Bekanntlich lässt sich eine jede Bewegung eines starren Gebildes dadurch hervorgebracht denken, dass der Ort der augenblicklichen Drehungscentra in der beweglichen Figur, die „centroide mobile“ des Herrn Liguine, auf dem Ort der augenblicklichen Drehungscentra für die feste Ebene, der „centroide fixe“, ohne Gleitung rollt. Jedem Punkte der centroide mobile entspricht ein Punkt der centroide fixe. Belastet man jeden Punkt der centroide mobile mit einer Masse, proportional der Summe der Krümmungen, die ihm und dem entsprechenden Punkte in der centroide fixe zukommt, so ist der Schwerpunkt der so belasteten centroide mobile der Steiner'sche Krümmungsschwerpunkt. Wird seine Lage in Beziehung auf das Axenkreuz in der beweglichen Figur durch ξ', η' angegeben, so ist der Mittelpunkt (x, y) obigen Systems concentrischer Kreise, auf dasselbe Axensystem bezogen, durch die Ausdrücke angegeben:

$$x = \xi' + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2O}; \quad y = \eta' + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2O}.$$

Hierin bedeuten $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ die Werthe, welche dem ω_0 und ω_1, wodurch Anfangs- und Endlage des beweglichen Systems bestimmt sind, in dem Gleichungssystem I. entsprechen.

Nimmt man daher an, dass der Kreuzungspunkt des Axenkreuzes in der festen Ebene mit dem Drehungscentrum zusammenfällt, um welches das bewegliche System aus der Lage P_0 in die Lage P_1 durch eine endliche Drehung übergeführt werden kann, so ist $\alpha_0 = \alpha_1$ und $\beta_0 = \beta_1$, und es fällt daher in diesem Fall der Mittelpunkt des concentrischen Kreissystems mit dem Krümmungscentrum der centroide mobile zusammen. Dasselbe findet statt, wenn die Bewegung periodisch ist, wenn also bei einem Wachsthum von $2n\pi$ für ω, wobei n eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null sein darf, α und β ihre Anfangswerthe wieder annehmen. In diesem Falle umschreibt jeder Punkt des beweglichen Gebildes eine geschlossene Curve.

Der betrachtete Integralwerth $\mathfrak{A}$ stellt den von ihr umschlossenen Flächenraum dar, in dem Gaussischen Sinne genommen. Es sind also diese Flächen constant für alle Punkte, welche auf concentrischen Kreisen um den Krümmungsschwerpunkt liegen; einer von ihnen zeichnet sich dadurch aus, dass seine Punkte im Allgemeinen Flächen vom Inhalt Null umschreiben. Die Fläche, welche irgend ein anderer Punkt umschreibt, ist gleich dem Product aus der halben Drehung und der Potenz des Punktes in Rücksicht auf jenen Kreis. Für $O = 2\pi$ und convexe Centroiden hat Steiner den Satz zuerst bewiesen.

Liegen in der beweglichen Figur 3 Punkte 1, 2, 3 in gerader Linie, so kann man die X-Axe durch sie gelegt denken. Für die 3 von ihnen umschriebenen Flächen S_1, S_2, S_3 giebt es daher 3 Gleichungen, in denen, da $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ ist, der Coefficient B nicht vorkommt. Eliminirt man aus den 3 Gleichungen A und C, so gewinnt man, wenn man mit (ik) die Distanz von i bis k versteht, die Relation

$$S_1(23) + S_2(31) + S_3(12) + \frac{O}{2}(12)(23)(31) = 0.$$

Beschreiben 2 und 3 dieselbe convex gekrümmte Curve, so ist $S_2 = S_3$, $O = 2\pi$, und es folgt das Theorem von Herrn Holditch in der Form

$$S_2 - S_1 = \pi(12)(31).$$

Vier Punkten 1, 2, 3, 4 entsprechen vier Flächen S_1, S_2, S_3, S_4. Eliminirt man aus den vier Gleichungen, welche S_1, S_2, S_3, S_4 bestimmen, die Coefficienten A, B, C, so ergiebt sich als Eliminationsresultante

$$\begin{vmatrix} S_1, & x_1, & y_1, & 1 \\ S_2, & x_2, & y_2, & 1 \\ S_3, & x_3, & y_3, & 1 \\ S_4, & x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} = -\frac{O}{2} \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2+y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2+y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \\ x_4^2+y_4^2, & x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix}.$$

Aus ihr ist abzulesen, dass, wenn (123) die Dreiecksfläche, welche durch 1, 2, 3 gebildet wird, mit dem bezüglichen Zeichen + oder − bedeutet,

$$S_1(234) + S_2(341) + S_3(412) - S_4(123) = 123\,\frac{O}{2}\cdot P,$$

worin die Grösse P die Potenz des Punktes 4 in Bezug auf den durch 1, 2, 3 gelegten Kreis bedeutet. In dieser Relation liegt eine Verallgemeinerung des Theorems von Leudesdorf, der dies Theorem für geschlossene Curven $O = 2n\pi$ aussprach.

Es sei eine gerade Linie in dem beweglichen System durch $xu + yv + w = 0$ mit der Bedingung $u^2 + v^2 = 1$ dargestellt, und auf die festen Axen bezogen sei ihre Gleichung

$$x_1 u_1 + y_1 v_1 + w_1 = 0; \quad u_1^2 + v_1^2 = 1.$$

Die Grössen u_1, v_1, w_1 lassen sich durch u, v, w und α, β, ω darstellen. Geht das bewegliche System aus irgend einer Lage P_0 in eine andere P_1 über, so beschreibt die Gerade eine Enveloppe; die Coordinaten eines ihrer Punkte werden als Functionen von u, v, w und α, β, ω zum Ausdruck gebracht, ihre Differentiale als abhängig von $d\omega$ gebildet und für das Bogenelement ds der Enveloppe der Werth in jenen Grössen dargestellt. Bei der Integration von ω_0 bis ω_1 treten die von ω unabhängigen Grössen u, v, w vor die Integrale, und für s wird der Ausdruck gewonnen

$$s = wO + u\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega + v\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)d\omega.$$

Setzt man die Coefficienten von u und v bezüglich gleich $\xi''O$ und $\eta''O$, so ist $s = O(w + u\xi'' + v\eta'')$. Es ist also der Bogen s gleich dem Drehungswinkel des Gebildes multiplicirt mit dem Abstand eines bestimmten Punktes A des beweglichen Systems von der in ihm betrachteten Geraden.

Die Coordinaten ξ'', η'' des Punktes A sind durch obige Integrale bestimmt. Ihre Untersuchung lässt erkennen, dass $\xi'' = \xi' - \frac{\eta_1 - \eta_0}{O}$ und $\eta'' = \eta' + \frac{\xi_1 - \xi_0}{O}$, worin ξ', η' die Coordinaten des Krümmungsschwerpunktes C' und (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1) die Coordinaten des augenblicklichen Drehpunktes A_0 und A_1 in Anfangs- und Endlage des Systems bezeichnen. Der Punkt C'' mit den Coordinaten ξ'', η'' lässt sich demnach aus C', A_0 und A_1 construiren. Man lasse die Strecke $\overline{A_0A_1}$ um 90° in positivem Sinne sich drehen, und man erhält die Richtung von $\overline{C'C''}$, die Grösse aber ist gegeben durch den Ausdruck $\frac{\overline{A_0A_1}}{O}$. Bei einer

periodischen Bewegung fällt also der Punkt C'' mit dem Krümmungsschwerpunkt zusammen. Drei Geraden 1, 2, 3, welche sich in einem Punkte schneiden, entsprechen bei der Bewegung 3 Bogen s_1, s_2, s_3. Eliminirt man aus den sie darstellenden Gleichungen die Werthe $O\eta''$ und $O\xi''$, so erhält man, wenn man mit (i, k) den Sinus des Winkels, den die Geraden i und k bilden, bezeichnet, die Relation:

$$s_1(2,3) + s_2(3,1) + s_3(1,2) = 0.$$

Mit dieser Formel findet die Frage eine Lösung: „Wenn zwei Curven C_1 und C_2 gegeben sind, eine neue Curve C_3 zu finden, deren Bogenlänge gleich ist der Summe der Bogenlängen jener beiden Curven.“ Schneiden sich die 3 Geraden 1, 2, 3 nicht in einem Punkte, sondern umgrenzen sie ein Dreieck mit den Seiten a, b, c, so wird durch analoge Schlüsse die Relation gegeben

$$as_1 + bs_2 + cs_3 = 2OS,$$

wo S die Dreiecksfläche bedeutet.

Dieselbe Methode, die oben angewendet wurde, wird zur Bestimmung der Flächen benutzt, welche eine Gerade des beweglichen Gebildes umschreibt. Die Fläche ist eine quadratische Function von u, v, w, und ihre Form lässt erkennen, dass alle Geraden, welche gleiche Flächenräume umschreiben, einen Kegelschnitt umhüllen, und dass das System der Kegelschnitte, welches den verschiedenen Werthen der Flächenräume entspricht, confocal ist. Für eine periodische Bewegung fällt der Krümmungsschwerpunkt der beweglichen Roulette in den Mittelpunkt des Systems. Für geschlossene, convex gekrümmte Rouletten ist dieser Satz bereits in einer Abhandlung des Herrn Ad. Schumann (Programm der Louisenstädtischen Realschule in Berlin 1867) bewiesen. In derselben wird ausserdem gezeigt, dass die Axen des Systems Hauptträgheitsaxen der in Steiner'schem Sinne belasteten Roulette sind, und dass die Axe, welche die Brennpunkte enthält, das grössere Trägheitsmoment von beiden besitzt. Die andere Axe besitzt das kleinste Trägheitsmoment und umschreibt den kleinsten Flächenraum. Die Fläche $\mathfrak{B}$, welche irgend eine andere Gerade umschreibt, unterscheidet sich von diesem Minimalwerth um eine Kreisfläche; es ist dies die Fläche des

Kreises, welcher den Kegelschnitt, der durch die Gerade definirt ist, in den Scheiteln der grossen resp. reellen Axe berührt. Der Kreis, welcher den Kegelschnitt in den Scheiteln der kleinen Axe berührt, giebt den Unterschied der Fläche $\mathfrak{B}$ von derjenigen Fläche an, welche die grosse oder eine durch den Brennpunkt gehende Gerade umschreibt. Letztere Relationen sind der Analyse des Herrn Darboux entgangen; da sie wenig bekannt sein dürften, so mag an dieser Stelle darauf hingewiesen sein.

Jede Bewegung eines starren sphärischen Gebildes auf einer Kugelfläche lässt sich hervorgebracht denken durch Rollung einer mit diesem Gebilde fest verbundenen sphärischen Curve auf einer festen Curve. Denkt man die bewegliche Curve in ihren einzelnen Punkten mit Massen belastet, welche der Summe der geodätischen Krümmungen entsprechender Punkte beider Rouletten proportional sind, so kann man den Schwerpunkt der so belasteten beweglichen Roulette ihren Krümmungsschwerpunkt nennen.

Bei einer periodischen Bewegung des starren Gebildes beschreibt irgend ein Punkt M eine geschlossene Fläche; dieselbe ist gleich einer constanten Grösse, multiplicirt mit dem cosinus des geodätischen Bogens, welcher M mit einem bestimmten Punkte A der beweglichen Figur verbindet; der Punkt A aber ist der Endpunkt des Radius, welcher das Krümmungscentrum der beweglichen Roulette enthält. Nach dem Princip der complementären Gebilde lässt sich dieser Satz transformiren, und es ergiebt sich: Bei der characterisirten Bewegung umschreibt ein Bogen eines grössten Kreises eine geschlossene sphärische Enveloppe. Der Unterschied zwischen ihrer Länge und der Peripherie eines grössten Kreises ist proportional dem cosinus des Winkels, welchen der grösste Kreis der beweglichen Figur mit einem bestimmten anderen grössten Kreise bildet; der Pol des letzteren ist der oben gekennzeichnete Punkt A.

Endlich wendet sich Herr Darboux zu der Bewegung eines starren Gebildes im Raume. Ein Punkt des beweglichen Gebildes wird auf ein der beweglichen Figur zugehöriges und auf ein anderes im Raume fest liegendes Axenkreuz bezogen. Die Coefficienten, welche in die Gleichungen eingehen, die die Coor-

dinaten des festen Systems durch die Coordinaten des beweglichen ausdrücken, werden als abhängig von zwei Parametern u und v betrachtet. Jeder Punkt des beweglichen Systems wird demnach eine Flächentrajectorie beschreiben. Einem umgrenzten Flächenstück dieser Trajectorie wird ein Werthsystem von u, v entsprechen. Das Volumen eines Kegels, welcher zur Spitze den Anfangspunkt des festen Axenkreuzes und zur Basis jenes Trajectorienstück hat, wird durch ein nach du und dv zu bildendes Doppelintegral sich darstellen; in diesem sind aber die Coordinaten x, y, z des beweglichen Axenkreuzes von u und v unabhängig, so dass, wenn man dieselben vor die Integrale zieht, das Volumen des Kegels sich darstellt in der Form

$$V = (x^2 + y^2 + z^2)(Ax + A'y + A''z) + \varphi(x, y, z),$$

wo $\varphi(x, y, z)$ eine Function vom zweiten Grade, die in ihr auftretenden Constanten, sowie die A, A', A'' Doppelintegrale sind, die durch die Bewegungsform bestimmt werden. Aus der Gleichungsform lässt sich erkennen, dass die Punkte der beweglichen Figur, denen gleiche Kegelvolumina entsprechen, auf einer Fläche dritten Grades enthalten sind, welche die unendlich entfernte Ebene in dem imaginären Kugelkreis schneidet.

Ist die Bewegungsform eine derartige, dass, wenn u constant gedacht wird, jede durch u bedingte Curve geschlossen ist, das Analoge aber auch statt hat, wenn v unveränderlich gedacht wird, demnächst aber alle dem Parametersystem zugehörigen Werthe annimmt, so verschwinden die Integrale A, A', A'' und jener Ort reducirt sich auf eine Fläche zweiten Grades.

Ein Beispiel hierfür bilden die Fusspunktenflächen. Es sei Σ irgend eine Fläche und Σ' das zu einer Tangentialebene von Σ zugehörige Spiegelbild der Fläche. Verändert sich die Lage der Tangentialebene, so bewegt sich Σ' rollend auf Σ. Irgend ein Punkt M', welcher mit Σ' fest verbunden gedacht wird, ist stets der Spiegelpunkt des festen Punktes M in dem Gebilde Σ, und daher ist die von M' beschriebene Trajectorienfläche ähnlich und ähnlich gelegen mit der Fusspunktenfläche des Pols M in Bezug auf die Fläche Σ. Das Aehnlichkeitsverhältniss ist das von $2:1$. Ist Σ eine geschlossene Fläche, so tritt der oben

charakterisirte Fall ein, d. h. die Trajectorien aller Punkte sind geschlossen, und es verschwinden die Integrale A, A', A'', das Volumen der Flächentrajectorie des Punktes M' und folglich auch das der Fusspunktenfläche, welches $\frac{1}{3}$ von jenem beträgt, ist eine Function zweiten Grades der Coordinaten von M' in Bezug auf die in Σ' angenommenen Axen, also auch der Coordinaten von M in Bezug auf die festen, dem System Σ angehörigen Axen. Diejenigen Fusspunktenflächen haben also ein constantes Volumen, deren Pole einer bestimmten Fläche zweiten Grades angehören. Dieses Theorem ist zuerst von Herrn Hirst im LXII. Bd. des Crelle'schen Journals ausgesprochen worden und erscheint hier als ein besonderer Fall der allgemeinen Theorie der Volumina von Trajectorienflächen.

Zum Schluss wird auf ein Analogon des Theorems von Herrn Holditch hingewiesen. Es bewege sich eine Gerade nach irgend einem Gesetz; als diese gelte die X-Axe. Das Volumen V eines Punktes wird alsdann gegeben durch den Ausdruck

$$V = \frac{O}{3}x^3 + Ax^2 + Bx + C.$$

Hierin bedeutet O das Flächenstück der Einheitskugel, welches die Endpunkte aller Radien enthält, die allen Lagen der Geraden parallel laufen. Bezeichnen V_1, V_2, V_3, V_4 die Volumina, welche von vier Punkten 1, 2, 3, 4 der Geraden umschrieben werden, so besteht, wenn $(1,2)$ den Werth $x_1 - x_2$ bedeutet, die Relation

$$\frac{V_1}{(1,2)(1,3)(1,4)} + \frac{V_2}{(2,1)(2,3)(2,4)} + \frac{V_3}{(3,1)(3,2)(3,4)} + \frac{V_4}{(4,1)(4,2)(4,3)} = \frac{O}{3}.$$

Schn.

A. B. Kempe. Note on Mr. Leudesdorf's theorem in kinematics. Messenger (2) VII. 165-167.

A. B. Kempe. A theorem in kinematics. Messenger (2) VII. 190.

C. Leudesdorf. Note on the theorem in kinematics. Messenger (2) VII. 195; VIII. 11-12.

A. B. Kempe. Proof of the theorem in kinematics.
Messenger (2) VIII. 42.

A. B. Kempe. Note on the theorem in kinematics.
Messenger (2) VIII. 130. 1879.

Der Satz von Herrn Leudesdorf, auf den sich alle diese Noten beziehen, findet sich Messenger (2) VII. 125-127 (siehe F. d. M. IX. p. 598). Er sagt aus, dass, wenn A, B, C, P 4 Punkte sind, die fest mit einander verbunden sich auf irgend einem Wege in einer Ebene bewegen, und wenn (A), (B), (C), (P) die Flächen der Curven bezeichnen, die von A, B, C, P beschrieben werden, dann

$$(P)=x(A)+y(B)+z(C)+\pi t^2,$$

wo x, y, z die Dreieckscoordinaten von P in Bezug auf das Dreieck ABC sind und t die Länge der Tangente, die von P an den ABC umschriebenen Kreis gezogen ist, so dass, wenn A, B gegebene geschlossene Curven beschreiben, diese Formel die Flächen von Curven verbindet, welche von den zwei geführten Punkten C und P beschrieben werden. In der ersten der oben citirten Noten spricht nun Herr Kempe aus, 1) dass die von A, B, C, P beschriebenen Curven nicht nothwendig geschlossene Curven im gewöhnlichen Sinne des Wortes zu sein brauchen; es genüge, dass sie alle wieder zu ihrem Anfangspunkte zurückkehren; 2) dass, wenn die Integration für gewisse Winkel nicht von 0 bis 2π, sondern nur von 0 bis zu einem beliebigen Winkel und wieder zurück ausgedehnt wird, die Formel die einfachere Form

$$(P)=x(A)+y(B)+z(C)$$

annimmt. Dafür wird ein weiterer Beweis gegeben.

Die zweite Note enthält den Satz: „Wenn eine Ebene, auf einer anderen Ebene rollend, mit einer Lage beginnt und sich in irgend einer Art so bewegt, dass sie eine Anzahl von Rotationen macht, und dann zu ihrer Anfangslage zurückkehrt, so lässt sich auf der sich bewegenden Ebene ein Kreis finden, dessen Punkte alle auf der festen Ebene eine Curve mit der Fläche Null beschreiben. Nimmt man auf der bewegten Ebene einen andern zu diesem Nullkreise concentrischen Kreis, so werden die Flächen der

von allen Punkten auf diesem Kreise beschriebenen Curven dieselben und sind proportional den zwischen diesen und dem Nullkreise eingeschlossenen Flächen. Kehrt die bewegte Ebene zu ihrer Anfangslage zurück, ohne eine vollständige Umdrehung gemacht zu haben, so wird das System concentrischer Kreise ersetzt durch ein System paralleler Geraden, und die von den Punkten dieser Geraden beschriebenen Flächen sind proportional der Entfernung der Linie von der Nulllinie.“ Dies wird in Herrn Kempe's dritter Note bewiesen. Seine vierte Note enthält zwei Bemerkungen von Professor Liguine, 1) dass der Nullkreis imaginär werden kann, und 2) dass die Fläche, welche von dem Mittelpunkte des Kreises (und der ist immer reell) beschrieben wird, ein Kreis ist.

Herr Leudesdorf giebt in seiner Note einen andern und einfacheren Beweis von 1) und bespricht einige specielle Fälle des Satzes. Glr. (O.)

A. Laisant. Réflexions sur la cinématique du plan. Nouv. Ann. (2) XVII. 481-507.

Die Methode der Aequipollenzen wird auf eine Anzahl Fragen aus dem Gebiete der Kinematik angewendet, für welche sie sich besonders zweckmässig erweist. Schn.

De la Gournerie. Rapport sur un mémoire de M. Haton de la Goupillière relatif aux lignes engendrées dans le mouvement d'une figure plane. C. R. LXXXVI. 527-533.

Es wird vorbehalten, den Aufsatz, über den ein kurzer Bericht vorliegt, in dieser Zeitschrift ausführlicher zu besprechen, sobald derselbe, wie in Aussicht gestellt ist, im Druck vorliegt. Schn.

P. Gilbert. Sur quelques propriétés relatives aux mouvements plans. Ann. de l. soc. scient. Brux. II. B. 81-88.

E. Ghysens. Rapport sur ce mémoire. Ann. d. l. soc. scient. Brux. II. A. 63-66.

Wenn eine ebene unveränderliche Figur ihre Lage in ihrer Ebene ändert, so hängt die Construction der Krümmungsmittelpunkte der Bahn, die ein Punkt der Figur beschreibt, von der Bestimmung zweier Punkte ab, nämlich des Mittelpunktes der augenblicklichen Rotation und des Inflexionspols (Gilbert 1857, Schell 1870). Herr Gilbert bestimmt diese beiden Punkte mit Hülfe der Krümmungsmittelpunkte der Bahnen zweier verschiedener Punkte. Er beweist ferner auf streng kinematischem Wege, dass die Enveloppe einer Curve der beweglichen Figur denselben Krümmungsmittelpunkt hat, wie die Bahn des Krümmungsmittelpunktes der umhüllten Curve. Dem schliessen sich verschiedene Folgerungen an. Mn. (O.)

P. Gilbert. Sur l'extension aux mouvements plans relatifs de la méthode des normales et des centres de courbure. Ann. d. l. soc. scient. Brux. III. B. 81-82.

E. Ghysens. Rapport sur ce mémoire. Ann. d. l. soc. scient. Brux. III. A. 55-57.

Gegeben seien für eine Figur F', die sich in der Ebene einer Figur F bewegt, das augenblickliche Centrum C', der Inflexionspol k', die Rotationsgeschwindigkeit w', ferner die analogen Elemente C'', k'', w'' für F, das sich seinerseits in einer Ebene P, F' mit sich ziehend, bewegt. Man soll für die Bewegung von F' in P die Elemente C, k, w finden. Der Verfasser giebt eine Lösung des Problems, die zu einer gewissen Zahl von Anwenwendungen auf die Untersuchung der Normal- und Krümmungsradien, namentlich bei Gliedersystemen, führt.

Mn. (O.)

H. Léauté. Théorème relative au déplacement d'une figure plane dans son plan. Bull. S. M. F. VI. 170-172.

Das Referat wird im nächsten Bande folgen. O.

A. Cayley. On the kinematics of a plane. Quart. J. XVI. 1-8.

Der Verfasser betrachtet zwei Ebenen. Die eine derselben ist fest, die andere beweglich. Dann beschreibt jeder Punkt der beweglichen Ebene eine Curve auf der festen, und jede Gerade der beweglichen Ebene hüllt eine Curve der festen ein, und umgekehrt. Die Bewegung kann aber auch so aufgefasst werden, dass eine Curve der beweglichen Ebene auf einer Curve der festen Ebene rollt. Dies Problem ist es, das der Verfasser zunächst allgemein analytisch behandelt und für eine Reihe specieller Fälle detaillirt. O.

O. Kessler. Kaustische Linien in kinematischer Behandlung. Schlömilch Z. XXIII. 1-34.

Ein leuchtender Punkt P sende Lichtstrahlen auf eine Curve; dieselben werden nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen und bilden die Brennlinien, mit denen sich die vorliegende Arbeit beschäftigt. Ist $\mathfrak{P}$ ein Punkt der Curve und T eine Tangente in diesem Punkte, so bilde man das Spiegelbild der Curve und des leuchtenden Punktes in Rücksicht auf diese Tangente, die somit als Planspiegel aufgefasst wird. Nennt man P_1 den Spiegel-Punkt von P, so giebt $P_1\mathfrak{P}$ die Richtung des reflectirten Strahls an. Rollt das symmetrische Spiegelbild der Curve auf der gegebenen ab, so dass stets entsprechende Punkte zusammenfallen, so ist der Berührungspunkt beider Curven der momentane Drehpunkt, und daher die Katakaustik die Evolute der von P_1 beschriebenen Roulette, die Roulette selbst aber ist ein der Fusspunktencurve ähnliches Gebilde, welches vom Pol P als Aehnlichkeitspunkt aus, nach dem Verhältniss von $1:2$, aus der Fusspunktscurve zu construiren ist. Von diesen Gesichtspunkten aus werden nunmehr die kaustischen Linien des Kreises, der Parabel und der Ellipse behandelt, und Natur und Lage ihrer Singularitäten festgestellt. Was im Besonderen die letzte Brennlinie betrifft, so mag Erwähnung finden, dass, wenn der leuchtende Punkt auf der grossen Axe gelegen ist, sich ausser zwei Rückkehrpunkten in der grossen Axe noch zwei symmetrisch zu

ihr liegende Rückkehrpunkte bilden. Die Strahlen, welche als Tangenten in diesen Rückkehrpunkten auftreten, gehen von den beiden Punkten der Ellipse aus, welche sich in den leuchtenden Punkt senkrecht projiciren. Die Rückkehrpunkte auf der grossen Axe stehen mit dem strahlenden Punkte, dem Scheitel der Ellipse und dem zu ihr gehörigen Krümmungsmittelpunkt in einer einfachen Beziehung; es theilt nämlich je ein Rückkehrpunkt mit dem leuchtenden Punkt die Strecke harmonisch, welche durch einen Scheitel der Ellipse und ihren Krümmungsmittelpunkt begrenzt ist. Schn.

M. Chasles. Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques.
Bull. S. M. F. VI. 208-250.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. A. p. 380.

H. Lévy. Sur la cinématique des figures continues sur les surfaces courbes et en général dans les variétés planes ou courbes. C. R. LXXXVI. 812-816.

M. Lévy. Sur les conditions que doit remplir un espace pour qu'on y puisse déplacer un système invariable à partir de l'une quelconque de ses positions dans une ou plusieurs directions. C. R. LXXXVI. 875-878.

Es seien $x_i (i = 1, 2, 3 \dots n)$ die n Veränderlichen, welche die Lage eines Punktes in einem ebenen oder gekrümmten Raume von n Dimensionen bestimmen, und das Quadrat eines Linearelements sei

$$ds^2 = \sum_{ij} a_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

wo $a_{ij} = a_{ji}$ bestimmte Functionen jener Veränderlichen sind. Wenn man nunmehr ein unendlich kleines Dreieck betrachtet, dessen drei Spitzen zu Coordinaten x_i, $x_i + dx_i$, $x_i + d'x_i$ haben, so lassen sich die drei Seitenlängen dieses Dreiecks bestimmen, und folglich auch seine Winkel durch die gewöhnlichen Formeln der Trigonometrie. Der Winkel zweier Elemente ds und ds',

welche von einem Punkte M auslaufen, ist alsdann durch den Ausdruck definirt

$$ds\, ds' \cos(ds, ds') = \sum_{ij} a_{ij}\, dx_i\, dx'_j.$$

Lässt man eine der Coordinaten des Punktes M sich verändern, z. B. x_i, so entsteht eine Linie σ_i, welche von M ausläuft, und der Cosinus α_i des Winkels, den die Elemente ds und $d\sigma_i$ bilden, hat zum Ausdruck

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a_{ij}}} \sum_j a_{ij} \frac{dx_i}{ds}.$$

Durch diese Formel lässt sich die Richtung des Elementes ds mit Hülfe der n Richtungscosinus α_i oder durch die n Quotienten $\frac{dx_i}{ds}$ angeben. Bezeichnet endlich ω_{ij} den Winkel, den zwei Elemente $d\sigma_i$ und $d\sigma_j$ mit einander bilden, so erhält man $\cos \omega_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}\, a_{jj}}}$, und diese Formel giebt mit $\frac{d\sigma_i}{dx_i} = \sqrt{a_{ii}}$ in gewissem Sinne eine geometrische Deutung der Coefficienten a_{ij}.

Wird nun ein continuirlich bewegliches Gebilde betrachtet, so sind die Zuwachse der Coordinaten δx_i eines Punktes während der Zeit δt in einem bestimmten Augenblick Functionen der Variabeln x_i, so dass

$$\delta dx_i = d\delta x_i = \sum_k \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Benutzt man diese Relation bei der Differentiation der obigen Gleichung, welche $\cos(ds, ds')$ definirt, und führt für die linearen Dilatationen $\frac{\delta ds}{ds}$ und $\frac{\delta ds'}{ds}$, welche die Elemente ds und ds' in der Zeit δt erleiden, die Zeichen λ und λ' ein, so ergiebt sich die Gleichung

$$(\lambda + \lambda') \cos(ds, ds') - \sin(ds, ds')\, \delta(ds, ds') = \sum_{ij} L_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx'_j}{ds},$$

wo L_{ij} die Bedeutung hat:

$$L_{ij} = \sum_k \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \delta x_k + a_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_j} + a_{jk} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_i} \right).$$

Fallen ds und ds' zusammen, so ergiebt sich für die Dilatation λ der Werth

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \sum L_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}.$$

Die letzten beiden Formeln umfassen nothwendig die ganze Theorie der Deformation von Gebilden: die zweite giebt die Veränderungen der Längen, die erste die der Winkel. Da aber die zweite eine Folge der ersten ist, so lässt sich auch die erste allein als die Fundamentalrelation für die ganze Theorie der Deformation von Systemen ansehen.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn λ_i die Dilatation von $d\sigma_i$ und $\delta\omega_{ij}$ die Veränderung des Winkels ω_{ij} bedeuten, die Gleichungen

$$\lambda_i = \frac{L_{ii}}{2a_{ii}}; \quad (\lambda_i+\lambda_j)\cos\omega_{ij} - \sin\omega_{ij}\,\delta\omega_{ij} = \frac{L_{ij}}{\sqrt{a_{ii}\,a_j}}$$

den L_{ij} im gewissem Sinne eine geometrische Deutung geben.

Für einen Euklidischen Raum ist, wenn die x_i als geradlinig rechtwinklige Coordinaten gefasst werden, $a_{ij}=0$, $a_{ii}=1$, und daher

$$\lambda = \Sigma\left(\frac{\partial\delta x_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta x_j}{\partial x_i}\right)\alpha_i\,\alpha_j.$$

Damit das System unveränderlich in der Form sei, ist nothwendige und ausreichende Bedingung, dass $\lambda=0$ für jede Richtung des Elementes ds, dass also

$$\frac{\partial\delta x_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta x_j}{\partial x_i}=0$$

für jedes i und j. Daraus lässt sich schliessen, dass δx_i eine lineare Function von der Form $C_i+\Sigma C_{ij}x_j$, worin $C_{ij}+C_{ji}=0$. Für den Euklidischen Raum von drei Dimensionen giebt dies die bekannten Formeln für die Verrückung starrer Systeme.

Damit ein Gebilde bei der Verrückung in einem Raume starr bleibe, muss die Dilatation λ jedes Linearelementes Null sein. Dies erfordert, dass die $L_{ij}=0$ seien, oder dass für jedes i und j

$$\sum_k\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\,\delta x_k + a_{ik}\frac{\partial\delta x_k}{\partial x_j}+a_{jk}\frac{\partial\delta x_k}{\partial x_i}\right)=0.$$

Die in dieser Form enthaltenen $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen zwischen den n unbestimmten Functionen δx_i müssen mit einander ver-

träglich sein. Die Untersuchung dieses Gegenstandes bildet den Inhalt der zweiten Note. Sie führt zu dem Resultat: „Damit ein Raum von der Natur sei, dass ein starres System darin nach einer einzigen Richtung eine Verschiebung zulasse, ist eine nothwendige und ausreichende Bedingung die, dass die quadratische Form, welche in diesem Raum das Quadrat des Linearelementes darstellt, in der Art transformirt werden kann, dass ihre Coefficienten eine ihrer Variabeln verlieren.“

Soll das starre Gebilde nach k verschiedenen Richtungen verschiebbar sein, so muss jene Form eine solche Transformation zulassen, nicht dass k ihrer Variabeln, sondern dass auf k verschiedene Weise eine der Variabeln verschwindet.

Schn.

M. Lévy. Sur les conditions pour qu'une surface soit applicable sur une surface de révolution. C. R. LXXXVI. 947-950.

Die fundamentalen Relationen, welche Herr Lévy über die Deformation eines continuirlich beweglichen Gebildes in einem beliebigen Raum von n Dimensionen aufgestellt hat, und über die oben berichtet ist, werden angewendet, um die Bedingungen auszudrücken, denen eine Fläche genügen muss, damit sie sich auf eine Rotationsfläche auffalten lasse. Der leitende Gedanke ist folgender: Auf einer Rotationsfläche lässt sich eine starre Figur nach einer Richtung verschieben. Lässt sich demnach eine Fläche auf eine Rotationsfläche auffalten, so muss eine auf derselben befindliche Figur so verschoben werden können, dass die Längen der Linien, welche in ihr sich befinden, keine Aenderung erleiden, dass also die Dilatation λ aller Linearelemente Null sei.

Ist daher

$$ds^2 = a_{11}\,dx_1^2 + 2a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2$$

das Quadrat des Linienelementes auf der gegebenen Fläche, so müssen bei Anwendung der obigen Formeln folgende drei partielle Differentialgleichungen zwischen den zwei unbestimmten Functionen δx_1 und δx_2 eine gemeinsame Lösung zulassen:

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}\delta x_2 + 2a_{11}\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + 2a_{12}\frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2}\delta x_2 + 2a_{12}\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2} + 2a_{22}\frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}\delta x_2 + a_{11}\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2} + a_{12}\left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} = 0.$$

Diese Bedingung wird angewendet, um die möglichst allgemeine Form der Regelfläche zu ermitteln, welche sich auf eine Rotationsfläche auffalten lässt. Es ergiebt sich, dass die Rotationsflächen sein müssen entweder Rotationsflächen zweiten Grades oder Flächen, deren Meridiancurve eine Kettenlinie (chaînette) ist. Andere Rotationsflächen giebt es nicht, denen sich Regelflächen auffalten lassen. Schn.

A. Mannheim. Nouveau mode de représentation plane d'une classe de surfaces réglées. C. R. LXXXV. 788-791. 1877.

A. Mannheim. Application d'un mode de représentation plane d'une classe de surfaces réglées. C. R. LXXXV. 847-850. 1877.

A. Mannheim. Nouvelle application d'un mode de représentation plane d'une classe de surfaces réglées. C. R. LXXXV. 941-944. 1877.

Die Darstellung einer geradlinigen Fläche in Form eines ebenen Gebildes, welche obigen Untersuchungen zu Grunde liegt, beruht auf dem Begriff der Hülfsgeraden, der im Jahrgang 1872 dieser Zeitschrift bei Gelegenheit des Berichts über Herrn Mannheim's Arbeit „Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies ...“ kurz entwickelt worden ist. Ist G eine Erzeugende einer geradlinigen Fläche (G) und o ein beliebiger Punkt derselben, so kann man sich in einer Ebene einen rechten Winkel xo_1y denken, und dem Punkt o den Punkt o_1, der Axe o_1y die Gerade G entsprechen lassen. Wenn nun b ein beliebiger Punkt der Geraden G ist, so wird die Tangentialebene in b mit der Tan-

gentialebene in o einen gewissen Winkel einschliessen, und die trigonometrische Tangente dieses Winkels steht mit der Strecke ob, welche die Lage des Punktes b bestimmt, in eindeutiger Wechselbeziehung, die durch die Hülfsgerade graphisch dargestellt werden kann. Macht man nämlich o_1b_1 gleich ob, errichtet in b_1 auf o_1y ein Loth und legt den Winkel jener Tangentialebenen an die Axe o_1x an, so schneidet das Loth den freien Schenkel dieses Winkels in einem Punkte b', und der Ort der Punkte b', die sich aus den verschiedenen Punkten b der Generatrix herleiten lassen, ist die Hülfsgerade von G in Bezug auf den Punkt o. Sie veranschaulicht die Beziehung der Lage eines Punktes der Generatrix zu dem Winkel, den die Tangentialebene in ihm gegen die Tangentialebene in o einnimmt. Schneidet diese Hülfsgerade die Axe o_1y in n_1 und o_1x in p, so haben diese Strecken o_1n_1 und o_1p folgende Bedeutung. Zieht man von o aus die rechtwinklige Trajectorie (o) der Erzeugenden von (G), so stellt o_1n_1 den Radius der geodätischen Krümmung, o_1p aber den Radius der geodätischen Torsion dar. Ist im Besonderen (o) eine asymptotische Linie, so sind o_1n_1 und o_1p die Krümmungsradien dieser Curve.

Verzeichnet man auf einer geradlinigen Fläche (G) eine Curve (o) und construirt für jede Erzeugende der Fläche und den durch die Curve auf ihr bestimmten Punkt o die Hülfsgerade in dem Axenkreuz yo_1x, so umhüllen diese Hülfsgeraden eine Curve, und diese ist die darstellende Curve der Regelfläche. Sie erweist sich höchst fruchtbar für die Erkenntniss der Natur solcher Regelflächen und wird zunächst für die Untersuchung derjenigen Flächen verwendet, welche aus den Hauptnormalen einer Curve gebildet werden.

Es sei S_n der Ort der Hauptnormalen einer Curve (o), und G und G' seien zwei auf einander folgende Hauptnormalen; ihre Hülfsgeraden schneiden sich in a'. Projicirt man a' auf o_1y in a_1 und macht oa gleich o_1a_1, so wird die Tangentialebene der Fläche S_n in a einen Winkel $a'o_1x$ mit der Tangentialebene in o einschliessen. Dieselben Grössen gelten für die Nachbargerade G'. Wenn man daher durch G ein Ebenenbüschel gelegt denkt und die Axe G dieses Büschels so verschiebt, dass ein Punkt o des-

selben die Curve (o), die Axe aber die Hauptnormalen dieser Curve durchschreitet, so giebt es unter den Ebenen des Büschels stets eine, welche S_n wieder in dem Punkte berührt, wohin ihr Berührungspunkt bei der Verschiebung gelangt. Die Charakteristik dieser Ebene ist, wie die Charakteristik der Tangentialebene in o, senkrecht gegen G gerichtet; denn (o) ist eine Asymptotenlinie von S_n. Daher ist das Element, welches a beschreibt, gleichfalls Asymptotenlinie der Fläche. Es existirt also auf jeder Hauptnormale einer Curve (o) ein Punkt a, für den die Asymptotenlinie der Normalenfläche von (o) senkrecht gegen die betrachtete Hauptnormale gerichtet ist. Da zwei Hülfsgeraden nie mehr als einen Punkt gemeinsam haben können, es sei denn, dass sie zusammenfallen, so erkennt man, dass wenn ausser in o noch in zwei anderen Punkten von G die Asymptotenlinien von S_n senkrecht gegen G verlaufen, alle Punkte von G dieselbe Eigenschaft haben.

Die einfachste Form der darstellenden Curve ist ein Punkt a'. Die Hülfsgeraden gehen durch ihn hindurch und die reciproken Werthe von $o_1 n_1$ und $o_1 p$ stehen deshalb in linearer Beziehung. Ersetzt man $o_1 n_1$ durch ϱ, den Krümmungsradius von (o), stellt ferner das Segment oa durch a und durch ω den Winkel dar, den der Richtstrahl nach a' mit der $o_1 x$-Axe einschliesst, so ist diese lineare Relation in der Form ausgedrückt

$$\frac{\left(\frac{a}{\operatorname{tg}\omega}\right)}{r} + \frac{a}{\varrho} = 1.$$

Die Curve (a) ist in diesem Fall eine orthogonale Trajectorie und zugleich Asymptotenlinie von S_n, also sind die Hauptnormalen von (o) gleichzeitig Hauptnormalen von (a), und zwischen den beiden Krümmungsradien von (o) besteht obige Relation. Andererseits erkennt man, dass, wenn die beiden Krümmungen einer Curve in linearer Beziehung stehen, diese Beziehung eine nothwendige und ausreichende Bedingung dafür ist, dass die Hauptnormalen von (o) zugleich Hauptnormalen einer zweiten Curve sind.

Zwei Hülfsgeraden, welche durch a' gehen, spielen eine besondere Rolle, nämlich $o_1 a'$ und $a_1 a'$. Ihnen entsprechen auf S_n

zwei Erzeugende von der besonderen Natur, dass die Tangentialebenen, welche den Punkten einer jeden zugehören, sich auf eine einzige reduciren. Es gilt daher der Satz:

Auf einer Fläche, welche aus den gemeinsamen Hauptnormalen zweier Curven gebildet wird, giebt es stets zwei Erzeugende, längs denen die Fläche nur eine einzige Tangentialebene zulässt.

Nachdem die Untersuchungsmethode der geradlinigen Flächen mit Hülfe der darstellenden Curve in Obigem gekennzeichnet ist, genügt es, aus den Mittheilungen des Herrn Mannheim die wesentlichsten Ergebnisse hervorzuheben.

Ist die darstellende Curve der Fläche S_n, welche aus den Hauptnormalen einer Curve gebildet ist, eine einzige Gerade, so ist zu folgern, dass alle asymptotischen Linien der Fläche orthogonale Trajectorien der Erzeugenden sind. Zu ihnen gehört auch die Strictionslinie. Wird in Bezug auf ihre Punkte die darstellende Curve von S_n entworfen, so ergiebt sich eine der o_1y-Axe parallel laufende Gerade; es muss daher die Strictionscurve in jedem Punkte einen unendlichen Krümmungsradius haben, also geradlinig sein. Durch solche Schlüsse erkennt man, dass die Fläche S_n in diesem Falle eine Schraubenlinie mit einer Richtungsebene ist. Hiermit im Zusammenhange steht die Beantwortung folgender Frage: Welche geradlinigen Flächen haben in jedem ihrer Punkte gleiche und entgegengesetzte Hauptkrümmungen? Ihre Asymptotenlinien müssen orthogonale Trajectorien der Generatricen sein, ihre darstellende Curve ist also eine einzige gerade Linie und sie selbst Schraubenlinien mit einer Richtungsebene.

Setzt man zwischen den Krümmungsradien einer Curve eine beliebige Gleichung fest, so giebt man damit die Gleichung der darstellenden Curve von S_n in Tangentialcoordinaten an; denn, wie oben bemerkt, giebt der Abschnitt o_1n_1 auf der o_1y-Axe den einen Krümmungsradius, der Abschnitt o_1p auf der o_1x-Axe den anderen Krümmungsradius an. Die Fusspunktencurve in Bezug auf den Pol o_1 entspricht der Strictionslinie der Flächen, welche aus den Hauptnormalen jener Curve gebildet werden. Diese

Fusspunktencurve ändert sich nicht, wenn man zum Zweck der Darstellung der Hülfsgeraden neue Anfangspunkte auf den Erzeugenden wählt, sie kann also in gewissem Sinne gleichfalls zur Charakterisirung der geradlinigen Fläche dienen. Aus der Natur dieser Curven können nun mannigfache Eigenschaften von geradlinigen Flächen hergeleitet werden, welche aus den Hauptnormalen von Curven gebildet sind, deren Krümmungen durch irgend eine Gleichung verbunden sind. Die Fruchtbarkeit dieser Principien wird an einigen Flächen, deren darstellende Curven einfache geometrische Formen bilden, dargethan.

In der letzten Mittheilung wird die darstellende Curve zur Untersuchung beliebiger geradliniger Flächen verwendet. Als Anfangspunkt für die jene Curve erzeugenden Hülfsgeraden wird eine orthogonale Trajectorie der Fläche benutzt. In diesem Falle treten an die Stelle der Krümmungsradien der Curve, deren Hauptnormalen die Fläche eben erzeugten, die geodätische Krümmung und die geodätische Torsion der rechtwinkligen Trajectorie. Schn.

A. Mannheim. Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre et nouvelle application de ce théorème. Bull. S. M. F. VI. 5-7.

Das Theorem, von dem Herr Mannheim nach der ihm eigenen Untersuchungsmethode einen höchst einfachen Beweis beibringt, lautet: „Wenn ein starres Zweiflach sich so in eine Nachbarlage bewegt, dass die Charakteristik einer Seitenfläche senkrecht gegen die Kante des Zweiflachs steht, so ist auch die Charakteristik der anderen Seitenfläche senkrecht gegen diese Kante.“ Es wird dieser Satz angewendet, um zu beweisen, dass, wenn die beiden Krümmungsradien einer Raumcurve einander proportional sind, die Curve eine auf einer cylindrischen Fläche sich windende Schraubenlinie sein muss. Schn.

A. Mannheim. Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées. Bull. S. M. F. VI. 7-9.

Gestützt auf jenen oben vermerkten Satz vom Zweiflach wird ein Theorem bewiesen, welches Herr O. Bonnet zuerst in folgender Form ausgesprochen hat: „Wird auf einer windschiefen Fläche eine Linie so gezogen, dass sie unter constantem Winkel die erzeugenden Geraden der Fläche schneidet und gleichzeitig eine geodätische Linie ist, so kann sie nichts anderes als die Strictionslinie der Fläche sein. Nach derselben Methode, die Herr Mannheim befolgt hat, lässt sich auch der Beweis liefern, dass eine Strictionslinie, welche die erzeugenden Geraden einer windschiefen Fläche unter constantem Winkel schneidet, eine geodätische Linie der Fläche ist, sowie, dass eine Strictionslinie, welche gleichzeitig eine geodätische Linie ist, alle Erzeugenden der Fläche unter demselben Winkel schneidet. Schn.

M. Levy. Sur la composition des accélérations d'ordre quelconque et sur un problème plus général que celui de la composition des mouvements. C. R. LXXXVI. 1068-1071.

Wenn ein Körper, dessen Punkte durch die Coordinaten x, y, z auf irgend drei feste Axen bezogen sind, sich bewegt, so versteht man unter der Beschleunigung n^{ter} Ordnung eines Punktes die Grössen

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}.$$

Ist ein Körper gleichzeitig zwei Bewegungen unterworfen, einer relativen und einer Bewegung der Mitführung (mouvement d'entraînement), so wird aus beiden eine dritte resultiren, und in der vorliegenden Note handelt es sich darum, die resultirende Beschleunigung n^{ter} Ordnung aus den die anderen beiden Bewegungen charakterisirenden Grössen zusammenzusetzen.

Es gelange ein Punkt M nach einem Zeitintervall Δt in Folge der relativen Bewegung allein nach R; würde er ausschliesslich

der zweiten Bewegungsform folgen, so möge er nach der Zeit Δt die Lage E einnehmen; durch die aus beiden resultirende Bewegung aber komme er nach M'. Werden die Projectionen der Verschiebungen MM', MR, ME auf die X-Axe bezüglich mit Δx, $\Delta' x$, $\Delta'' x$ bezeichnet, so erhält man durch Projection des Dreiecks MRM' auf diese Axe die Gleichung $\Delta x = \Delta' x + \Delta''_1 x$, wo unter $\Delta''_1 x$ die Projection von RM' verstanden wird. Diese Verschiebung lässt sich auffassen als die Verrückung des Punktes R in Folge der Bewegung der Mitführung, so dass man $\Delta''_1 x$ erhält, wenn man in $\Delta'' x$ an Stelle der Coordinaten x, y, z des Punktes M die des Punktes R, also

$$x + \Delta' x, \quad y + \Delta' y, \quad z + \Delta' z$$

einsetzt. Da nun, wenn man M als einem festen System zugehörig auffasst, die Projection $\Delta'' x$ eine lineare Function der Coordinaten des betrachteten Punktes ist, so gilt für $\Delta''_1 x$ die Darstellung

$$\Delta''_1 x = \Delta'' x + \frac{\partial \Delta'' x}{\partial x} \Delta' x + \frac{\partial \Delta'' x}{\partial y} \Delta' y + \frac{\partial \Delta'' x}{\partial z} \Delta' z.$$

Daher ist

$$\Delta x = \Delta' x + \Delta'' x + \frac{\partial \Delta'' x}{\partial x} \Delta' x + \frac{\partial \Delta'' x}{\partial y} \Delta' y + \frac{\partial \Delta'' x}{\partial z} \Delta' z.$$

Werden nunmehr beide Seiten dieser Gleichung nach steigenden Potenzen von Δt entwickelt und die Coefficienten von Δt^{n+1} in diesen Entwickelungen einander gleich gesetzt, so erhält man die Gleichung, welche die Lösung des gestellten Problems in sich schliesst. Zu dem Ende seien X_n, Y_n, Z_n die drei Componenten der Beschleunigung n^{ter} Ordnung bei der resultirenden Bewegung, die entsprechenden Componenten bei der relativen Bewegung seien X'_n, Y'_n, Z'_n und die bei der dritten Bewegungsform X''_n, Y''_n, Z''_n. Bei der Ausführung der angegebenen Operationen ergiebt sich alsdann

$$\Delta x = \sum_{n=1}^{n=\infty} X_n \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!}; \quad \Delta' x = \sum_{n=1}^{n=\infty} X'_n \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!}; \quad \Delta'' x = \sum_{n=1}^{n=\infty} X''_n \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!},$$

und entsprechende Ausdrücke für Δy, Δz; $\Delta' y$, $\Delta' z$; $\Delta'' y$, $\Delta'' z$; so dass der gekennzeichnete Weg endlich die gesuchte Relation in der Form liefert

$$X_n = X'_n + X''_n + \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{(n+1)(n)(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots(i+1)} \left(\frac{\partial X''_{n-i-1}}{\partial x} X'_i + \frac{\partial X''_{n-i-1}}{\partial y} Y'_i + \frac{\partial X''_{n-i-1}}{\partial z} Z'_i\right).$$

Der Gleichung wird eine elegante geometrische Deutung gegeben, welche in folgendem Theorem zum Ausdrucke kommt: „Die Beschleunigung n^{ter} Ordnung bei einer Bewegung, welche als Ergebniss zweier anderen betrachtet wird, ist die Resultante oder die geometrische Summe 1) aus den Beschleunigungen derselben Ordnung bei den beiden componirenden Bewegungen; 2) aus n complementären Beschleunigungen, welche man auf folgende Weise erhält: Man construire die relative Geschwindigkeit des Punktes M, sowie seine relativen Beschleunigungen bis zu der der $(n-1)^{ten}$ Ordnung; auf diese Weise erhält man n Linien MA_0, MA_1, $MA_2 \ldots MA_{n-1}$. Die Endpunkte A_i dieser Linien denke man fest verbunden mit dem System, welches der anderen Bewegungsform unterworfen ist, (système de comparaison). Die Bewegung dieses Systems aber zerlege man in zwei andere, in eine Verschiebung, gleich der Verrückung des Punktes M, und in eine Drehung um diesen Punkt, und construire die aus der letzteren sich ergebende Beschleunigung $(n-i-1)^{ter}$ Ordnung des Punktes A_i. Diese Linie, multiplicirt mit dem Coefficienten des $(i+1)^{ten}$ Gliedes der Entwickelung eines zur $(n+1)^{ten}$ Potenz erhobenen Binoms, stellt die $(i+1)^{te}$ von den n complementären Beschleunigungen dar.“ Schn.

Laisant. Note sur un théorème sur les mouvements relatifs. C. R. LXXXVII. 204-206.

Aus dem Quaternionencalcul wird das in vorstehendem Referat dargestellte Theorem abgeleitet. Schn.

M. Levy. Sur une note de M. Laisant, intitulée: „Sur un théorème sur les mouvements relatifs.“ C. R. LXXXVII. 259-260.

Herr Lévy nimmt die Priorität für das obige Theorem für sich in Anspruch. Schn.

LAISANT. Note relative à une réclamation récente.
C. R. LXXXVII. 377.

Herr Laisant räumt die beanspruchte Priorität dem Herrn Lévy ein. Schn.

V. LIGUINE. Note relative au théorème sur la composition des accélérations d'ordre quelconque.
C. R. LXXXVII. 595-598.

Herr Liguine weist darauf hin, dass das Theorem des Herrn Lévy bereits 12 Jahre zuvor von Herrn Somoff in den „Mémoires de l'Academie de Saint-Pétersbourg", Bd. IX., ausgesprochen sei. Schn.

L. BURMESTER. Ueber den Beschleunigungszustand ähnlich-veränderlicher und starrer ebener Systeme.
Civiling. XXIV.

L. BURMESTER. Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme.
Schlömilch Z. XXIII. 108-131.

Beide Abhandlungen stehen in einem engen Zusammenhange, insofern sie von denselben Gesichtspunkten ausgehend die Bewegungszustände ähnlich-veränderlicher und affin-veränderlicher Systeme untersuchen. Diese Gesichtspunkte erweisen sich als höchst fruchtbar und ermöglichen eine recht lebendige und klare Anschaulichkeit der betreffenden Bewegungsvorgänge. Auf die zahlreichen und interessanten Einzelnheiten, zu denen der Verfasser im Verlauf seiner Untersuchungen gelangt, einzugehen, gestattet der Raum in dieser Zeitschrift nicht; es kann also nur die Grundlage für seine Entwickelungen gekennzeichnet, und es

können nur einige der wichtigsten Gesetze, die sich ihm beim Studium jener Bewegungsvorgänge ergeben, angeführt werden.

Die zweite Abhandlung schliesst ihrer Natur nach den Gegenstand der ersten als besonderen Fall in sich; doch mag über beide getrennt referirt werden. In der ersten umfasst die Definition eines ebenen Systems, welches während der Bewegung sich selbst ähnlich bleibt, die eines starren ebenen Systems, in der zweiten der Begriff eines affin-veränderlichen Gebildes alle die besonderen Formen, welche in der Ueberschrift einzeln hervorgehoben sind; insofern daher die besonderen Formen sich nicht durch besondere Merkmale bei den behandelten Bewegungsvorgängen charakterisiren, wird von ihnen nicht, wie es in den Abhandlungen geschehen, die Rede sein.

Die Grundlage für die Entwickelungen der ersten Abhandlung bilden zwei Sätze, welche synthetisch durch eine einfache Gedankenreihe gewonnen werden, deren Richtigkeit man natürlich aber auch analytisch unmittelbar übersieht. Wenn ein ebenes System S sich so bewegt, dass es während der Bewegung sich selbst ähnlich bleibt, und man stellt in einer bestimmten Phase der Bewegung die Geschwindigkeit des Systempunktes in Grösse und Richtung durch eine Strecke dar, welche von dem betreffenden Systempunkte ausläuft, so bilden die Endpunkte ein System, welches mit S ähnlich ist. Da dieses mit der betrachteten Phase von S einen selbst entsprechenden Punkt hat, so giebt es einen Punkt in der Phase, der die Geschwindigkeit Null hat, dieser wird Geschwindigkeitspol genannt. Der analoge Satz gilt für die Beschleunigungen. Stellt man auch sie in Grösse und Richtung durch Strecken dar, welche in der betrachteten Phase von den Systempunkten auslaufen, so bilden ihre Endpunkte ein mit dieser ähnliches System. Der selbst entsprechende Punkt beider hat keine Beschleunigung und wird Beschleunigungspol genannt. Aus dem letzten Satze folgt unmittelbar: die Punkte eines Kreises, welcher den Beschleunigungspol zum Mittelpunkt hat, haben in der betrachteten Phase constante Beschleunigung, und zwar ist dieselbe dem Radius dieses Kreises proportional. Fasst man die Punkte eines Kreises auf, welcher durch den

Beschleunigungspol selbst geht, so laufen die Beschleunigungsrichtungen alle durch einen Punkt dieses Kreises, die Beschleunigungen der Punkte einer Geraden aber, welche durch den Beschleunigungspol geht, haben parallele Richtung. Von den weiteren Ergebnissen der Untersuchung noch einige: Die Punkte einer Phase, deren Beschleunigung und Geschwindigkeit in einem constanten Verhältnisse stehen, liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden des Geschwindigkeits- und Beschleunigungspols gelegen ist, und welcher diese Strecke harmonisch theilt; der geometrische Ort der Punkte aber, deren Beschleunigung und Geschwindigkeit einen constanten Winkel bilden, ist ein Kreis, der durch jene beiden Pole geht. Die Richtungen der Geschwindigkeiten dieser Punkte laufen durch einen bestimmten Punkt dieses Kreises, den Convergenzpunkt der Geschwindigkeiten; dasselbe gilt von den Richtungen der Beschleunigungen; ihr Durchschnittspunkt wird der Convergenzpunkt der Beschleunigungen geheissen. Ist der Winkel, den Geschwindigkeit und Beschleunigung einschliessen, Null, so ergiebt sich ein besonderer Kreis, welcher diejenigen Punkte der Phase enthält, welche Wendepunkte durchschreiten. Er wird Wendekreis genannt; für ihn fallen die beiden Convergenzpunkte in einen, den Wendepol, zusammen. Ist dagegen jener Winkel 90°, so enthält der betreffende Kreis diejenigen Punkte, welche keine Tangentialbeschleunigung haben. Dieser besondere Kreis erhält den Namen „Lothkreis.“ Nach Einführung dieser Begriffe lassen sich folgende Sätze aussprechen: „Der geometrische Ort der Punkte einer Phase, welche constante Normalbeschleunigung besitzen, ist eine Pascal'sche Curve, deren Basiskreis der Wendekreis und deren Doppelpunkt der Geschwindigkeitspol ist. Die Richtungen der constanten Normalbeschleunigungen umhüllen einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem Wendekreise, dem Wendepol diametral gegenüber liegt.“

„Der geometrische Ort der Punkte einer Phase, welche constante Tangentialbeschleunigungen besitzen, ist eine Pascal'sche Curve, deren Basiskreis der Lothkreis und deren Doppelpunkt der Geschwindigkeitspol ist. Die Richtungen der constanten

Tangentialbeschleunigungen umhüllen einen Kreis, dessen Mittelpunkt der auf dem Lothkreise liegende Convergenzpunkt der Geschwindigkeiten ist.“

Zum Schluss mag noch folgender Satz angeführt werden: „Die Systempunkte einer Phase, welche auf einem den Wendekreis im Geschwindigkeitspol berührenden Kreise liegen, beschreiben momentan Bahnelemente, deren Krümmungsmittelpunkte auf einem Kreise sich befinden, welcher durch den Geschwindigkeitspol geht.“ Im Anschluss an diese und ähnliche Bewegungsgesetze finden Constructionen mancherlei Art höchst naturgemäss ihre Erledigung.

In der zweiten Abhandlung wird synthetisch zunächst der Beweis geführt, dass, wenn man in irgend einer Phase eines sich bewegenden affin-veränderlichen Systems die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des Systems durch Strecken darstellt, welche ihre Grösse und Richtung angeben, die Endpunkte dieser Strecken ein System bilden, welches mit dem bewegten System affin verwandt ist. Sind demnach vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, mit den ihnen zugehörigen Geschwindigkeiten in einer bestimmten Phase gegebene Grössen, so ist zu jedem anderen Punkt die Geschwindigkeit construirbar; denn die affine Verwandtschaft zweier Systeme ist im Allgemeinen durch vier Paar entsprechender Punkte bestimmt. Da zwei affin-verwandte räumliche Systeme ausser der unendlich fernen Ebene drei selbstentsprechende Ebenen besitzen, welche sich im Allgemeinen in einem im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkte und in drei selbstentsprechenden Geraden schneiden, so folgt, dass es in der betrachteten Systemphase drei Ebenen giebt, deren Punkte in dem betrachteten Moment sich in ihnen selbst verschieben, drei sich in einem Punkte schneidende Gerade, für welche die Trajectorien ihrer Punkte in sie selbst fallen, und endlich einen Punkt, welcher in dem betrachteten Moment die Ruhe bewahrt. Er wird der Geschwindigkeitspol genannt.

Durchaus das Analoge gilt für die Beschleunigungen der Systempunkte und lässt sich auch für die Beschleunigungen höherer Ordnung aussprechen.

Aus diesen grundlegenden Theoremen, welche die ganze Frage nach Richtung und Grösse der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Systempunkte auf die geometrische Beziehung homologer Punkte zweier affiner Systeme überführen, werden Relationen sehr allgemeiner Natur über diese Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hergeleitet. Sie enthalten unter anderen Sätze, zu denen Herr Durrande durch eine analytische Behandlung des Gegenstandes gelangt ist, und lassen einige einfache Beziehungen, die Herrn Mannheim beim Studium der Verrückung starrer Systeme entgegengetreten sind, unter einem besonderen Lichte erscheinen. In Betreff dieser zahlreichen Relationen muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden; hier können nur einige Platz finden, welche durch ihre Einfachheit ein besonderes Interesse erregen und zur allgemeinen Characterisirung der Ergebnisse der Arbeit geeignet sind. Es wird gefragt nach dem geometrischen Ort der Systempunkte, welche in einem Moment der Bewegung des affin-veränderlichen Gebildes gleiche Geschwindigkeit besitzen; derselbe ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist. Für ein ähnlich-veränderliches Gebilde nimmt dieses Ellipsoid die Form eines Rotationsellipsoids an, und für ein starres System tritt ein Rotationscylinder mit gleicher Bedeutung an seine Stelle. Dieselben geometrischen Relationen gelten natürlich auch für die Beschleunigungen der Systempunkte. Eine andere Frage richtet sich darauf, den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, welche momentan Wendepunkte auf ihren Bahnen durchschreiten. Es zeigt sich, dass dieselben auf einer bestimmten Raumcurve sechster Ordnung enthalten sind, welche durch den Geschwindigkeits- und Beschleunigungspol hindurchführt. Während diese Punkte keine Normalbeschleunigung haben, werden andere Punkte des Systems existiren, welche keine Tangentialbeschleunigung besitzen; sie liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung, welche den Geschwindigkeits- und Beschleunigungspol in sich enthält.

Von dem Schluss der Arbeit, der in Aussicht gestellt wird, darf man bei den fruchtbaren Gesichtspunkten, von denen sie ausgeht, noch eine Reihe interessanter Ergebnisse erwarten. Schn.

GRUEY. Théorèmes sur les accélérations simultanées des points d'un solide en mouvement. C. R. LXXXVI. 1241-1244.

Wenn ein starrer Körper um einen festen Punkt O sich dreht, so sind die Beschleunigungen eines Punktes m, geschätzt nach drei von O auslaufenden festen Axen, lineare und homogene Functionen der Coordinaten, welche den Punkt m auf drei mit dem Körper bewegliche Axen beziehen. Aus dieser Natur der Beschleunigungen folgt eine grosse Anzahl von Theoremen, welche sich auf die geometrischen Oerter beziehen, deren Punkte besonders charakterisirte Beschleunigungen besitzen. So ist z. B. der Ort der Punkte, welche gleiche Beschleunigung dem absoluten Werthe nach haben, ein Ellipsoid, dessen Axen Richtung und gegenseitiges Verhältniss bewahren, wenn jener Werth sich ändert. Unter der Schaar dieser Ellipsoide giebt es eines, welches irgend eine Ebene P berührt. Der Berührungspunkt hat die Minimalbeschleunigung unter allen Punkten dieser Ebene; schätzt man aber die Beschleunigungen der anderen Punkte der Ebene längs der Richtung der Minimalbeschleunigung, so erhält man immer dieselben Werthe, nämlich den der Minimalbeschleunigung. Soviel zur Charakterisirung der Theoreme, die in reicher Fülle gegeben werden, und die besonders durch die einfache geometrische Beziehung, welche sie ausdrücken, Interesse erregen. Die Generalisation für eine beliebige Bewegung eines starren Körpers ergiebt sich aus dem Umstand, dass es in dem Körper stets einen bestimmten Punkt giebt, der die Beschleunigung Null hat, und um den daher die Beschleunigungen so vertheilt sind, als wenn er fest wäre.

Es mag darauf hingewiesen werden, dass eine Anzahl der aufgestellten Theoreme sich auch in der Arbeit von L. Burmester „Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen Systeme" befinden. Seine Methode der Untersuchung wird auch zu den übrigen Theoremen leicht den Schlüssel liefern.

Schn.

Ph. Gilbert. Sur le problème de la composition des accélérations d'ordre quelconque. C. R. LXXXVI. 1390-1391.

O.

G. Bardelli. Sulla cinematica di un corpo solido. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 219-234.

Der Verfasser behandelt auf analytischem Wege eine Reihe von Fragen der Kinematik, welche die Beschleunigungen erster Ordnung betreffen. So werden beispielsweise die Beschleunigungscomponenten eines Punktes der Rotationsaxe als Functionen der Beschleunigungen eines anderen Punktes dieser Axe und der Entfernung der beiden Punkte dargestellt. Die Resultate der Arbeit, die zum Theil auf schon bekannte Sätze von Schell, Résal und dem Verfasser selbst führen, lassen sich ohne grossen Aufwand von Erklärungen und Formeln nicht gut wiedergeben, weshalb auf die Arbeit selbst verwiesen werden muss.

O.

A. B. Kempe. On conjugate four-piece linkages. Proc. L. M. S. IX. 133-147.

Fortsetzung der allgemeinen Untersuchungen über Glieder- und Stabsysteme, über welche in früheren Jahrgängen berichtet worden ist. Die vorliegenden enthalten als specielle Fälle die parallelen Bewegungen von Hart, welche im vorigen Bande p. 605 besprochen worden sind. Es ist leider nicht möglich, den Inhalt der Arbeit genauer anzugeben, ohne in Specialitäten einzugehen, deren Auseinandersetzung den hier gestatteten Raum überschreiten würde. Referent muss daher auf die Arbeit selbst verweisen.

O.

J. D. C. M. de Roos. Jets over de gekoppelde krukbeweging. Nieuw Arch. IV. 125-150.

Wenn man zwei Stangen, welche sich um feste Punkte in derselben Ebene oder auch in parallelen Ebenen drehen, mit einer dritten Stange auf solche Weise verbindet, dass die Axen, an

welchen die verschiedenen Drehungen vor sich gehen, parallel sind, so bekommt man ein System zur Uebertragung von Bewegungen, welches in der Mechanik eine ausgebreitete Anwendung gefunden hat. Ein solches System wird auch in diesem Aufsatze behandelt (vergl. F. d. M. VII. p. 551 ff.). In elementarer Weise werden die Figuren betrachtet, welche durch verschiedene Punkte des Systems beschrieben werden, und auch andere Systeme, wie das von Peaucellier, besprochen, welche mit dem beschriebenen ähnlich sind oder specielle Fälle desselben bilden. G.

W. K. Clifford. On the triple generation of three-bar curves. Proc. L. M. S. IX. 27-28.

Für einen von Cayley aufgestellten Satz wird hier ein einfacherer Beweis mitgetheilt durch Betrachtung der Operationen, durch welche eine Linie in eine andere übergeführt wird.

Wn.

G. Thiebaut. Note sur le système de M. Peaucellier. Nouv. Ann. (2) XVII. 258-261.

Herleitung einiger bekannter Eigenschaften des Peaucellier'schen Stabsystems, die auf einer Anwendung der Transformation mittelst reciproker Radiivectores beruhen. O.

A. B. W. Kennedy. Notes on the geometric solution of some statical problems connected with mechanisms (linkworks). Proc. L. M. S. IX. 221-225.

Siehe Abschn. X. Cap. 3. A. p. 602.

E. J. Lawrence. Conic constructions. Educ. Times XXIX. 74.

Construction von Ellipsen und Hyperbeln mittelst eines Stabsystemes von 4 Stäben. O.

H. Hart. On Sylvester's kinematic paradox. Messenger (2) VII. 189-190.

Herr Sylvester hat gezeigt, wie das von ihm „Kinematisches Paradoxon“ genannte Problem durch ein Stabwerk von 78 Stäben gelöst werden kann. „Man construire ein Stabwerk, welches auf zweien seiner Punkte so befestigt oder centrirt ist, dass (wenn die Maschine in Gang gesetzt wird) einige andere Punkte gezwungen werden, sich auf der Linie der Centren zu bewegen.“ In der vorliegenden Note zeigt Herr Hart, wie das Problem mit Hülfe seines Reciprocators durch nur 16 Stäbe gelöst werden kann. Glr. (O.)

T. Rittershaus. Das Kurbelgetriebe und seine Anwendungen. Civiling. XXIV.

Nachdem der Verfasser in einem früheren Aufsatze die allgemeinen Gesetze dargelegt hat, denen die zwangläufig geschlossene Kette mit nur Drehungspaaren unterworfen ist, behandelt er in dem vorliegenden die sogenannte niedere Vier-Axen- oder Kurbelkette specieller in theoretischer wie in praktischer Beziehung. Schn.

H. Léauté. Sur le tracé des engrenages par arcs de cercle. Mém. de Toul. (7) VIII. 353-370.

H. Léauté. Engrenages à épicycloïdes et à développantes. Détermination du cercle à prendre pour le profil des dents. C. R. LXXXVI. 1371-1374.

H. Léauté. Sur les systèmes articulés. C. R. LXXXVII. 151-154.

Im vorigen Bande des Jahrbuchs p. 420 ist über eine Arbeit des Herrn Léauté berichtet worden, in welcher er drei Methoden verschiedenen Grades zur näherungsweisen Construction eines Kreisbogens gegeben hatte, der ein gegebenes Curvenstück ersetzen soll. Herr Léauté hatte sich dort auf die beiden Fälle beschränkt, wo der zu ersetzende Curvenbogen 1) keine Singu-

larität, oder 2) in seiner Mitte einen Punkt maximaler oder minimaler Krümmung hat. In der vorliegenden ersten Arbeit dehnt der Verfasser das Verfahren aus auf den Fall, wo das gegebene Curvenstück in seinem einen Endpunkt einen Rückkehrpunkt hat. Speciell wird der Fall epicycloidischer Linien (der für Zahnräder von Wichtigkeit ist) behandelt. Diese Aufgabe kommt auf die Lösung folgender Frage zurück: „Gegeben ein Polynomen

$$y = x^{n+e} + p_1 x^{n+e-1} + \cdots + p_n x^e,$$

wo $p_1, p_2 \dots p_n$ unbestimmte Coefficienten, e eine gegebene Grösse, die auch Null sein kann, ist; die Grössen p_1, $p_2 \dots p_n$ so zu bestimmen, dass das Polynomen möglichst wenig von Null abweicht, während x zwischen Null und h variirt." Aus der Lösung dieser Aufgabe ergiebt sich dann eine einfache praktische Lösung der geforderten Aufgabe in den beiden im Titel angegebenen Fällen.

Die zweite Note behandelt ein allgemeineres Problem, nämlich: „In einem Gliedersystem von 3 Stäben den Anfügepunkt des letzten Stabes so zu bestimmen, dass man mit einem seiner Punkte so genau als möglich eine gegebene Curve beschreiben kann." Der Verfasser führt diese Aufgabe zunächst auf ihre kinematisch-geometrische Form zurück und bespricht dann die Art ihrer Lösung. Dieselbe beruht auf der Construction einer Curve, die er focale à noeud nennt. Ist diese gegeben, so giebt es drei Grade näherungsweiser Construction, die der Verfasser in der Note giebt. Diese im Auszug wiederzugeben, ist nicht wohl möglich, weshalb auf die Note selbst verwiesen werden muss. O.

F. da Ponte Harta. Um subsidio à cinematica. Jorn. sc. math. phys. nat. 1877. 15-33.

F. Maiss. Aehnlichkeiten einiger gebräuchlicher Geradführungen auf kinematischer Grundlage. Z. dtsch. Ing. XXII. 334-336.

Der Verfasser zeigt durch rein geometrische, einfache Betrachtungen, wie der Watt'sche und Evans'sche Lenker, das Robert'sche

Dreieck, Schubkurbel, Ellipsenlenker, die schwingende Kurbelschleife und der Conchoidenlenker nur specielle Fälle des Kurbelvierecks sind, und macht am Schluss darauf aufmerksam, dass der Evans'sche Lenker gleichzeitig Geradführung in zwei Richtungen von beliebigem Winkel erlaubt. Bn.

Marcel Gros. Note sur les ponts biais et courbes. Ann. de P. et Ch. XVI.

Fortsetzung der Abhandlung im XIV. Bande über einen Mechanismus, die Schnitte bei schiefen Gewölben und solchen mit gekrümmten Widerlagern in natürlicher Grösse aufzuzeichnen. Bn.

Proell und Scharowsky. Ueber einige geometrische Eigenschaften der astatischen Curve bei Centrifugalregulatoren. Civiling. XXIV. 443.

Es wird zunächst die Differentialgleichung der astatischen Curve aufgestellt, eine einfache Construction ihrer Tangente daraus abgeleitet und der Krümmungsradius berechnet. Sodann wird gezeigt, wie mit Hülfe des kinematischen Wendekreises das günstigste Verhältniss $G:P$ (Kugelgewicht zu Führungsgewicht) bestimmt werden kann, oder umgekehrt die Lage des Aufhängepunktes aus diesem Verhältniss. Bn.

H. Wehage. Mechanismen zur Auflösung höherer Gleichungen. Z. dtsch. Ing. XXI. 105.

Verfasser giebt zwei sehr einfache graphische Darstellungen der Function n^{ten} Grades einer Variable und, darauf basirend, zwei Mechanismen, aus einer Anzahl geradliniger Stäbe bestehend, deren letzter auf einem Massstabe die Werthe der Function abschneidet, während man mit dem ersten an einem anderen Massstabe die Werthe des Argumentes abgreift. Bn.

Weitere Lehrsätze und Aufgaben aus der Kinematik von J. J. WALKER, J. C. MALET, E. B. ELLIOTT, R. F. DAVIS, J. HAMMOND finden sich Educ. Times XXIX. 21-22, 42-43; XXX. 28-29.

O.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

W. H. NIEMSHUIS. Over het beginsel der virtueele snelheden. Diss. Leiden.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist der Gegenstand dieser Dissertation. Die Geschichte des Princips wird ausführlich dargelegt und die verschiedenen Beweise kritisch untersucht, wobei keiner stichhaltig gefunden wird. Weiter wird die Betrachtungsweise von Poinsot mitgetheilt, welcher auf ganz anderem Wege den Einfluss bestimmt, welchen die Verbindungen auf das Gleichgewicht und die Bewegung eines Systems haben, so dass das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten hieraus in ganz anderer Form abgeleitet werden kann. G.

G. PAUKER. Princip der virtuellen Verschiebungen. Ber. d. Techn. Inst. zu St. Petersb. 1877. 302.

P.

M. GEBBIA. Sulla stabilità virtuale dell' equilibrio d'un punto materiale isolato. Battaglini G. XVI. 177-197.

Der Verfasser ist der Meinung, dass die gewöhnliche Art der Unterscheidung des Gleichgewichts in stabiles und unstabiles, als auf dynamischen Grundlagen ruhend, der Sache selbst nicht

recht entspreche. Er will deshalb den Gleichgewichtszustand eines Punktes in anderer Weise untersuchen und führt dazu den Begriff der virtuellen Stabilität (stabilita virtuale) ein. Virtuelle Stabilität des Gleichgewichts in Beziehung auf die Richtung einer Verrückung nennt er das Verhältniss zwischen der Kraft, welche den Punkt am Ende der Verrückung, geschätzt in ihrer Richtung, erregt, zu der Verrückung selbst. Der Verfasser bestimmt in § 2 den allgemeinen Ausdruck für die virtuelle Stabilität und behandelt dann weiter den Fall eines freien Punktes und den Fall, wo der Punkt gezwungen ist, auf einer Fläche oder Curve zu bleiben, der Reihe nach jeden für sich. O.

P. Tchébycheff. Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point. Bull. S. M. F. VI. 188-193.

Sind R_1, R_2, R_3 drei einen Punkt angreifende Kräfte und bezeichnet man mit

$$[R_1\, R_2],\ [R_2\, R_3],\ [R_3\, R_1]$$

die Resultanten der resp. Kräfte R_1, R_2; R_2, R_3; R_3, R_1 und mit

$$(R_1\, [R_1\, R_2]),\quad (R_2[R_1\, R_2]),\quad (R_2\, [R_2\, R_3])$$

u. s. f. die Winkel zwischen den Resultanten und den resp. zusammensetzenden Kräften, so existirt die Relation:

$$\frac{\sin (R_1[R_1R_2])}{\sin (R_2[R_1R_2])}\cdot\frac{\sin (R_2[R_2R_3])}{\sin (R_3[R_2R_3])}\cdot\frac{\sin (R_3[R_3R_1])}{\sin (R_1[R_3R_1])} = 1.$$

Diesen Satz hatten Herr Darboux und der Verfasser zum Ausgangspunkte für Beweise des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte (siehe Bull. S. M. F. III. und Soc. Math. de Moscou 1876) genommen. In der vorliegenden Notiz nimmt Herr Tchébycheff denselben Satz zum Ausgangspunkt, um ohne Voraussetzung über die Richtung der Resultante zu zeigen, dass

$$\frac{\sin (R_1[R_1R_2])}{\sin (R_2[R_1R_2])} = \frac{R_2}{R_1}.$$

O.

Jacquier. Note sur les propriétés des systèmes de deux forces qui sont équivalentes Mém. de Bord. (2) II. 211-216.

Die Arbeit enthält Beweise für eine Reihe von Sätzen, welche der graphischen Statik von Culmann entnommen sind. Der Verfasser veröffentlicht dieselben, weil die Sätze selbst wenig bekannt, und die Beweise von denen, die Culmann gegeben hat, verschieden sind. Sie betreffen sämmtlich die Reduction eines Systems gegebener Kräfte auf ein System von 2 Kräften. Zur Charakterisirung der betreffenden Sätze möge der folgende dienen: „Wenn zwei Systeme R und S, R' und S' äquivalent sind, so hat das aus beliebig zweien von diesen vier Kräften construirte Tetraeder äquivalentes Volumen mit dem aus den beiden andern Kräften construirten Tetraeder." O.

P. Meutzner. Zur Theorie des Keiles. Grunert Arch. LXI. 344-350.

Im Wesentlichen ist die Arbeit einer Kritik der Form des Satzes vom Gleichgewicht beim Keile gewidmet, in der er sich in den Elementarlehrbüchern der Physik findet. Der Verfasser giebt zunächst eine kurze rein elementare Herleitung des Satzes, den er in folgender Form ausspricht: „Eine senkrecht auf die Basis eines materiellen gleichschenkligen Dreiecks wirkende Kraft P ist äquivalent mit 2 einander gleichen, senkrecht zu den Schenkeln wirkenden Druckkräften $Q = Q'$, wenn erstere sich zu je einer der letzteren verhält wie die Basis zu einem Schenkel." Sodann bespricht er die Mängel in den Formulirungen von Reis, Müller, Gerding, Spiller, Fliedner. O.

Laisant. Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité. Bull. S. M. F. VI. 193-194.

Beweis zweier Sätze von Lagrange, die er in seiner Arbeit: „Sur une propriété nouvelle du centre de gravité" (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1783. Oeuvres complètes V. p. 535) veröffentlicht hatte, mit Hülfe von Quaternionen. Der eine derselben heisst: „Die Summe der Producte jeder Masse der Punkte eines Körpers in das Quadrat seiner Entfernung von irgend einem gegebenen Punkt ist gleich dem Product der Summe der Massen

in das Quadrat der Entfernung dieses Punktes vom Schwerpunkt aller Massen, vermehrt um die Summe der Producte der Massen zu zwei und zwei in das Quadrat ihrer respectiven Entfernungen, wenn letztere Summe noch durch die Summe der Massen dividirt wird." O.

CLIFFORD. On the mass-centre of an octahedron. Proc. L. M. S. IX. 28.

Die zwölf Kanten eines (unregelmässigen) Octaëders bilden vier windschiefe Vierecke. Die Mittelpunkte der Seiten jedes einzelnen liegen in einer Ebene, und die drei so erhaltenen Ebenen mögen sich in k schneiden. Verbindet man ferner die drei gegenüber liegenden Octaëderecken, so sei m der Schwerpunkt des von diesen Verbindungslinien gebildeten Dreiecks. Zieht man km und verlängert diese Linie um $\frac{1}{2}km$, so erhält man den Schwerpunkt des gleichförmig mit Masse erfüllten Octaëders. Wn.

J. W. SHARPE. Note on the centre of gravity of a frustrum of a pyramid. Messenger (2) VIII. 124-125.

Es seien ABC, abc die parallelen Seiten des Pyramidenstumpfes, F, f ihre Schwerpunkte, und G der Schwerpunkt des Stumpfes, dann ist

$$\frac{FG}{3b^2+2ab+a^2} = \frac{fG}{3a^2+2ab+b^2} = \frac{Ff}{4(a^2+ab+b^2)},$$

wo $a = AB$, $b = ab$. Glr. (O.)

Weitere Lehrsätze und Aufgaben aus der Statik fester Körper von T. J. SANDERSON, J. L. KITCHIN, J. L. McKENZIE, G. S. CARR, R. F. DAVIS, WOLSTENHOLME, J. J. WALKER, TOWNSEND finden sich Educ. Times XXIX. 52, 102-103, 104-105; XXX. 17-19, 48-49. O.

R. S. BALL. On the principal screws of inertia of a free or constrained rigid body. Rep. Brit. Ass. 1878. Csy.

F. Zucchetti. Statica grafica. Torino. A. F. Negro.

A. B. W. Kennedy. Notes on the geometric solution of some statical problems connected with mechanisms (linkworks). Proc. L. M. S. IX. 221-225.

Der Verfasser stellt sich folgende Aufgabe: „Gegeben ist ein ebenes Gliedersystem. Auf einen der Stäbe wirkt eine Kraft. Man soll durch Construction die Kraft finden, welche den Mechanismus in Gleichgewicht hält, wenn sie in gegebener Richtung an einem anderen Stab angreift." Der Verfasser betrachtet zunächst den einfachsten Fall eines aus 4 Stäben zusammengesetzten Systems. Er zeigt, dass man ein solches System stets durch ein gewisses anderes System, welches er das „virtuelle" System (virtual mechanism) nennt, ersetzen kann, ein System nämlich, dessen Stäbe sich um dieselben augenblicklichen Centren und mit denselben Geschwindigkeiten bewegen. Der genaueren Untersuchung dieses virtuellen Systems, bei dem zwei Stäbe einander parallel gemacht sind, ist die Arbeit gewidmet. O.

G. Favero. La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari. Atti R. Acc. d. Linc. (3) II. 112-114.

Das Vorliegende ist ein Bericht der Herren Cremona und Battaglini über die Arbeit des Herrn Favero. Aus demselben geht hervor, dass es sich in der Arbeit um eine graphische Methode zur Bestimmung der inneren Kräfte in einem netzförmigen Balkenwerk handelt. Die Methode beruht aber nicht, wie es in der gewöhnlich angewandten der Fall ist, auf den Eigenschaften der Kräftepolygone, der Seilpolygone und der reciproken Figuren, sondern lässt sich als eine Verallgemeinerung des Parallelogramms der Kräfte betrachten, welche gestattet, die Construction einer grossen Zahl von Parallelogrammen, die in bestimmter Ordnung folgen sollen, abzukürzen. O.

C. Saviotti. Le travature reticolari a membri caricati. Atti R. Acc. d. Linc. (3) II. 148-149.

Das Vorliegende ist ein Bericht der Herren L. Cremona und G. Battaglini über die eigentliche Arbeit bei Gelegenheit der Uebergabe derselben an die Akademie. Nach diesem Bericht enthält die Arbeit, mittelst der Methoden der graphischen Statik, die Lösung folgenden Problems: „Zu finden die longitudinalen und normalen Wirkungen in den Gliedern eines netzförmigen Balkenwerkes, das beliebig belastet ist, d. h. nicht nur in den Knoten, sondern auch in den Axen der Glieder selbst." Die Lösung wird abhängig gemacht von der Bestimmung der Wirkungen, welche jedes, beliebig belastete, Glied auf die betreffenden Knoten überträgt. O.

H. T. Eddy. The theorem of three moments. Am. J. I. 27-31.

Der Satz, um den es sich hier handelt, betrifft die Relation zwischen den Biegungsmomenten eines geraden elastischen Balkens in drei aufeinander folgenden Unterstützungspunkten. Die Formel selbst ist nicht neu, sondern hat nur eine etwas allgemeinere Form, als ihr von früheren Autoren gegeben war. Dagegen ist die Ableitung directer und einfacher. Sie auseinanderzusetzen, würde indess einen zu grossen Aufwand von Formeln und Erläuterungen erfordern. Referent muss daher auf die Arbeit selbst verweisen. O.

H. T. Eddy. On the two general reciprocal methods in graphical statics. Am. J. I. 322-335.

Im ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit giebt der Verfasser zunächst einen kurzen Ueberblick über die bisherige Entwickelung der Methoden der graphischen Statik. Er macht namentlich darauf aufmerksam, dass in einer Arbeit von Poncelet (Mémorial de l'officier du génie Nr. 12, reproducirt von Woodbury, Stability of the arch, New-York 1858) die Grundzüge

einer zweiten fundamentalen Methode liegen, welche, ebenso allgemein wie das Kräftepolygon, noch in einer gewissen reciproken Beziehung zu der darauf begründeten Methode stehe. Der Verfasser setzt nun in § 2 die allgemeinen Eigenschaften der Gleichgewichtspolygone auf Grundlage mechanischer Betrachtungen auseinander, um im § 4 seine neue Methode, der er den Namen: „frame pencil method" beilegt, darauf zu gründen. Referent muss indess auf die Arbeit selbst verweisen, da ohne Figur und sehr viel Raum beanspruchende Erläuterung die Methode sich kaum auseinandersetzen liesse. In § 3 und 5 werden beide Methoden an demselben Beispiel erläutert. O.

MINCHIN. On astatic equilibrium. Proc. L. M. S. IX. 102-118.

Behandelt mit Hülfe von Quaternionen denselben Gegenstand, den Herr Darboux in seiner Arbeit: „Mémoire sur l'équilibre astatique" Mém. de Bord. (2) II. 1-65 bearbeitet hatte und über den F. d. M. IX. p. 615-617 referirt worden ist.

O.

G. DARBOUX. Problème de mécanique. Darboux Bull. (2) II. 433-436.

Die Arbeit behandelt folgendes Problem: „Zu finden die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen, unausdehnbaren, nicht schweren Fadens, der von einem Strom durchflossen wird und der Wirkung eines Magnetpols ausgesetzt ist." Auf analytischem Wege zeigt der Verfasser, dass die Spannung in dem Faden constant ist, dass die Gleichgewichtsfigur eine geodätische Linie des Kegels ist, der mit seinem Scheitel in dem Magnetpol diese Curve enthält. Dieser Kegel ist, wie sich weiter ergiebt, ein Umdrehungskegel. Die Construction dieses Kegels endlich wird auf die Lösung einer bekannten Aufgabe zurückgeführt, nämlich: „Von einem Kreis kennt man die Länge eines Bogens und die Länge der zugehörigen Sehne. Den Kreis zu construiren."

O.

J. Boussinesq. Sur la manière dont se distribue entre ses points d'appui le poids d'un corps dur, posé sur un sol poli, horizontal et élastique; identité de ce mode de répartition, pour une base de sustentation plane et horizontale, avec celui d'une charge électrique en équilibre dans une plaque mince de même forme. C. R. LXXXVII. 519-522.

J. Boussinesq. Sur une propriété simple, qui caractérise le mode de répartition du poids d'un solide, posé sur un sol horizontal élastique, entre les diverses parties de sa base, quand celle ci est une ellipse horizontale. C. R. LXXXVII. 687-689.

J. Boussinesq. Sur une loi intuitive, d'après laquelle se répartit le poids d'un disque circulaire solide, supporté par un sol horizontal élastique. C. R. LXXXVII. 1077-1078.

In der ersten dieser drei Noten wird durch einfache Anwendung von früher entwickelten Formeln gefunden, dass die Gewichtsvertheilung mit der Vertheilung einer elektrischen Ladung übereinstimmt. Ist die Form der Grenzlinie eine Ellipse, so findet sich, dass alle einer Richtung parallelen unendlich schmalen geradlinigen Streifen gleiche Lasten tragen.

In der zweiten Note wird dieser Fall noch einmal behandelt, und der auf jedes Flächenelement entfallende Druck als Function der Coordinaten dargestellt.

In der letzten endlich wird für den Fall einer kreisförmigen Basis gezeigt, dass das auf jedes Flächenelement entfallende Gewicht sich ergiebt, wenn man die ganze Last auf der Oberfläche einer Halbkugel gleichmässig vertheilt und dann auf den Grundkreis projicirt. Bn.

Biadego. Di una espressione generale dei momenti di flessione sulle pile nei ponti metallici a travi continue. Atti Ist. Ven. (5) IV. 613-633.

Der Verfasser entwickelt zunächst aus den $n-1$ Clapeyron'schen Gleichungen zwischen den Pfeilermomenten diese selbst als Quotienten der betreffenden Determinanten und giebt dann eine Anzahl von Regeln zur Berechnung der Unterdeterminanten, welche in der expliciten Darstellung gebraucht werden. Mehrere Tabellen geben die vorkommenden Zahlencoefficienten.

Bn.

C. Clericetti. Teoria dei sistemi composti in generale e specialmente dei moderni ponti sospesi americani. Influenza dei carichi accidentali. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 538-545.

Auszug aus dem zweiten Theil der im vorigen Jahrgange (F. d. M. IX. p. 702) besprochenen Arbeit. Es handelt sich um die Feststellung derjenigen Belastungsweise, durch welche die Spannungen in den schrägen Zugstangen ein Maximum werden. Der eigentliche Brückenträger bildet einen continuirlichen Balken, und es bestehen daher die Clapeyron'schen Gleichungen zwischen den drei aufeinander folgenden Pfeilermomenten. Verfasser weist von diesen Gleichungen ausgehend nach, dass je nach der Grösse des Bruches $\frac{H}{h}$ (H Höhe der Aufhängepunkte über der Axe, h Trägerhöhe), entweder nur negative Pfeilermomente, oder solche von wechselndem Zeichen auftreten können. Er untersucht alsdann die fünf nach diesem Systeme gebauten amerikanischen Hängebrücken, und findet, dass nur die Niagarra-Eisenbahnbrücke dem erforderlichen Werthe $\frac{H}{h}$ nahe genug kommt (0,333 statt 0,363). Bei derselben wird bei jeder beliebigen Stellung der zufälligen Lasten das Eigengewicht im Stande sein, die durch erstere erzeugten positiven Momente zu compensiren; während bei den Fussgängerbrücken über denselben Fluss die schädlichen Wirkungen positiver Momente durch abwärtsgehende Zugstangen verhindert werden. Bn.

J. Šolín. Theorie der äusseren Kräfte bei geraden Trägern. Casopis VII. (Böhmisch.).

Eine für Techniker und Hörer der Baumechanik bestimmte Arbeit, bei welcher neben sonstiger Präcision namentlich die glückliche Verwendung der neueren Geometrie lobend hervorzuheben ist. Std.

P. Belpaire. Essai d'une théorie des voûtes en berceau, en arc de cercle et en plein cintre. Paris. Dunod. Ann. soc. scient. Brux. II. B. 57-80.

P. Belpaire. Tables permettant d'effectuer rapidement les calculs relatifs à la stabilité des voûtes en berceau, en arc de cercle et en plein cintre. Paris. Dunod. Ann. soc. scient. Brux. II. B. 457-477.

Lagasse et Cousin. Rapport sur le 1er mémoire. Ann. soc. scient. Brux. II. A. 71-79.

Der Verfasser will die Unbestimmtheit entfernen, welche die Anwendung der Methode der Druckcurve zurücklässt in Betreff der Curve, die sich nach dem Abrüsten eines Bogens herstellt. Man weiss, dass die Gleichgewichtsbedingungen einer Gesammtheit von Gewölbsteinen eine unendliche Anzahl von Druckcurven, die diesen Bedingungen genügen, zulassen, so dass das Problem unbestimmt ist, wenn man sich auf die Gesetze der Statik beschränkt. In Wirklichkeit ist die Druckcurve gut bestimmt und stellt sich her nach den Bedingungen, die sich auf die Deformationen des Systems beziehen. Der natürliche Weg zur Lösung des Problems ist daher das Studium der Deformation. Dies hat Herr Belpaire gethan, so vollständig, als es unsere Kenntniss gestatten. Er hat so durch eine einfache geometrische Methode zwei neue Bedingungen gefunden, denen die Druckcurve genügen muss, und welche ihre völlige Bestimmung gestatten.

Der Verfasser hat mit Hülfe seiner Methode zwei Zahltafeln aufgestellt, welche sehr schnell die Lage des Druckcentrums in der Verbindung des Anfangs und des Endes liefern, und

her die Construction der Curve möglich machen. Zwei andere Tafeln lassen ohne Schwierigkeit die Grösse des Maximaldruckes erkennen in Einheiten der Fläche, welche die Masse des Bogens zu tragen hat, sowie den Werth des Druckes, den der Schlussstein hervorbringt. Wenige Augenblicke genügen, so die Elemente zu erkennen, die nothwendig sind um über die Stabilität des Bogens klar zu werden. Die Tafeln sind unabhängig von der gewählten Masseinheit. Mn. (O.)

Potier. Sur la direction des cassures dans un milieu isotrope. C. R. LXXXVI. 1539-1540.

Bezeichnen N_1, N_2, N_3 die Kräfte, welche normal auf die drei rechtwinkligen Ebenen in einem beliebigen Punkte des Körpers wirken, in denen keine Abscheerung wirkt, so findet sich, dass die Maximal-Abscheerung in den Ebenen stattfindet, welche den Winkel N_1 N_3 halbiren. Im Fall der Druckspannung würden sich hierdurch die Richtungen der Bruchflächen bestimmen nach Ansicht des Verfassers, während bei Zugspannungen N_1 massgebend wäre. Bn.

De Saint-Venant. Sur la plus grande des composantes tangentielles de tension intérieure en chaque point d'un solide, et sur la direction des faces de ses ruptures. C. R. LXXXVII. 139-142.

In Bezug auf die vorhergehende Notiz macht der Verfasser darauf aufmerksam, dass die gegebenen Formeln sich schon in früheren Schriften vorfinden. Alsdann zeigt er aber, dass die in der Theorie der Elasticität aufgestellten Formeln für diesen Zweck überhaupt nicht anwendbar sind, da die Voraussetzung, dass die Formveränderungen im Vergleich zu den gegebenen Dimensionen verschwindende Grössen seien, nicht mehr zutrifft. Ausserdem weist er darauf hin, dass die namentlich von Coulomb aufgestellte Theorie, dass bei starkem Druck die Zerstörung des Körpers durch Abscheerung stattfinde, durch die praktischen

Versuche als unrichtig erkannt worden ist, und dass diese Versuche die Annahme Poncelet's bestätigen, dass die bei Druckspannungen auftretenden seitlichen Erweiterungen den Körper schliesslich zerreissen. Bn.

E. Haeseler. Bestimmung des Erddruckes für schräge Brückenflügel. Civiling. XXIV. 257.

Die bisher bekannten Formeln für Erddruck beschränken sich sämmtlich auf den Fall, wo die Stützmauer der Axe des Erdkörpers parallel ist. Hier ist der Fall behandelt, wo die Mauer senkrecht zu dieser Axe steht. Den allgemeineren Fall hat der Verfasser im Supplementbande zu Heusinger's specieller Eisenbahntechnik durchgeführt. Bn.

R. R. Werner. Graphische Bestimmung des Inhaltes, des statischen Momentes und des Trägheitsmomentes beliebig begrenzter Flächen. Z. dtsch. Ing. XXI. 365.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes ersetzt der Verfasser das Integral $\int y dx$ durch ein anderes $\int z dz$, welches leicht erhalten wird, nachdem der Verlauf der z durch eine einfache Construction dargestellt worden ist. Die Substitutionsgleichung ist $y:z = dz:x$.

Derselbe Weg liefert eine leichte Darstellung der Momente und somit eine Construction des Schwerpunktes. Bn.

B. Hydrostatik.

J. C. Lewis. Centres of pressure. Messenger (2) VIII. 49-51.

In der vorliegenden Arbeit wird der Mittelpunkt des hydrostatischen Drucks auf elementarem Wege abgeleitet: 1) für ein Parallelogramm, dessen eine Seite in der Oberfläche der Flüssig-

keit liegt, 2) für ein Dreieck, dessen eine Ecke in der Oberfläche liegt, während die Gegenseite horizontal ist. Die Resultate ergeben sich auf doppelte Weise aus den für ein Dreieck gültigen, dessen eine Seite in der Oberfläche liegt. Es folgt weiter auch das Resultat für ein beliebig liegendes Dreieck.

Glr. (Wn.)

J. C. Lewis. On centres of pressure, metacentres etc. Messenger (2) VIII. 114-118.

1) Der Mittelpunkt des hydrostatischen Drucks für eine Fläche, die von einem geschlossenen Kegelschnitt begrenzt wird, wird elementar abgeleitet.

2) Das Drehungsmoment gewisser Flächen, die eben in die Flüssigkeit eintauchen, in Bezug auf eine in der Oberfläche der Flüssigkeit liegende Tangente wird ohne Integralrechnung gefunden.

3) Daraus ergiebt sich die Lage des Metracentrums für Dreiecke, Rechtecke etc. Glr. (Wn.)

L. v. Turquan. Mémoire sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants. Soc. scient. de Brux. II. B. 123-156.

Der Verfasser findet folgendes Resultat, welches dem von Clebsch (Borchardt J. LVII. p. 149-169) gefundenen widerspricht: Die kleinen Bewegungen der Flüssigkeit haben keinen Einfluss auf die Stabilität des Gleichgewichts eines schwimmenden Körpers. Man gelangt dazu auf folgendem Wege: Man stelle die Differentialgleichungen für alle möglichen Bewegungen des schwimmenden Körpers auf. Dieselben sind linear mit constanten Coefficienten, ohne zweites Glied. Ihre Integrale können nur dann periodisch sein, wenn der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers tiefer liegt, als derjenige des aus der Stelle gedrängten Wasservolumens, oder wenn der Abstand dieser Punkte kleiner ist, als das kleinste Trägheitsmoment der vom Wasser benetzten Fläche, dividirt durch das Volumen des eingetauchten Theiles des Körpers. Der Einfluss kleiner Bewegungen der

Flüssigkeit ist dann folgender: Die obigen Differentialgleichungen erhalten ein zweites Glied, welches gleich der Summe von Sinus und Cosinus von linearen Functionen der Zeit ist. Die Factoren von t sind so beschaffen, dass durch Integration kein Term entstehen kann, der t als Factor hat. Daraus wird der Schluss gezogen, dass durch die kleinen Bewegungen der Flüssigkeit die Bedingungen der Stabilität des Gleichgewichts nicht modificirt werden. Mn. (Wn.)

E. Guyau. Sur la théorie complète de la stabilité de l'équilibre des corps flottants. C. R. LXXXVI. 1246-1248.

Aus der kurzen Inhaltsangabe, die der Verfasser hier von einer grösseren Arbeit giebt, ist erwähnenswerth, dass das Problem nicht als ein statisches, sondern als ein dynamisches aufgefasst wird. Als Mass der dynamischen Stabilität wird die Minimalarbeit angenommen, durch die ein schwimmender Körper aus der Gleichgewichtslage in eine andere gegebene Stellung übergeführt wird. Die Berechnung der Stabilität, wie auch die Bestimmung der Kegelfläche, die eine durch den Schwerpunkt gezogene, ursprünglich verticale, Linie bei der Oscillation des Körpers beschreibt, hat der Verfasser nach seiner Angabe auf sehr einfache und eigenthümliche Art ausgeführt, ohne dass hier über diese Art das Geringste angegeben ist. Im Uebrigen sollen die Resultate hinsichtlich der Stabilität mit denen Dupin's übereinstimmen, nur hier strenger begründet sein. Wn.

Villié. Sur l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'action de corps quelconques. Liouville J. (3) IV. 257-264.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. B. p. 648.

R. Rühlmann. Ableitung der Formeln für Messungen der Meerestiefen mit Hülfe des Manometers. Pogg. Ann. (2) V. 558-566.

Der Verfasser hält die gewöhnliche Methode, grössere Meerestiefen mit Hülfe des Senkbleies zu bestimmen, für sehr ungenau und will dieselbe durch eine andere ersetzen, bei der das Gewicht der über einer Beobachtungsstelle stehenden Wassersäule durch ein Manometer gemessen wird. Dazu ist es erforderlich, eine Gleichung zwischen dem Manometerdruck und der Meerestiefe aufzustellen, die analog ist der Grundgleichung für barometrische Höhenmessung. Nimmt man an, dass die Zusammendrückbarkeit des Wassers bei constanter Temperatur durch die Gleichung dargestellt wird

$$(1) \qquad \frac{dv}{dP} = -v.k,$$

wo v das specifische Volumen beim Drucke P, k der Compressionscoefficient ist, so folgt für die Dichtigkeit θ

$$(2) \qquad \theta = \theta_1 . e^{k(P-1)},$$

wo θ_1 die Dichtigkeit beim Drucke $P = 1$ ist. Da ferner für die Zunahme des Druckes P mit der Tiefe x die Gleichung gilt

$$(3) \qquad 10{,}333 . dP = g\theta dx,$$

und da

$$(4) \qquad g:g' = (r-x):r,$$

wenn g' die Constante der Schwerkraft an der Oberfläche, r der Erdradius ist, so folgt aus (2), (3), (4) leicht eine lineare Differentialgleichung zwischen x und P, deren Integration die gesuchte Gleichung liefert. Dieselbe ist:

$$(5) \qquad P = 1 - \frac{1}{k} \log \text{nat} \left\{ 1 - \frac{k\theta_1}{10{,}333} g' \left(x - \frac{x^2}{2r} \right) \right\}.$$

Der Verfasser discutirt sodann die numerischen Werthe für k, θ_1, g' und giebt die Aenderung dieser Constanten mit der Temperatur an. Durch numerische Beispiele endlich zeigt er, dass man für praktische Zwecke $\frac{x^2}{2r}$ in der Formel (5) vernachlässigen kann.

Wn.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

J. T. Bottomley. Dynamics. Proc. of R. S. Victoria. 1878.

W. Fiedler. Géométrie et géomécanique. Aperçu des faits qui montrent la connexion de ces sciences, dans l'état présent de leur développement. Liouville J. (3) IV. 141-176.

Uebersetzung der Arbeit aus Wolf Z. XXI. p. 186, über welche bereits im 8ten Bande dieser Fortschritte p. 530 berichtet worden ist. O.

Lad. Hajniš. Ueber den Beweis, dass die Ursache der Bewegung ausserhalb der bewegten Masse liege. Časopis VII. 43-47. (Böhmisch).

Eine hauptsächlich gegen Wundt's Schrift: „Die physikalischen Axiome" gerichtete Polemik. Std.

Appell. Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps en mécanique. C. R. LXXXVII. 1074-1077.

Beweis des folgenden Satzes: „Wenn man ein System materieller Punkte hat, die gewissen Verbindungen, welche von der Zeit unabhängig sind, unterworfen sind, und die der Wirkung von Kräften ausgesetzt sind, welche nur von den verschiedenen Lagen der Punkte abhängen, so bleiben die Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung des Systems reell, wenn man darin t durch $t\sqrt{-1}$ ersetzt und die Projection der Anfangsgeschwindigkeiten α_k, β_k, γ_k durch $-\alpha_k\sqrt{-1}$, $-\beta_k\sqrt{-1}$, $-\gamma_k\sqrt{-1}$. Die so erhaltenen Ausdrücke sind die Gleichungen einer neuen Bewegung, welche dieselben materiellen Punkte annehmen würden, wenn sie, denselben Anfangsbedingungen ausgesetzt, von Kräften

angegriffen würden, welche gleich und entgegengesetzt denen wären, welche die ursprüngliche Bewegung hervorbringen würden." Dieser Satz wird am Beispiel des einfachen Pendels näher erläutert. O.

F. Gomes Teixeira. Sobre o emprego dos eixos coordenados obliquos na Mecanica analytica. Coimbra 1876. Darboux Bull. (2) II. 146-147.

Nach dem kurzen Bericht in Darboux Bull. giebt der Verfasser die Gleichungen, welche das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrücken, in schiefwinkligen Coordinaten, und leitet daraus die Gleichgewichtsbedingungen und die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines festen Körpers her. O.

E. Habich. Ueber das Princip der Erhaltung der Flächen. Par. Denkschr. 1878. (Polnisch).

Der Verfasser beweist zuerst den nach seiner Meinung für die Herleitung des genannten Princips unentbehrlichen Satz, dass die die Beschleunigung darstellende Gerade nur dann der Zeit proportionale Flächen beschreiben kann, wenn sie immer durch einen festen in endlicher oder unendlicher Entfernung liegenden Punkt geht. Dann untersucht er im Allgemeinen die Beziehung zwischen den kinematischen und geometrischen Elementen der Bewegung; zu den ersten gehören z. B. Geschwindigkeit Beschleunigung u. a., zu den zweiten: Krümmungshalbmesser, Tangentenwinkel u. a. Bei gegebener Bewegungsgleichung eines Punktes bestimmt eine solche Beziehung seine Bahn vollständig. Umgekehrt wenn die Bahn gegeben ist, so bestimmt eine solche Beziehung das Gesetz der Bewegung. Der Verfasser giebt die Lösung beider Aufgaben. Bcki.

A. Kempe. Het beginsel der kleinste werking in verband met de bewegingsverglijkingen van Lagrange en Hamilton. Diss. Leiden.

Das bekannte und auch in der letzten Zeit viel besprochene Princip der kleinsten Action ist der Gegenstand dieser Abhandlung. Im ersten Capitel wird die interessante Geschichte des Princips mitgetheilt, und besonders der Streit zwischen Maupertuis, Euler und König ausführlich behandelt. Im zweiten Capitel wird gezeigt und durch Beispiele erläutert, wie diese Gelehrten das Princip bei der Lösung mehrerer mechanischen Probleme benutzten. Im dritten Capitel werden die Betrachtungen Lagrange's mitgetheilt, der das Princip schärfer formulirte und reiner anwendete. Im vierten Capitel kommen wir zur Behandlung Jacobi's und betreten damit das neueste Gebiet, wo die metaphysischen Betrachtungen durch rein analytische Behandlung der Grundgleichungen ersetzt werden,. Im fünften Capitel kommt der Autor zum Princip von Hamilton; er zeigt, wie es sich zum Princip der kleinsten Action verhält, und giebt den Bewegungsgleichungen die elegante Form, welche zuerst von Hamilton aufgestellt worden ist, wobei die charakteristische Function eingeführt wird. Hierdurch werden die Bewegungsgleichungen von Systemen auf partielle Differentialgleichungen zurückgeführt, deren Auflösung jedoch im allgemeinen grosse Schwierigkeiten mit sich führt. G.

C. H. C. Grinwis. Over eene eenwondige bepaling der karakteristicke functie. Versl. en Mededeel. XIII. 342-355.

Der Verfasser betrachtet die charakteristische Function von Hamilton und weist nach, wie einige Probleme mittels dieser gelöst werden können.

Die Fälle, welche er in dieser Weise behandelt, sind die folgenden: 1) die Bewegung eines freien materiellen Punktes in einer verticalen Ebene, der nur der Schwerkraft unterworfen ist; 2) die Bewegung eines materiellen Punktes um ein anziehendes Centrum; 3) die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche. Da jedoch diese drei Probleme auf dem gewöhnlichen Wege eine viel einfachere Lösung finden, ist es sehr die Frage, ob in dieser Weise der Nutzen der Function von Hamilton genügend gezeigt ist. G.

E. Betti. Sopra una estensione dei principî generali della dinamica. Atti R. Acc. d. Linc. (2) II. 32-33.

Enthält die Mittheilung einiger Sätze ohne Beweise. Wir führen den mit 2) bezeichneten hier zur Charakterisirung derselben an: „Wenn das Hamilton'sche Princip gilt und die Kräftefunction V nur von den Coordinaten und ihren ersten Derivirten nach der Zeit abhängt, so ist, damit das Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts gelte, nothwendig und hinreichend, dass V sich nicht ändert, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten wechselt und man allen Punkten dieselbe Geschwindigkeit in derselben Richtung ertheilt." O.

V. Cerruti. Nuovo teorema generale di meccanica. Atti R. Acc. d. Linc. (3) II. 75-77.

Mittheilung folgenden Satzes ohne Beweis: „Man denke sich ein materielles System in Bewegung. Φ sei der Complex, welcher durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte bestimmt wird. Wenn dann 1) der Complex Φ beständig mit einem anderen linearen Complex Θ in Involution ist, 2) und stets, das System als nicht fest vorausgesetzt, die infinitesimale helicoidale Bewegung, welche durch den Complex Θ bestimmt ist, möglich ist, so existirt ein lineares Integral in Beziehung auf die Componenten der Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte des Systems, welches ausdrückt, dass das Moment des Complexes, bestimmt durch die Grösse der Bewegung der verschiedenen Punkte des Körpers in Beziehung auf den Complex Θ, während der ganzen Dauer der Bewegung constant ist. Der analytische Ausdruck dieses Integrals ist:

$$l\Sigma\mu\frac{dx}{dt}+m\Sigma\mu\frac{dy}{dt}+n\Sigma\mu\frac{dz}{dt}+p\Sigma\mu\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)$$
$$+q\Sigma\mu\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+r\Sigma\mu\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\text{const.},$$

wo l, m, n, p, q, r die Coordinaten des Complexes Θ, μ die Masse des Punkts x, y, z ist." O.

J. LEMOYNE. Notes sur quelques conséquences du théorème de M. Villarceau. C. R. LXXXVI. 301-302.

In der Note werden zwei Folgerungen der Villarceau'schen Sätze mitgetheilt. In Nr. 1 werden Punkte betrachtet, die sich gruppenweise auf concentrischen Kugeln bewegen. Sind m_1, m_2,... die Punkte, P_1, P_2,... die Reactionen der Oberfläche mit dem Radius R für diese Punkte; haben m'_1, m'_2,..., P'_1, P'_2,... dieselbe Bedeutung für die Kugel R' u. s. f., sind endlich X, Y, Z die Componenten der activen Kräfte und der passiven Kräfte, welche aus den möglichen Verbindungen anderer Natur entstehen, so nimmt der Villarceau'sche Satz die Form an:

$$\Sigma mu^2 = -R\Sigma P - R'\Sigma P' - \cdots - \Sigma(Xx + Yy + Zz).$$

In Nr. 2 wird ein System von Punkten betrachtet, die sich unter der Wirkung wechselseitiger attractiver Kräfte ohne andere Ver bindungen bewegen, und deren Kräftefunction V eine homogene Function n^{ten} Grades ist. Aus der unter dieser Voraussetzung sich ergebenden Transformation des Villarceau'schen Satzes folgt der Jacobi'sche Satz (Vorl. über Dynamik, Vorl. 4), dass in einem unter Wirkung des Newton'schen Attractionsgesetzes in Bewegung befindlichen stationären Systeme von Punkten die relative lebendige Kraft continuirlich um den Werth des Potentials oscillirt.

O.

PH. GILBERT. Sur un théorème de M. Villarceau; remarques et conséquences. C. R. LXXXVI. 42-45.

Fortsetzung der Arbeit, über die F. d. M. IX. p. 636 berichtet worden ist. In § 4 der Arbeit transformirt der Verfasser den Satz von Villarceau und gelangt dadurch zu folgendem Satz: „Wenn ein freier Punkt eine sphärische Curve beschreibt, oder allgemeiner, wenn das Quadrat seiner Entfernung von einem festen Centrum variirt proportional der Zeit, so ist die bewegende Kraft in jedem Augenblick normal zu der Ebene durch das feste Centrum und die gerade Polare der Bahn.“ Im § 5 erfolgt dann die Erweiterung auf ein materielles System. In dem speciellen

Fall, wo die potentielle Energie des Systems eine homogene Function k^{ten} Grades der wechselseitigen Entfernungen der Massenpunkte des Systems ist, und es eine Function ψ der inneren Kraft giebt, homogen vom Grade k' in $x, y, z\dots$, ergiebt sich die Form:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2G}{dt^2} = -(k+2)\Pi + (k'+2)\Psi + \text{const.},$$

wo $G = \Sigma mr^2$ das Moment der polaren Trägheit in Beziehung auf den Anfangspunkt ist. Giebt es keine äusseren Kräfte und ist $k = -2$, so folgt daraus der Satz von Jacobi: „In einem System materieller Punkte, die sich anziehen oder abstossen im umgekehrten Verhältniss des Cubus der Entfernung, ist das Moment der polaren Trägheit des Systems in Bezug auf einen festen Anfangspunkt eine quadratische Function der Zeit." (Vorl. über Dynamik p. 27). § 6 bezieht sich auf Anwendungen, die Villarceau und Sarrau von dem Villarceau'schen Satze auf die Thermodynamik gemacht hatten. O.

N. Joukovsky. Sur un cas particulier de mouvement d'un point matériel. Liouville J. (3) IV. 425-428.

Man kann häufig particuläre Integrale der Bewegungsgleichungen eines Punktes finden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit nur von den Anfangscoordinaten abhängt. Der Verfasser zeigt in der vorliegenden Arbeit, dass dies auch bei einer ebenen Bewegung möglich ist, wenn die Niveaulinien isothermische Linien sind. Die entwickelte Methode wird dann an dem speciellen Beispiel erläutert, wo die Niveaulinien concentrische Kreise und die dazu senkrechten Linien die durch den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise gehenden Geraden sind. O.

G. Halphen. Sur les lois de Kepler. Bull. Soc. Phil. de Paris (7) I. 89-91.

Der Verfasser reproducirt zunächst ganz kurz die beiden von Herrn Darboux und ihm herrührenden Lösungen des von Herrn Bertrand in den C. R. LXXXIV. p. 673 aufgestellten Problems,

über welche im neunten Bande dieses Jahrbuchs p. 638—639 referirt worden ist. Beide Lösungen führen auf specielle Kraftgesetze. Herr Halphén zeigt sodann, dass umgekehrt auch die Kenntniss dieser Kraftgesetze genüge, um die beiden allgemeinen Lösungen des Bertrand'schen Problems zu finden. O.

J. W. L. Glaisher. On the law of force to any point in the plane of motion in order that the orbit may be always a conic. Monthl. Not. XXXIX. 79-91.

Herr W. R. Hamilton hat gezeigt, dass, wenn ein Körper nach einem festen Punkt angezogen wird mit einer Kraft, welche variirt direct mit der Entfernung von dem Punkt und umgekehrt wie der Cubus der Entfernung von einer festen Ebene, der Körper einen Kegelschnitt beschreiben muss, dessen Ebene die feste Ebene in einer Geraden schneidet, die die Polare des festen Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt ist. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Satz aus Newton's Principia Prop. XVII. hergeleitet und weiter gefunden, dass wenn ein Kegelschnitt beschrieben wird unter der Wirkung einer Kraft $\frac{\mu r}{p^3}$ nach O hin, wo p das Loth auf die Polare von O, das periodische Glied gleich $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} p_0^{\frac{3}{2}}$ ist, wo p_0 das Loth vom Mittelpunkt des Kegelschnitts auf die Polare von O ist. Dies Resultat wurde bereits bewiesen in den Fällen der elliptischen Bewegung um den Mittelpunkt und den Brennpunkt.

Eine unabhängige geometrische Untersuchung des Gesetzes $\frac{\mu r}{p^3}$ wird dann weiter gegeben auf einem Wege, der dem im Newton Prop. XVI. oder ähnlich ist und die Ausdrücke für das Gesetz und das periodische Glied in einige andere Formen transformirt. Der Fall der Parabel wird ebenfalls betrachtet.

Aus dem Hamilton'schen Satze folgt, dass ein Körper unter der Wirkung einer centralen Kraft $\frac{\mu r}{(ax+by+c)^3}$ immer einen

Kegelschnitt beschreibt. Dies bringt den Satz in Verbindung mit den Resultaten der Herrn Darboux und Halphén, welche in den C. R. LXXXIV., LXXXV. (s. F. d. M. IX. 638—641) gezeigt haben, dass ein Körper unter der Wirkung einer centralen Kraft gleich

$$\frac{\mu r}{(ax+by+c)^3} \quad \text{oder} \quad \frac{\mu r}{(ax^2+bxy+cy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

immer einen Kegelschnitt beschreibt und dass es keine andere Kraftgesetze giebt, für welche dies wahr ist. Das zweite dieser Gesetze wird auch in der vorliegenden Arbeit besprochen.

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On the law of force to any point when the orbite is a conic. **Rep. Brit. Ass. 1878.**

Auszug aus der obigen Arbeit. Auch vom Referenten ist 1862 ein elementarer Beweis dieses Satzes im Quart. J. No. 19 publicirt worden. **Csy. (O.)**

F. da Ponte Harta. Sobre o movimento d'um punto actuado por una força perpendicular ao raio vector. **Jorn. sc. math. e astr. I. 161-170.**

C. Lagrange. De l'origine et de l'établissement des mouvements astronomiques. **Mém. cour. et Mém. des sav. étr. de Belg. in 4°. XLII.**

F. Folie et v. d. Mensbrugghe. Rapport sur ce mémoire. **Bull. de Belg. (2) XLV. 148-158, 153-154.**

Erster Theil einer Arbeit, welche mit Verbesserungen die Ausführung derjenigen Arbeit ist, über die F. d. M. VIII. 684—685 berichtet worden ist. Die Resultate des Verfassers sind: Eine deformable Masse, die der Attraction eines materiellen Systemes unterworfen ist, nimmt im Allgemeinen eine beschleunigte Rotationsbewegung, frei im Raum oder um einen festen Punkt, an.

Durch die Wirkung der Rotation wird nicht nur die deformable Masse senkrecht zur Rotationsaxe verlängert und seine Aequatorialebene zum Maximum der Attraction gemacht, sondern es werden auch die Axen der Maximalattraction, in Folge der Attraction eines materiellen Systems, im Sinne der Rotation verlegt, so dass diese Axen sich immer gegen die Lage voraus befinden, die sie ohne Rotation einnehmen würden.

Ein materieller Punkt, der der Attraction einer deformabeln in Rotation befindlichen Masse unterworfen ist, kann in einem speciellen Falle einen Kegelschnitt beschreiben, der durch seine Lage und seine Geschwindigkeit bestimmt ist.

Eine deformable Masse, die der Attraction einer anderen in Rotation befindlichen deformabeln Masse unterworfen ist, nimmt eine Rotation in demselben Sinne an.

Die deformabeln Massen, von denen in der Abhandlung die Rede ist, können sich nur in einer gewissen bestimmten Art deformiren. Der Verfasser hofft später zu zeigen, dass die wechselseitige Attraction zu den deformabeln Systemen dieser Art Veranlassung gegeben hat. Mn. (O.)

SIACCI. Un nuovo metodo per determinare la resistenza dell aria sui projetti. Atti di Torino XIII. 131-134.

Das Vorliegende enthält nur einleitende Worte bei Uebergabe der eigentlichen Arbeit an die Akademie. In denselben werden die Schwierigkeiten besprochen, welche in der Neuzeit sich einer vollen Lösung des ballistischen Problems durch die Benutzung gezogener Geschütze und oblonger Geschosse entgegenstellen. Der Verfasser meint, nur successive lasse sich die Frage lösen und theilt sie in zwei Theile, deren erster die Ermittelung des Luftwiderstandgesetzes enthalte und deren zweitem die Integration der Gleichungen zufalle. Er selber hat sich in der Arbeit, die er der Akademie übergeben hat, mit der ersten Frage beschäftigt. O.

A. INDRA. Balistique graphique. Rev. d'art. XI. 436-456.

E. SANG. Sketch of arrangement of tables of ballistic curves in a medium resisting as the square of the velocity and the application of these tables to gunner. Proc. of Edinb. IX. 637-648.

Cly.

E. MUZEAU. Sur le mouvement des projectiles oblongs dans l'air. Rev. d'art. XIII.

L. DESPREX. Remarque importante sur le mouvement uniformément varié. Mondes (2) XLV. 53-54.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass der Satz, ein Körper komme, wenn er längs einer beliebigen Curve unter dem Einfluss der Schwere heruntergefallen, stets mit derselben Geschwindigkeit an, wie wenn er dieselbe Höhe frei heruntergefallen sei, absolut nur für die gerade Linie Geltung habe.

O.

CH. HERMITE. Sur le pendule. Extrait d'une lettre adressée à M. Gyldén. Borchardt J. LXXXV. 246-249.

Enthält 1) den Beweis, dass die rechtwinkligen Coordinaten eines sphärischen Pendels sich darstellen lassen als Ableitungen regulärer Functionen der Zeit, 2) die Mittheilung der Ausdrücke für die Ableitungen der Functionen $\sin\operatorname{am} x$, $\cos\operatorname{am} x$, $\varDelta\operatorname{am} x$ und $Z(x)$ nach dem Modulus k.

B.

GRUEY. Sur un nouveau pendule gyroscopique. C. R. LXXXVII. 526-529.

Beschreibung des Apparates und Mittheilung von Versuchen, die der Verfasser mit demselben angestellt hatte. Die Note ist mehr physikalisch interessant.

O.

F. Siacci. Il pendolo di Leone Foucault e la resistenza dell' aria. Atti di Torino XIII. 695-716.

In der Einleitung bespricht der Verfasser die Arbeiten von Mossotti und St. Robert als die einzigen ihm bekannten über das Foucault'sche Pendel im lufterfüllten Raume, wobei ihm u. A. die Arbeiten von Clausen (Bull. de St. Pétersb. 1852) und Hansen (Pogg. Ann. XCII.) entgangen sind. Unter der Voraussetzung, dass die Elongation des Pendels unendlich klein und der Luftwiderstand der Geschwindigkeit proportional ist, reduciren sich die Bewegungsgleichungen auf ein System von zwei linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, dessen vollständige Integration sich ohne Schwierigkeit ausführen lässt. Die Abhandlung enthält der Hauptsache nach eine sehr eingehende Discussion der Trajectorie, welche sich aus der gefundenen Lösung ergiebt. Von den Resultaten soll hier als hauptsächlichstes nur Folgendes hervorgehoben werden: Das Pendel oder genauer seine Horizontalprojection beschreibt eine logarithmische Spirale um einen Punkt, der seinerseits eine congruente Spirale in entgegengesetztem Sinne beschreibt. Die Geschwindigkeiten auf den beiden Spiralen sind den Radienvectoren proportional; die Winkelgeschwindigkeiten sind constant und ihr arithmetisches Mittel entgegengesetzt gleich der Componente der Erdrotation, genommen nach der Richtung der Verticalen. B.

A. Cornu et J. B. Baille. Étude de la résistance de l'air dans la ballance de torsion. C. R. LXXXVI. 571-575.

Bei Gelegenheit einer experimentellen Untersuchung haben die Verfasser gefunden, dass bei den Schwingungen der Torsionswage der Widerstand, den die Luft auf den Hebelarm ausübt, nicht vernachlässigt werden darf. Dieser Widerstand ist der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit des Hebelarms proportional, wie sich daraus ergiebt, dass die Beobachtungen dargestellt werden durch die Lösung der Differentialgleichung

$$\mu\frac{d^2w}{dt^2}+h\frac{dw}{dt}+kw=0.$$

Wn.

A. Cornu et J. B. Baille. Influence des termes proportionnels au carré des écarts, dans le mouvement oscillatoire de la balance de torsion. C. R. LXXXVI. 1001-1004.

Das Horizontalpendel mit Torsion ist während seiner Oscillationen einem System von Kräften unterworfen, dessen Moment eine Function $\varphi(w_0+w)$ ist, die mit Hülfe der Taylor'schen Formel nach den steigenden Potenzen des Winkels w, den der Hebelarm zur Zeit t mit seiner Gleichgewichtslage w_0 macht, entwickelbar ist. Sind diese Oscillationen unendlich klein, so kann man in der Entwickelung die höheren Potenzen als die dritte vernachlässigen und die Bewegungsgleichung reducirt sich auf eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, die die Verfasser früher (cf. das vorige Referat) untersucht haben. Praktisch aber kann man diese Oscillationen nicht beobachten, sondern man muss Amplituden von einer gewissen Grösse adoptiren. Es ist daher von Wichtigkeit zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Oscillationen klein genug sind, damit das Gesetz der Bewegung nur von der ersten Potenz des Ausschlags abhängt. Wäre die Function φ genügend bestimmt, so könnte man bei gegebener Näherung im Voraus die Grenze der Amplituden der Oscillationen bestimmen; im Allgemeinen aber macht das Eintreten zufälliger Störungen, die nach unbekannten Gesetzen wirken, die angenäherte Kenntniss dieser Function illusorisch und hindert die Grenze dieser Amplitude a priori zu bestimmen. Die Verfasser zeigen nun, wie die Beobachtung selbst die Existenz der Störung zeigt und das Mass ihrer Wirkung giebt. Die Verfasser haben die theoretisch gewonnenen Resultate an ihrem zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde construirten Apparate prüfen können. O.

A. Terquem. Sur les courbes dues à la coexistence de deux mouvements vibratoires perpendiculaires. Ann. de l'Éc. N. (2) VII. 349-375.

Die Curven, mit denen sich die vorliegende Arbeit beschäf-

tigt, lassen sich, wenn t die Zeit und δ den Phasenunterschied der beiden rechtwinklig gegen einander sich vollziehenden Schwingungen bedeutet, in der Form darstellen

$$x = a\cos 2\pi m(t+\delta); \quad z = b\cos 2\pi nt.$$

Fasst man die erste Bewegung als die Projection der Bewegung eines Moleküls auf, welches sich gleichförmig auf einem Kreise bewegt, und bezeichnet den in der Zeit t durchlaufenen Bogen mit y, so kann man, wenn man die z-Axe im Mittelpunkt dieses Kreises senkrecht denkt, die wirklich stattfindende Bewegung des Moleküls als die Projection einer Curve auffassen, welche auf einem Kreiscylinder verzeichnet ist, dessen Basis den Radius a hat. Die Gleichung dieser Curve ist

$$z = b.\cos 2\pi \frac{ny}{m.2\pi a};$$

sie enthält den Phasenunterschied δ nicht mehr. Die den verschiedenen Phasenunterschieden entsprechenden Bahnen erhält man aber, wenn man jene cylindrische Curve auf die verschiedenen Diametralebenen des Cylinders projicirt. Bei m Umläufen um den Cylinder wiederholen sich n Curventheile periodisch; ein solcher Curventheil umfasst demnach, längs dem Bogen gemessen, die Strecke $\frac{ml}{n}$. Nach diesen m Umläufen ist das Molekül in seine Anfangslage zurückgekehrt, und der ganze Bewegungsvorgang wiederholt sich in derselben Form. Ist l der Kreisumfang, längs dessen die Grössen y gemessen werden, so kann man den Curventheil längs des ersten Kreisumlaufs darstellen durch

$$z_1 = b\cos 2\pi \frac{ny}{ml},$$

wo y von 0 bis l variirt. Ersetzt man y durch $y+l$ und lässt y zwischen denselben Grenzen variiren, so erhält man einen zweiten Curventheil in der Form

$$z_2 = b\cos 2\pi\left(\frac{ny}{ml} + \frac{n}{m}\right)$$

und so fort bis zum m^{ten} Umlauf, der sich in

$$z_m = b\cos 2\pi\left(\frac{ny}{ml} + \frac{(m-1)n}{m}\right)$$

darstellt. Die cylindrische Curve lässt sich also ausdrücken durch die Gleichung

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_m)=0,$$

wo in $z_1, z_2, z_3 \dots z_m$ die Werthe y von 0 bis l variiren. Aendert sich y darüber hinaus, so vertauschen sich nur die Indices in den $z_1, z_2, z_3 \dots z_m$. Hiermit ist die Grundlage für die folgende Specialuntersuchung der Lissajous'schen Figuren gegeben. Sie geht aus von den Eigenschaften der cylindrischen Curven, wendet sich alsdann zu den durch Projection auf die Diametralebenen erhaltenen ebenen Curven und giebt zum Schluss die Beschreibung einer Vorrichtung, wie man die Folgerungen der Theorie experimentell veranschaulichen kann. Schn.

Equazione della linea geodetica. Acc. P. d. N. Linc. XXXI. 327-341.

J. Boussinesq. Théorie des mouvements quasi-circulaires d'un point pesant sur une surface de révolution creuse à axe vertical. C. R. LXXXVI. 959-962.

Die Arbeit bezieht sich auf zwei frühere Arbeiten des Verfassers in den C. R. LXXXV. p. 65 und p. 539 (siehe F. d. M. IX. p. 637 und 648. Auf p. 637 ist durch ein Versehen auf Zeile 9 die Arbeit Herrn J. Bertrand statt Herrn J. Boussinesq zugeschrieben. Auf p. 648 Zeile 3 von oben verbessere man die Bandzahl LXXXIV. in LXXXV.) Der Verfasser wendet dieselbe Methode an auf analoge Bewegungen eines schweren Punktes, der sich auf einer Rotationsfläche mit verticaler Axe bewegt. Er gelangt schliesslich zu folgendem Resultat: „Es giebt keine Rotationsfläche, auf welcher ein beweglicher schwerer Punkt allgemein geschlossene Bahnen beschreibt oder constante Zeit zur Vollendung einer Oscillation braucht. Nur das Ellipsoid mit der Abplattung $\frac{1}{2}$ hat die erste Eigenschaft für sehr kleine Oscillationen und für die, die quasi-circular sind, während die Oberfläche mit cycloidalem Meridian die zweite Eigenschaft für die

ebenfalls sehr kleinen Oscillationen hat und für die, welche längs eines Meridians erfolgen. O.

L. Neumann. Die Bewegung eines materiellen Punktes auf der Oberfläche einer nicht homogenen Kugel. Diss. Freiburg i. Br.

Die Arbeit zerfällt in zwei Theile. Der erste Theil enthält die Ableitung des Potentials einer Kugel, deren Dichte nach einem bestimmten Gesetz variirt. Im ersten Paragraphen dieses Theils wird auf Grund der Dissertation von H. Züge, Halle a. S. 1875, welche das Potential des homogenen Ellipsoids von den Kreisschnitten desselben ausgehend entwickelte, das Potential einer homogenen Kugel in Anschluss an das von Heine entwickelte Kreispotential specialisirt. Im zweiten Paragraphen wird diese Entwickelung erweitert auf eine Kugel, deren Dichtigkeit sich in parallelen Schichten ändert und zwar wird als Aenderungsgesetz angenommen, dass sich die Dichte ändert proportional dem Quadrat des Cosinus der geographischen Breite, resp. proportional dem Flächeninhalte der zur Aequatorebene parallelen Kreisschnitte. Es ergiebt sich dabei für einen Punkt der Oberfläche:

$$U=\frac{116}{105}\pi\lambda R^2-\frac{4}{35}\pi\lambda x^2=\tfrac{1}{2}(p_1 R^2-p^2x^2).$$

Der zweite Theil enthält dann die Aufstellung und Discussion der Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes, der sich auf der Kugeloberfläche unter Einfluss des im ersten Theil abgeleiteten Potentials bewegt. Im § 3 werden zunächst die Gleichungen aufgestellt, welche die Zeit, die der Punkt zur Zurücklegung eines bestimmten Weges auf der Kugel braucht, und seine geographische Länge als Functionen der geographischen Breite geben. Die dafür gefundenen Ausdrücke enthalten im Nenner unter dem Wurzelzeichen Ausdrücke zweiten Grades. Der Untersuchung dieser Ausdrücke ist § 4 gewidmet. Im folgenden Paragraphen werden dann eine Reihe von Formeln abgeleitet. § 6 enthält die Discussion der Bewegung. Die periodische Bewegung

findet statt zwischen zwei gleich weit vom Aequator entfernten Parallelkreisen, die durch die Bahn berührt werden, während die dazwischen liegenden entsprechenden Parallelkreise auf beiden Seiten des Aequators immer mit gleicher Geschwindigkeit passirt werden. § 7 enthält die Ableitung der Länge der Bahn, während der Schlussparagraph acht specielle Fälle behandelt.

O.

E. Voss. Bewegung eines schweren Punktes auf der Fläche eines geraden Kegels und eines Rotationsparaboloids. Pr. Schwerin.

Analytische Behandlung des Problems ohne Berücksichtigung der Reibung und des Widerstandes des Mittels, in dem die Bewegung vor sich geht. O.

F. Purser. On the occurrence of equal roots in Lagrange's determinantal equation of small oscillations. Rep. Brit. Ass. 1878.

Die Arbeit enthält einen elementaren Beweis des wichtigen Satzes, dass die Existenz gleicher Wurzeln in Lagrange's Determinanten-Gleichung kleiner Oscillationen die Stabilität nicht zu afficiren braucht, dass dies aber die Anzahl verschiedener periodischer Vibrationen verringert, ohne indess die periodische Formel-Lösung oder die Zahl verschiedener Integrale zu beeinflussen.

Es wird ferner bewiesen, dass ein ähnlicher Schluss gilt für ein gewisses System von Differentialgleichungen ersten Grades, die ebenfalls eine Verwendung in der Physik finden.

Csy. (O.)

E. J. Routh. Stability of motion. Prof. of R. S. Victoria 1878.

A. Giesen. Oscillatorische Bewegung eines verlängerten Rotationsellipsoids infolge der Anziehung eines weit entfernten Punktes. Schlömilch Z. XXIII. 380-401.

Ein verlängertes Rotationsellipsoid von constanter Dichtigkeit wird von einem äusseren Punkte angezogen. Es resultiren daraus eine (im Centrum angreifende) Kraft und ein Kräftepaar, welches letztere in der durch den anziehenden Punkt und die Axe des Ellipsoids gelegten Ebene liegt. Für die Werthe der Kraft und des Kräftepaars werden Näherungsausdrücke berechnet unter der Voraussetzung, dass die Entfernung R des äusseren Punktes vom Mittelpunkte gegen die Coordinaten x, y, z eines Ellipsoidpunktes so gross ist, dass schon die zweiten Potenzen von $\frac{x}{R}$ etc. vernachlässigt werden können. Da die Axe des Kräftepaares zugleich eine Hauptträgheitsaxe des Ellipsoids ist, so dreht sich das Ellipsoid um diese Linie wie um eine feste Axe. Die Differentialgleichung für diese Bewegung ist (bei der hier angewandten Näherung)

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = -\frac{3\mu f(c^2-a^2)}{R^3(c^2+a^2)} \sin\vartheta \cos\vartheta,$$

wobei ϑ der Winkel ist, den die Linie R mit der ungleichen Axe des Ellipsoids bildet, c und a die Axen des Ellipsoids, μ die Masse des angezogenen Punktes, f die Constante der Anziehung. Das Integral der obigen Gleichung, das, wie man erkennt, auf elliptische Functionen führt, wird genauer discutirt, ohne dass sich besonders bemerkenswerthe Resultate ergeben. Uebrigens lehrt die Gleichung, dass die Bewegung von der Dichtigkeit des Ellipsoids unabhängig, ferner für alle ähnlichen Ellipsoide dieselbe ist. Man kann die Bewegung des Ellipsoids ersetzen durch die eines Systems von vier Massenpunkten.

Zum Schluss wird der Fall behandelt, dass der anziehende Punkt selbst gegebene kleine Oscillationen ausführt. Die Behandlung dieses Problems wird aber nur unter der weiteren Voraussetzung durchgeführt, dass die Aenderungen von ϑ sehr klein sind, also ϑ an Stelle von $\sin\vartheta$ tritt. Wn.

Despeyrous. Mouvement général d'un corps solide.
Mém. de Toul. (7) IX. 401-412.

A. Steen. Et mekanisk Problem reduceret til Kvadratur.
Zeuthen Tidssk. (4) II. 188-192.

Die Euler'schen Gleichungen für die Bewegung eines Körpers, welcher sich ohne Einwirkung von accelerirenden Kräften um einen festen Punkt dreht, lassen sich auf Quadraturen reduciren. Im Allgemeinen werden das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit und ihre Componenten elliptische Functionen der Zeit. Wenn zwei der Trägheitsmomente einander gleich sind, reichen trigonometrische Functionen zur Lösung aus. Gm.

J. Loudon. Euler's equations of motion. Am. J. I. 387-388.

Bestimmung der Veränderungen der Rotationen eines Körpers in der Zeiteinheit. O.

R. Hoppe. Bewegung zweier durch einen elastischen Faden verbundener materieller Punkte ohne Einwirkung äusserer Kräfte. Grunert Arch. LXII. 390-404.

Zwei Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ mit den Massen m_1, m_2 sind durch einen nicht materiellen Faden verbunden, welcher bei einem Abstand $> L$ eine Zugkraft q übt, während bei einem Abstand $\overline{\gtrless} L$ dieselbe Null ist. Ist dann L' der momentane Abstand, so sind die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = q \frac{x_2 - x_1}{L'}, \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = q \frac{x_1 - x_2}{L'} \text{ u. s. f.,}$$

wobei der Schwerpunkt des Systems zur Zeit $t = 0$ zum festen Anfangspunkt genommen wird. Diese Gleichungen lassen sich, indem man die relativen Coordinaten xyz von m_1 in Bezug auf den actuellen Schwerpunkt zum Anfangspunkt nimmt, führen auf

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mqx}{m_2 L'} \text{ etc.,}$$

wo $m = m_1 + m_2$. Sind die Componenten der wirkenden Kraft

proportional x, y, z, so geht die Bewegung in einer Ebene unveränderlicher Stellung, in welcher der momentane Schwerpunkt liegt, vor sich. Wählt man diese zur xy-Ebene, so fällt die Gleichung in z weg. Der Verfasser ermittelt nun die Bestandtheile, aus denen die Bewegung zusammengesetzt ist. Sie ergiebt sich als periodisch. Es sei E der Elasticitätscoefficient des Fadens, so dass

$$q = E\left(\frac{L'}{L} - 1\right), \quad L = \frac{m}{m_2} l.$$

Um den Schwerpunkt S in der Ebene der relativen Bewegung denke man mit l einen Kreis beschrieben. Die Bewegung beginne von einem beliebigen innern Punkt O in der beliebigen Richtung OB. Auf OB fälle man das Loth SA und verlege den Anfang der Bewegung nach A, nehme SA zur x-Axe und lasse die Amplituden v da beginnen. Dann verfolgt der materielle Punkt P mit der constanten Geschwindigkeit λ die halbe Sehne AB von der Zeit $t = T$ bis $t = T + d$, während v von 0 bis α wachse. Ueber B hinaus beschreibt P eine transcendente Curve BEB', symmetrisch zum grössten Radiusvector SE, ausserhalb des Kreises. In B' erreicht er den Kreis und geht mit seiner Endgeschwindigkeit λ auf der Sehne $B'B_1$, symmetrisch zu BA, weiter, in deren Mitte A_1 die Periode schliesst, so dass die Stücke $ABEB'A_1$, $A_1B_1E_1B'_1A_2$, $A_2B_2E_2B'_2A_3$ etc. congruent sind und mit gleichen Geschwindigkeiten durchlaufen werden. Es werden dann die Werthe der Variabeln in den Hauptpunkten übersichtlich in einer Tabelle zusammengestellt und ferner der geradlinige und krummlinige Theil der Bewegung einzeln betrachtet. Zum Schluss werden endlich noch 2 Fälle betrachtet, die durch die bei den obigen Untersuchungen gemachten Voraussetzungen ausgeschlossen waren. O.

R. Hoppe. Bewegung eines an einem Faden hängenden Stabes. Grunert Arch. LXII. 296-309.

Ein Faden, d. i. eine gewichtlose undehnbare Gerade, sei im einen Endpunkt fest und trage am andern einen Stab, d. i. eine starre Gerade mit beliebig vertheilter Masse. Der Befesti-

gungspunkt am Stabe sei beliebig, nur soll er nicht dessen Schwerpunkt sein. Auf den Stab wirkt allein die Schwere. In § 1 stellt der Verfasser die Bewegungsgleichungen auf. Zwei Integrale derselben sind bekannt, die Gleichung der constanten Flächengeschwindigkeitsprojection und die Gleichung der lebendigen Kraft, aus welcher letztere sich die 4 unabhängigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch partielle Diefferentiation ableiten lassen. Der Verfasser untersucht dann im § 2, unter welchen Bedingungen eine permanente Rotation stattfindet, indem er die Frage, wann der Stab oder seine Verticale beständig durch die Verticale gehen, fallen gelassen hat. Eine permanente Rotation kann nur in einer Rotation der beständig verticalen Ebene zwischen Faden und Stab mit constanter Geschwindigkeit bestehen. Es ergeben sich dabei 2 Fälle, die vom Verfasser besprochen werden. Im dritten Paragraphen wird die Bedingung für die Stabilität der verticalen Lage aufgestellt. Die Erscheinungen der Erfahrung werden, wie der Verfasser bemerkt, durch die Theorie nicht nach allen Richtungen erklärt. O.

L. Henneberg. Ueber die unendlich kleinen Schwingungen, welche ein Faden, der an dem einen Endpunkte befestigt und an dem anderen durch ein Gewicht belastet ist, unter dem Einfluss der Schwere und einer anfänglichen Gleichgewichtsstörung ausführt. Brioschi Ann. (2) IX. 58-67.

Bezeichnet man mit s die Bogenlänge, mit α die Masse der Längeneinheit und mit λ die Spannung eines biegsamen, unelastischen Fadens, auf welchen nur in der Richtung der z-Axe die Schwere wirkt, so ist die Bewegung desselben ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} ds - d\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ds - d\left(\lambda \frac{\partial y}{\partial s}\right) = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} ds - d\left(\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial s}\right) = \alpha y ds.$$

Dazu treten, wenn der eine Endpunkt $s = 0$ befestigt, der andere $s = l$ durch ein Gewicht von der Masse m belastet ist, die Grenzbedingungen:

$$x = 0, \; y = 0, \; z = 0 \quad \text{für } s = 0,$$

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial x}{\partial s} = 0, \quad m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial z}{\partial s} = mg \quad \text{für } s = l.$$

Der Verfasser behandelt die Integration dieser Gleichungen unter der Voraussetzung, dass der Faden sich nur wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt, dass also $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind, unter Beschränkung auf diese. In der weiteren Untersuchung werden die verticalen Schwingungen nicht weiter berücksichtigt, und beschränkt sich der Verfasser auf die horizontalen unendlich kleinen Schwingungen, wobei es auf die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ g(a - \alpha s) \frac{\partial u}{\partial s} \right\} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

hinauskommt unter der Grenzbedingung $u = 0$ für $s = 0$ und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad \text{für } s = l.$$

Diese Integration wird nun im § 2 der Arbeit mit Hülfe Bessel'scher Functionen erreicht, und dann zur Bestimmung der Constanten geschritten. § 3 und 4 enthalten die Behandlung der Grenzfälle, dass einmal kein schwerer Punkt am Ende des Fadens ist, zweitens die Masse des Fadens als unendlich klein gegen die Masse m des schweren Punktes am Ende $s = l$ betrachtet werden kann. O.

G. A. Oskamp. Prysvraag n^0 3. Nieuw Arch. IV. 60-83.

Beantwortung der Aufgabe: An einen Punkt der runden Fläche eines festen geraden kreisförmigen Cylinders mit horizontaler Axe ist das Ende eines vollkommen biegsamen und unelastischen Fadens von bestimmter Länge gebunden, während das

andere Ende mit einer massiven Kugel von gegebenem Gewichte beschwert ist. Wenn jetzt dieser Faden gespannt ist in einer schiefen Richtung, welche jedoch in einer Ebene senkrecht zur Axe des Cylinders gelegen ist, und dann dem Mittelpunkte der Kugel eine bestimmte Geschwindigkeit, senkrecht zur Richtung des Fadens und in der genannten Ebene, mitgetheilt wird, soll man die Bewegung der Kugel untersuchen und auch die Spannung des Fadens in jedem Momente der Bewegung bestimmen.

G.

H. W. L. Russell. On the occurrence of the higher transcendents in certain mechanical problems.
Messenger (2) VII. 136-139; VIII. 8-11.

Fortsetzung der Arbeit Messenger (2) VII. 18—21. s. F. d. M. IX. p. 364. Glr. (O.)

N. Joukovsky. Sur la percussion des corps.
Liouville J. (3) IV. 417-424.

Poinsot hat in seinen Arbeiten (Liouville J. 1857 und 1859) gezeigt, dass sich das Problem der Percussion eines Körpers und eines materiellen Punktes ohne Elasticität in speciellen Fällen auf die Percussion zweier Punkte zurückführen lässt. Die von ihm behandelten Fälle sind die, wo die Stossrichtung in der Ebene der beiden Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt liegt, und wo die Richtung senkrecht zu dieser Ebene ist. Der Verfasser zeigt in der vorliegenden Notiz, dass es, um das Problem vom Stoss zweier freier Körper zu behandeln, genügt, in den Punkten des Zusammenstosses sich gewisse Massen, die er *masses ramenées* nennt, concentrirt zu denken und dann den Stoss wie den zweier Massenpunkte zu behandeln. Letztere Aufgabe behandelt er zu Anfang der Notiz. O.

Philipps. Note sur un nouveau spiral réglant plat des chronomètres et des montres. C. R. LXXXVI. 26-31.

Der Verfasser bestimmt zunächst auf analytischem Wege den Schwerpunkt der Archimedischen Spirale von gegebener Länge mit einer Annäherung, welche den Forderungen der Praxis entspricht. Diese Archimedische Spirale muss bei der hier besprochenen Methode durch zwei Endcurven befestigt werden, welche sich den beiden Enden der Spirale tangential anschliessen. Der Isochronismus fordert dann eine solche Bestimmung dieser beiden Curven, dass der Schwerpunkt der Spirale immer auf der Axe des Balanciers liegt. Der Bestimmung dieser Curven mit einer den Forderungen der Praxis entsprechenden Genauigkeit ist die weitere Arbeit gewidmet. O.

H. Résal. Note sur le régulateur à boules de Mr. Andrade. Ann. des Mines (7) XIV. 325-326.

Beschreibung des Apparats und kurze theoretische Herleitung seiner Wirkung. O.

G. Marre. Étude comparée des régulateurs de vitesse, de pressions, de température et des régulateurs de toutes sortes. Ann. d. Mines (7) XIV. 450-546.

Die Arbeit enthält eine eingehende kritische Untersuchung der verschiedenen Regulatorensysteme, die zu dem Resultate führt, dass, alle Vortheile und Nachtheile abgewogen, der Watt'sche Regulator der empfehlenswertheste sei. Die Arbeit hat mehr technisches, als mathematisches Interesse. O.

F. van Rysselberghe. Déscription d'un régulateur parabolique, rigoureusement isochrone et dont on peut faire varier la vitesse de régime. Bull. de Belg. (2) XLVI. 883-892.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLVI. 878-879.

Das Princip des Apparates ist sehr einfach. Geometrisch

ist der Isochronismus vollkommen. Vom mechanischen Gesichtspunkt aus ist der Apparat aber zu complicirt.

Mn. (O.)

M. de Brettes. Formules relatives au percement des plaques de blindage en fer. C. R. LXXXVII. 549-551.

Der Verfasser hatte im Jahre 1870 Formeln aufgestellt über das Eindringen von Geschossen in Panzerwände (siehe F. d. M. II. p. 718). In der vorliegenden Note werden diese Formeln auf Grundlage der seitdem gemachten Versuche, namentlich derer in Spezzia, modificirt. O.

Tresca. Emboutissage cylindrique d'un disque circulaire. C. R. LXXXVII. 369.

Verfasser war auf der Ausstellung auf die Umformung von Kreisscheiben in Cylinder aufmerksam geworden und behandelt diese Umformung unter der Voraussetzung, dass der Inhalt der einzelnen Flächenelemente unverändert bleibt, und dass jede Cylinderseite aus einem Radiusstück gebildet wird. Er berechnet die Gleichung der Curven, welche aus einer ursprünglich geraden Linie entstehen und findet, dass dieselben auf dem vorgelegten Probestück wirklich aus eingegrabenen Linien entstehen, wodurch die Theorie also bestätigt wird. Verfasser behält sich vor diese Thatsache später unter einem allgemeinen Gesichtspunkte zu betrachten. Bn.

E. Terssen. Mémoire sur la résistance des canons frettés. Mém. de Liège. (2) VI.

Mn.

J. E. Hendricks. Note. Analyst V. 49-50.

Bemerkungen über die Frage: „Was ist am wirksamsten; wenn ein Bruch angebracht wird an der Spitze oder an der Seite eines Wagenrades in Bewegung?" Glr. (O.)

Weitere Lehrsätze und Aufgaben aus der Dynamik fester Körper von G. S. Carr, R. E. Riley, E. W. Symons, Townsend, J. R. White, R. F. Davis, H. Pollexfen, C. Bickerdike, J. L. Kitchin, J. O. Jelly, R. Rawson, G. Torelli, E. B. Elliott, W. J. C. Sharpe, Minchin finden sich Educ. Times XXIX. 87-88, 91-92, 108-109; XXX. 31, 72-74, 100-101, 105-106. O.

B. Hydrodynamik.

J. J. Müller. Einleitung in die Hydrodynamik. Bearbeitet und herausgegeben von L. Henneberg. Wolf Z. XXIII. 129-159, 242-265.

Der vorliegende Aufsatz sollte nach dem Plane des verstorbenen Verfassers das erste Capitel zu einem Lehrbuche der Hydrodynamik bilden. Da sich jedoch in den hinterlassenen Papieren über die Fortsetzung nur ein kurzes Programm vorgefunden hat, so hat der Herausgeber sich entschlossen, dieses erste Capitel für sich zu veröffentlichen. Dasselbe behandelt die Kinematik und namentlich die Theorie der Wirbelbewegungen incompressibler Flüssigkeiten. Der Verfasser beginnt mit der Betrachtung eines Flüssigkeitselements. Durch die Bewegung desselben erhalten die kleinen Theile höherer Ordnung neue Coordinaten, welche lineare Functionen der allgemeinsten Form von den ursprünglichen sind. Auf bekannte Weise wird dann gezeigt, wie man, falls diese Functionen gegeben sind, die Aenderungen der Coordinaten zerlegt in eine Verschiebung des ganzen Elements, eine Drehung, endlich eine Ausdehnung desselben. Führt man noch die Bedingung ein, dass die Flüssigkeit incompressibel ist, dass daher die räumliche Dilatation verschwindet, so kann man nicht nur die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit durch die der Translationsgeschwindigkeit, sondern mit Hülfe der Potentialtheorie (deren Hauptsätze kurz abgeleitet werden) auch umgekehrt die letzteren durch die ersteren aus-

drücken. Aus diesem Zusammenhang erkennt man sofort, dass die Abwesenheit von Rotationen gleichbedeutend damit ist, dass die Translationsgeschwindigkeiten ein Geschwindigkeitspotential φ besitzen. Analog lässt sich zeigen, dass, sobald nur Rotationen vorkommen, die Geschwindigkeitscomponenten derselben ein Potential ψ besitzen, das der Gleichung $\Delta\psi = 0$ genügt. Es werden dann die Stromlinien und Wirbellinien als Linien definirt, die überall senkrecht zu den Flächen $\varphi = \text{const.}$, resp. $\psi = \text{const.}$ stehen, also mit der Richtung der Strömung oder der Rotationsaxe zusammenfallen. Daran schliesst sich die Definition der Stromfäden und Wirbelfäden, und für diese ergeben sich dann die bekannten Sätze durch Anwendung des Green'schen Satzes auf die Functionen φ und ψ.

Es folgt endlich die Behandlung des Falles, in dem gleichzeitig Rotationen und Translationen vorhanden sind, und hier schliesst sich die Darstellung wesentlich an die von Helmholtz und Kirchhoff an. Sind auch die Resultate der Arbeit in keiner Weise neu, so ist doch die Darstellung klar und übersichtlich und damit wohl geeignet, in die Theorie der Wirbelbewegungen einzuführen. Eigenthümlich ist namentlich die Behandlung des Falles, wo nur Rotationen vorhanden sind, also die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit ein Potential besitzen.

Wn.

N. Joukowsky. Kinematik der flüssigen Körper. Capitel II.: Ueber die Strömungszustände der Flüssigkeiten. Capitel III.: Zusammensetzung und Zerlegung der Strömungen. Capitel IV.: Ueber die Beschleunigungen der Punkte der Flüssigkeit. Mosk. Math. Samml. X. (Russisch).

Fortsetzung der in den F. d. M. VIII. p. 610 besprochenen Arbeit. Diese Arbeit enthält eine ausführliche Auseinandersetzung der bis jetzt bekannten geometrischen Eigenschaften der Bewegung der Flüssigkeiten. Bw.

J. PURSER. On the applicability of Lagrange's equations to certain problems of fluid motion. Rep. Brit. Ass. 1878.

Csy.

E. J. NANSON. Note on hydrodynamics. Messenger (2) VII. 182-185.

In der Hydrodynamik kennt man seit Cauchy die Integralgleichungen

$$\text{(I.)} \qquad \frac{\xi}{\varrho} = \frac{\xi_0}{\varrho_0}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\eta_0}{\varrho_0}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{\varrho_0}\frac{\partial z}{\partial c}, \text{ etc.};$$

ferner sind von Stokes und Helmholtz die Gleichungen aufgestellt:

$$\text{(II.)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right) = \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ etc.}$$

Thomson endlich hat gefunden, dass der Werth des über den Umfang einer geschlossenen Curve, welche sich mit der Flüssigkeit bewegt, erstreckten Integrals

$$\int (udx + vdy + wdz)$$

in Bezug auf die Zeit constant ist. Aus diesem Satze folgt, wenn der Umfang der Curve unendlich klein wird und A, B, C die Projectionen der Curvenfläche auf die drei Coordinatenebenen bezeichnen, dass

$$\text{(III.)} \qquad A\xi + B\eta + C\zeta = A_0\xi_0 + B_0\eta_0 + C_0\zeta_0,$$

oder, was dasselbe, dass

$$\text{(IV.)} \qquad \frac{d}{dt}(A\xi + B\eta + C\zeta) = 0.$$

In einer früheren Arbeit (Messenger (2) VII. 41-42, vgl. F. d. M. IX. 674) hatte nun Lamb die Gleichungen (II.) aus (IV.) abgeleitet und umgekehrt. Hier zeigt Herr Nanson, dass ein ganz analoger Zusammenhang zwischen den Gleichungen (I.) und (III.) besteht. Also (IV.) ist äquivalent mit (II.), (III.) mit (I.)

Glr. (Wn.)

H. LAMB. On the conditions for steady motion of a fluid. Proc. L. M. S. IX. 91-92.

Man denke sich in einer bewegten Flüssigkeit eine Wirbellinie und alle durch die verschiedenen Punkte derselben hindurchgehenden Stromlinien. Auf der von diesen Stromlinien gebildeten Oberfläche muss, wenn die Bewegung der Flüssigkeit stationär sein soll, das Product $qw \sin\vartheta . r$ constant sein. Dabei ist q die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, ϑ der Winkel zwischen einer Strom- und Wirbellinie, r die Normale zwischen zwei unendlich nahen der oben definirten Flächen, w die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit. Diese Bedingung, die sich als Folgerung eines bekannten von Helmholtz herrührenden Satzes ergiebt, nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn die Bewegung nur von zwei Dimensionen abhängig oder um eine Axe symmetrisch ist. Wn.

CLIFFORD. Note on vortex-motion. Proc. L. M. S. IX. 26-27.

Das Problem der Wirbelbewegung kann, etwas verallgemeinert, so ausgesprochen werden: Gegeben ist die Ausdehnung und die Rotation in jedem Punkte einer bewegten Substanz; es soll die Translationsgeschwindigkeit in diesem Punkte gefunden werden. Mit Hülfe der Quaternionen wird hier eine Lösung dieses Problems gegeben. Wn.

W. M. HICKS. Fluid motion in a rotating semicircular cylinder. Messenger (2) VIII. 42-44.

Nimmt man den Mittelpunkt des Halbkreises (vom Radius a) zum Anfangspunkt, und einen der begrenzenden Radien zur Polaraxe, so hat das Geschwindigkeitspotential φ im Punkte r, ϑ den Werth:

$$\tfrac{1}{2} w r^2 \sin(2\vartheta) + \frac{wa^2}{4\pi}\Big[\Big\{\Big(\frac{r^2}{a^2}-\frac{a^2}{r^2}\Big)\cos 2\vartheta - 2\Big\}\log\frac{r^2+2a+\cos\vartheta+a^2}{r^2-3a+\cos\vartheta+a^2}$$
$$-2\Big(\frac{r^2}{a^2}-\frac{a^2}{r^2}\Big)\sin 2\vartheta . \operatorname{arctg}\frac{2ar\sin\vartheta}{a^2-r^2} - 4\Big(\frac{r}{a}+\frac{a}{r}\Big)\cos\vartheta\Big],$$

wobei w die Winkelgeschwindigkeit ist. Glr. (Wn.)

A. G. Greenhill. Fluid motion in a rotating quadrantal cylinder. Messenger (2) VIII. 89-105.

Im Anschluss an den Aufsatz von Hicks (vgl. das vorhergehende Referat) zeigt Herr Greenhill, dass allgemein für eine Flüssigkeit, die in einem cylindrischen Sector (dessen Grenzen $r=a$ und $\vartheta=\pm\alpha$ sind) um die Cylinderaxe mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotirt, das Geschwindigkeitspotential den Werth hat

$$\varphi = \tfrac{1}{4}\omega r^2 \frac{\sin 2\vartheta}{\sin 2\alpha} + 32\omega a^2\alpha^2 \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)\frac{\pi}{2\alpha}} \sin(2n+1)\frac{\pi\vartheta}{2\alpha}}{\{(2n+1)\pi-4\alpha\}(2n+1)\pi.\{(2n+1)\pi+4\alpha\}}.$$

Danach kann auch die Strömungsfunction ψ, die ja die conjugirte Function von φ ist, unmittelbar hingeschrieben werden.

Der Verfasser bringt dann den Ausdruck von $\psi+i\varphi$ in eine endliche Form mit Hülfe zweier Integrale und zeigt, dass, wenn $\frac{\pi}{2\alpha}$ eine ganze Zahl, wenn also der Winkel des Sectors ein Submultiplum von zwei Rechten ist, die Integration ausgeführt werden kann. In einem halbkreisförmigen Cylinder ist $\frac{\pi}{2\alpha}=1$, und es ergiebt sich das Resultat von Hicks. Ist der Sector ein Viertelkreis, also $\frac{\pi}{2\alpha}=2$, so nehmen die beiden ersten Glieder der Reihe für $\psi+i\varphi$ die unbestimmte Form $\infty-\infty$ an. Aus dem wahren Werthe folgen dann die endlichen Werthe von φ und ψ.

Es wird ferner die Bewegung eines mit Flüssigkeit gefüllten cylindrischen Sectors untersucht, der unter dem Einfluss der Schwerkraft um die feste Cylinderaxe endliche Schwingungen vollführt, und es wird für die beiden obigen Fälle $\alpha=\frac{\pi}{2}$ und $\alpha=\frac{\pi}{4}$ die Länge des äquivalenten mathematischen Pendels berechnet.

Endlich wird der Werth von φ und ψ für den Fall betrachtet, dass der Winkel des Sectors 60° ist, also $\frac{\pi}{2\alpha} = 3$; die ziemlich langen Ausdrücke dafür mögen hier übergangen werden, ebenso wie die endlichen Ausdrücke für den allgemeinen Fall, wo $\frac{\pi}{2\alpha}$ eine beliebige ganze Zahl ist.

Glr. (Wn.)

C. V. Coates. Vortex motion in and about elliptic cylinders. Quart. J. XV. 356-365, XVI. 81-89.

Einer der einfachsten Fälle, in denen sich die Wirbelbewegung einer Flüssigkeit behandeln lässt, ist der, wo die Bewegung von einer Coordinate unabhängig ist. Namentlich ist in letzter Zeit mehrfach die Bewegung der Flüssigkeit behandelt, wenn in einer von einem Kreiscylinder oder von einem Theil eines Kreiscylinders begrenzten Flüssigkeit ein einziger, der Cylinderaxe paralleler Wirbelfaden vorhanden ist. Mit Hülfe von Polarcoordinaten lässt sich dann die Strömungsfunction und damit die Geschwindigkeiten eines beliebigen Punktes leicht finden. (Vergl. die beiden vorhergehenden Referate). In der vorliegenden Arbeit werden nun die für Kreiscylinder gefundenen Resultate folgendermassen auf elliptische Cylinder übertragen. Statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y führe man die elliptischen Coordinaten ϑ, ω ein durch die Gleichungen

$$x = c.\cos\vartheta\,\frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2}, \quad y = c\cdot\sin\vartheta\,\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2}.$$

Hat man die Strömungsfunction für irgend einen Fall des Kreiscylinders durch die Polarcoordinaten r, θ ausgedrückt, so setze man ω statt $\log r$, ϑ statt θ in jenen Ausdruck ein; dann hat man die Strömungsfunction für einen elliptischen Cylinder. Auf diese Weise wird jene Function bestimmt, wenn ein Wirbelfaden in einer Flüssigkeit vorhanden ist, die sich ausserhalb eines elliptischen Cylinders in's Unendliche erstreckt, ferner wenn der Querschnitt des Cylinders eine durch die grosse Axe begrenzte halbe Ellipse ist, weiter für eine Flüssigkeit innerhalb eines von

zwei confocalen elliptischen Cylindern begrenzten Ringes oder innerhalb der Hälfte eines solchen. Einige andere Fälle, z. B. wenn die Ellipse in eine gerade Linie übergeht, werden angedeutet.

Die Behandlung eines Wirbelfadens innerhalb eines vollen elliptischen Cylinders ist nicht so einfach, da hier wegen der discontinuirlichen Aenderung von ϑ an der grossen Axe der Ellipse keine Uebertragung der Resultate des Kreiscylinders möglich ist. Hier wird durch directe Betrachtung für die Strömungsfunction zunächst der Logarithmus eines unendlichen Doppelproductes gefunden, das sich durch elliptische Functionen in endlicher Form ausdrücken lässt. Hinterher ergiebt sich dann, dass auch in den Brennpunkten die Geschwindigkeitscomponenten continuirlich und endlich sind. Wn.

H. Weber. Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Clebsch Ann. XIV. 173-207.

Das hier behandelte Problem ist das der Bewegung eines festen Körpers in einer unendlich ausgedehnten incompressiblen Flüssigkeit, unter der Voraussetzung, dass keine beschleunigenden Kräfte auf den Körper wirken, dass ferner der Körper hinsichtlich seiner Gestalt und Massenvertheilung drei zu einander rechtwinklige Symmetrieebenen besitzt, endlich unter einer beschränkenden Annahme über den Anfangszustand. Es ist, abgesehen von der letzten Beschränkung, derselbe Fall einer solchen Bewegung, von dem Clebsch (Clebsch Ann. Bd. III. p. 238, cfr. F. d. M. II. p. 733) durch Angabe des letzten Multiplicators gezeigt hat, dass er sich durch Quadraturen darstellen lasse. Eigenthümlich und lehrreich ist der Weg, auf dem der Verfasser zum Ziele gelangt. Den Ausgangspunkt bildet die Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlicher, speciell die Relationen zwischen den Quadraten von je vier Thetafunctionen und zwischen drei Producten von je zwei verschiedenen Thetafunctionen. Alle

diese Formeln werden, des besseren Verständnisses wegen, vollständig abgeleitet. Eine aufmerksame Betrachtung der genannten algebraischen Relationen lässt nun leicht erkennen, dass man unter den Quotienten zweier Thetafunctionen auf mehrfache Art neun solche auswählen kann, welche den Bedingungen für die Transformationscoefficienten zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme identisch genügen. Für die Theorie der Thetafunctionen selbst gewährt diese Darstellung den Vortheil, dass ein grosser Theil der für diese Functionen bestehenden Relationen auf die bekannten und geläufigen Formeln der rechtwinkligen Coordinatentransformation zurückgeführt wird. Ist nun ξ, η, ζ ein im Raume festes, x, y, z ein veränderliches Coordinatensystem, ist also

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$
$$\eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$
$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,$$

so drücke man die neun Coefficienten $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \gamma_3$ durch die Quotienten passend gewählter Thetafunctionen der Variablen v_1, v_2 aus und setze für diese Variablen lineare Functionen der Zeit, während α, β, γ noch unbestimmte Functionen der Zeit sind. Für das veränderliche Coordinatensystem lassen sich dann die Componenten p, q, r der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit ebenfalls durch Thetafunctionen ausdrücken. Von den so erhaltenen Ausdrücken wird nun gezeigt, dass sie den sieben Integralgleichungen genügen, die Kirchhoff für die Bewegung eines festen Körpers, auf den keine Kräfte wirken, in einer incompressiblen Flüssigkeit aufgestellt hat (siehe Kirchhoff Mechanik, Vorlesung 19, § 2), falls man noch eine der Constanten der Kirchhoff'schen Gleichungen verschwinden lässt, was ja nur eine specielle Voraussetzung über den Anfangszustand involvirt. Für die drei Thetamoduln ergiebt sich, damit sämmtliche Gleichungen befriedigt werden, nur eine Relation, so dass noch zwei von den ϑ-Moduln, sowie die zwei additiven Constanten in den linearen Functionen der Zeit zur Berücksichtigung des Anfangszustandes verfügbar bleiben.

Weiter wird nun der entgegengesetzte Weg zur Lösung desselben Problems eingeschlagen, indem die Integration der Diffe-

rentialgleichungen direct durch hyperelliptische Integrale bewerkstelligt wird. Es werden zu dem Zwecke α_1, α_2, α_3 zunächst durch zwei neue Variable x_1, x_2 ersetzt, so dass die Bedingung

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

identisch erfüllt wird.

$$\alpha_1^2 = \frac{(\delta_1 - x_1)(\delta_1 - x_2)}{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)}, \quad \alpha_2^2 = \frac{(\delta_2 - x_1)(\delta_2 - x_2)}{(\delta_2 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_1)},$$

$$\alpha_3^2 = \frac{(\delta_3 - x_1)(\delta_3 - x_2)}{(\delta_3 - \delta_1)(\delta_3 - \delta_2)}.$$

δ_1, δ_2, δ_3 sind noch zu bestimmende Constanten. Dann lassen sich p, q, r ebenfalls durch x_1, x_2 ausdrücken, und zwar algebraisch. Diese sechs Functionen p, q, r, α_1, α_2, α_3 lassen sich aber von den übrigen noch zu bestimmenden Functionen ganz trennen, und aus den für sie gültigen Gleichungen folgt:

$$\frac{dx_1}{R(x_1)} + \frac{dx_2}{R(x_2)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu}\, dt,$$

$$\frac{x_1\, dx_1}{R(x_1)} + \frac{x_2\, dx_2}{R(x_2)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}.\nu}{\mu}\, dt,$$

wobei

$$R(x) = \sqrt{-(\delta_1 - x)(\delta_2 - x)(\delta_3 - x)(\delta_4 - x)(\delta_5 - x)}$$

ist, während k, λ, μ, δ_4, δ_5 Constante sind. Weiter lassen sich auch β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, β und γ algebraisch durch x_1 und x_2 ausdrücken, während sich für α die Summe zweier hyperelliptischer Integrale der zweiten Gattung ergiebt.

Die Discussion der verschiedenen hinsichtlich der Constanten möglichen Fälle ergiebt, dass der oben (mit Hülfe der Thetafunctionen) behandelte Fall nur einer von vier ähnlichen gleich möglichen ist, die sich durch die Beschaffenheit des Anfangszustandes von einander unterscheiden. Jener Fall ist allerdings insofern der interessanteste von den vieren, als darin derjenige enthalten ist, in dem gar keine anfängliche Rotation vorhanden ist. Um nun in allen vier Fällen die sämmtlichen unbekannten Functionen vermittelst der Thetafunctionen durch die Zeit darzustellen, werden zum Schluss die obigen hyperelliptischen Integrale umgekehrt und die umgekehrten Functionen, sowie auch

die bei α vorkommenden Integrale der zweiten Gattung durch Thetafunctionen ausgedrückt. Auf die Einzelnheiten dieses Theils hier einzugehen, würde zu weit führen. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf die Arbeit selbst. Wn.

E. Beltrami. Intorno ad un caso di moto a due coordinate. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 199-210.

Im Anschluss an die Dirichlet'sche Arbeit über die Bewegung einer festen Kugel in einer unbegrenzten Flüssigkeit hat der Verfasser in den §§ 24-30 seiner: „Ricerche sulla cinematica dei fluidi“ (Mem. di Bologna (3) I., II., III., V.) ähnliche Probleme behandelt. Im § 31 derselben Arbeit hat er dann auch ein Beispiel der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit mit 2 Coordinaten behandelt, nämlich die Bewegung einer kreisförmigen oder elliptischen Scheibe in einer ebenen Flüssigkeitsschicht. Ein anderes Beispiel einer solchen Bewegung in 2 Coordinaten findet sich in dem vorliegenden Aufsatze bearbeitet, nämlich die Bewegung einer festen und sphärischen Kalotte auf ihrer mit einer Flüssigkeitsschicht bedeckten Kugel. O.

W. M. Hicks. On the motion of two cylinders in a fluid. Rep. Brit. Ass. 1878.

Es wird die Bewegung zweier unendlicher paralleler Cylinder in einer unbegrenzten Flüssigkeit untersucht, sowie die Bewegung eines Cylinders innerhalb eines andern, der mit Flüssigkeit gefüllt ist. Im zweiten Falle wird gezeigt, dass, wenn der innere Cylinder (mit dem Radius b) um die Axe des äusseren Pendelschwingungen vollführt, die Schwingungsdauer in folgendem Verhältniss verkürzt wird:

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{1}{M-M'}\left\{M+2M'\frac{L}{3-2x+x^2}\right\}.$$

Darin sind M und M' die Massen der Längeneinheit des Cylinders

und der Flüssigkeit, $x = \frac{a}{a-b}$, während L von dem Abstand der Axen abhängt.

In dem besondern Falle, wo der innere Cylinder den äusseren bei der Bewegung fortdauernd berührt, ist

$$L = 1+2x^2 \frac{d^2}{dx^2}\{\log \Gamma(1+x)\}.$$

Csy. (Wn.)

L. Geoffroy. Mémoire sur les résistances qu'éprouve une surface mobile de la part d'un milieu fluide dans lequel elle se meut. Ann. de l'Éc. N. (2) VII. 215-226.

Der Verfasser nimmt für den Widerstand F, den eine bewegte Fläche in einer ruhenden Flüssigkeit erfährt, das Newton'sche Gesetz als gültig an. Er denkt sich dann, was ja immer möglich, die Bewegung des Körpers während eines Zeitelements dt durch eine Rotation um eine gewisse Axe ersetzt, verbunden mit einer Translation parallel dieser Axe; er nimmt diese augenblickliche Rotationsaxe zur z-Axe, und gewinnt dadurch folgenden Ausdruck des Newton'schen Gesetzes

$$(1) \qquad F = k\frac{(v+wqx-wpy)^2}{p^2+q^2+1}\,dw_1.$$

Darin ist dw_1 das Oberflächenelement, auf welches jener Widerstand wirkt, x, y, z die Coordinaten des Elements, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, während v die Translationsgeschwindigkeit, w die Rotationsgeschwindigkeit um die momentane Rotationsaxe bezeichnet. Aus dem obigen Ausdruck werden nun mehrere Folgerungen abgeleitet. Zunächst folgt, dass der Widerstand in jedem Punkte der Fläche gleich Null ist, sobald

$$(2) \qquad py-qx = \frac{v}{w} = n.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung,

$$z = \varphi(x^2+y^2)+n.\text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)+C,$$

stellt also die Flächen dar, auf welche bei der hier betrachteten Bewegung kein Widerstand ausgeübt wird. Diese Flächen entstehen durch eine Schraubenbewegung der Curve $z = \varphi(x)$ um die z-Axe. Das Resultat gilt nicht blos für einen Moment, sondern für jeden, sobald die oben für ein Zeitelement angenommene Bewegung des Körpers eine dauernde ist. Uebrigens würde auch ein Gesetz, bei dem der Widerstand einer anderen Potenz der Geschwindigkeit proportional gesetzt würde, zu demselben Resultate führen.

Die Gleichung (2) gestattet ferner, auf jeder bewegten Oberfläche die Curven zu bestimmen, für deren Punkte der Widerstand gleich 0 ist. Ebenso ergiebt sich leicht eine Differentialgleichung für diejenigen Curven einer bewegten Oberfläche, welche einen constanten Widerstand erleiden, sowie eine Bestimmung der Punkte, für welche der Widerstand ein Maximum ist.

Den über den Widerstand gewonnenen Resultaten werden analoge Resultate für die Reibung an die Seite gestellt, indem die Reibung in jedem Punkte dem Quadrat der auf die Tangentialebene projicirten Geschwindigkeit proportional gesetzt wird.

Zum Schluss wird aus Gleichung (1) der Gesammtwiderstand berechnet, den eine Schiffsschraube parallel der z-Axe erleidet, falls die Gleichung der Oberfläche

$$z = k \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + C$$

ist. Wn.

Page. Résistance de l'air. Rev. d'art. XI. 345-350, 457-462.

Villié. Sur l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'action de corps quelconques. Liouville J. (3) IV. 257-264.

Das behandelte Problem ist das folgende: Ein fester Körper, der sich bewegt, ist ganz oder theilweise mit einer Flüssigkeit bedeckt. Auf ein Flüssigkeitstheilchen wirken 1) die Anziehung der übrigen Flüssigkeitstheilchen, 2) die Anziehung des festen Körpers, 3) die Anziehung irgend welcher ausserhalb liegender

Massen, alle nach dem Newton'schen Gesetz. Unter welcher Bedingung ist die Flüssigkeit in Bezug auf den Körper in relativem Gleichgewicht? Der Verfasser setzt zuerst, indem er Alles auf ein im Raume festes Coordinatensystem bezieht, die Gleichungen für die Beschleunigung eines Flüssigkeitstheilchens an, transformirt diese Gleichungen dann auf ein anderes, im Körper festes System, eliminirt endlich die anziehenden Kräfte mittelst der Bedingung

$$\Delta v = 0, \text{ resp. } \Delta v' = -4\pi\varrho,$$

wo v das Potential der äusseren anziehenden Kräfte, v' das der Anziehung der Flüssigkeitstheilchen ist. So ergiebt sich eine Gleichung, die nur den Flüssigkeitsdruck, die Dichtigkeit, die Constante der Anziehung und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um seine augenblickliche Drehungsaxe enthält. Letztere Grösse muss, falls relatives Gleichgewicht stattfinden soll, von der Zeit unabhängig sein, da die übrigen in der Gleichung vorkommenden Grössen es sein sollen. „Relative Ruhe der Flüssigkeit in Bezug auf den Körper kann daher nur stattfinden, wenn die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers constant ist.“ Nimmt man zwischen der Dichtigkeit ϱ und dem Drucke P noch die Gleichung $\varrho = \varphi(P)$ an, ist also die Dichtigkeit auch unabhängig von der Temperatur, so muss nicht nur die ganze Rotationsgeschwindigkeit constant sein, sondern auch ihre Componenten, also die Rotationsaxe ungeändert bleiben. Die oben genannte Hauptgleichung wird besonders einfach, wenn ϱ mit P proportional ist. Wn.

K. Zöppritz. Hydrodynamische Probleme in Beziehung zur Theorie der Meeresströmungen. Pogg. Ann. (2) III. 582-608; Phil. Mag. (3) VI. 192-211.

Der Verfasser geht aus von den hydrodynamischen Gleichungen mit Einschluss der Glieder, welche die Reibung darstellen, und wendet diese Gleichungen, sowie die bekannten Oberflächenbedingungen auf eine Flüssigkeit an, die durch zwei horizontale Ebenen begrenzt ist, und auf die von äusseren

Kräften nur die Schwere wirkt. Er nimmt an, dass nur in einer bestimmten, den Grenzflächen parallelen Richtung Bewegung stattfindet, dass diese Bewegung für alle Punkte derselben Horizontalschicht dieselbe ist, und dass an der untern Grenzfläche die Bewegung verschwindet, während an der oberen Grenzfläche ein constanter Druck herrscht. Unter diesen Annahmen vereinfachen sich die Gleichungen so, dass nur eine Function ω aus der Gleichung zu bestimmen bleibt

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

mit den Nebenbedingungen:

$$-\frac{\partial \omega}{\partial x} + p\omega = p\varphi(t), \quad \text{für } x = 0;$$
$$\omega = 0, \quad \text{für } x = h;$$
$$\omega = f(x), \quad \text{für } t = 0.$$

Darin ist x die verticale Coordinate, ω die Geschwindigkeit der Bewegung, p und α Constante, f und φ gegebene Functionen. Dies Problem stimmt nun mit einem bekannten Problem aus der Theorie der Wärmeleitung völlig überein. Der Verfasser wendet daher die für jenes Wärmeproblem bekannte Lösung an und findet durch Discussion derselben folgende Resultate: 1) Die von einer unveränderlichen Oberflächengeschwindigkeit herrührende stationäre Bewegung im Innern einer unbegrenzten Wasserschicht macht sich mit linear abnehmender Geschwindigkeit bis auf den Grund hinab bemerklich. 2) Alle zeitlich veränderlichen, periodischen oder unperiodischen Veränderungen der auf die Oberfläche wirkenden Kräfte pflanzen sich ausserordentlich langsam, die periodischen mit sehr rasch abnehmender Amplitude in die Tiefe hinein fort. 3) Der Einfluss des Anfangszustandes ist in gewissen Schichten noch sehr lange Zeit merkbar.

Zum Schluss wird das obige Problem dahin erweitert, dass ω von zwei Coordinaten x, y abhängt; für diesen Fall wird aber nur die stationäre Bewegung untersucht. Von Resultaten ist hier nur bemerkenswerth der Nachweis der Möglichkeit, dass zwei parallel derselben Geraden, aber in entgegengesetzten Richtungen

fliessende Ströme, ohne sich zu stören, an einander grenzen können. Wn.

E. Witte. Ueber Meeresströmungen. Pogg. Ann. (2) IV. 311-319.

Auf einen von Nord nach Süd (oder umgekehrt) fliessenden Wasserstrom wirkt die Erdrotation so, als würde ihm eine Geschwindigkeit in der Richtung West-Ost ertheilt. Diese die Erdrotation ersetzende Kraft soll nach des Verfassers Ansicht eine Niveauänderung der Flüssigkeit bewirken, derart, dass die Oberfläche der strömenden Flüssigkeit, auch wenn die Flüssigkeit nicht von festen Wänden eingeschlossen ist, gegen den Horizont geneigt ist. Diese hypothetische Neigung wird auf elementare Weise berechnet, und daran knüpfen sich weitere Folgerungen, die dem Referenten ebenso unberechtigt erscheinen, wie die Grundvorstellungen des Verfassers. Wn.

Lord Rayleigh. On progressive waves. Proc. L. M. S. IX. 21-26.

Bei der Fortbewegung einer aus vielen Einzelwellen zusammengesetzten Gruppe von Wellen ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gruppe verschieden von der einer einzelnen Welle; und zwar ist, wenn λ die Wellenlänge einer Einzelwelle mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V, wenn ferner $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, wenn endlich U die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gruppe ist:

$$U=\frac{d(kV)}{dk}.$$

Der Verfasser beweist dies zuerst durch Zusammensetzung zweier Wellen, für die k und V unendlich wenig verschieden sind. Er zeigt sodann an dem Beispiel einer rotationslosen Wellenbewegung in Wasser von endlicher Tiefe, dass $\frac{d(kV)}{dk}$ auch das Verhältniss der in der Zeiteinheit fortgepflanzten Energie zu der durchschnittlich in der Längeneinheit enthaltenen Energie dar-

stellt. Die Richtigkeit des letzten Resultats wird endlich für beliebige Arten von Wellen durch Annahme eines Widerstandes (Reibung) abgeleitet. Wn.

F. Koláček. Ueber den Einfluss des capillaren Oberflächendruckes auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wasserwellen. Pogg. Ann. (2) V. 425-430.

Die Grenzbedingungen für eine freie Flüssigkeitsoberfläche sind bekanntlich, wenn φ das Geschwindigkeitspotential,

$$f(x, y, z, t) = 0$$

die Gleichung der Fläche ist:

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Der Verfasser nimmt nun an, auf die freie Flüssigkeitsoberfläche wirke ausser dem Atmosphärendruck der capillare Druck und zwar nach demselben Gesetze, als wäre die Flüssigkeit in Ruhe. Er setzt also für den Druck auf die Oberfläche

$$(2) \qquad p = p_0 + p_1\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

Die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen ergeben ferner bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials und bei den gewöhnlichen Vernachlässigungen, falls die Flüssigkeit incompressibel ist und auf dieselbe nur die Schwerkraft wirkt,

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\varrho}p + gz = \text{Const.}$$

Wendet man diese Gleichung auf die Oberfläche an, setzt demgemäss für p den Ausdruck (2), so hat man damit die Gleichung der freien Oberfläche, und mit Hülfe von (1) ergiebt sich daraus die definitive Oberflächenbedingung. Dieselbe nimmt bei einer sehr geringen Krümmung unter gewissen Vernachlässigungen die Form an:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{p_1}{\varrho}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

für $z = 0$. Der Verfasser wendet diese Grenzbedingung (4) auf den Fall an, dass die Bewegung der Flüssigkeit nur von einer

horizontalen Coordinate abhängt. Ein particuläres Integral für das Geschwindigkeitspotential φ repräsentirt dann eine Wellenbewegung, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch einen Ausdruck ganz analog dem gewöhnlichen dargestellt wird, nur dass an Stelle der Constante g der Schwerkraft der Ausdruck tritt

$$g+\frac{p_1}{\varrho}\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

(λ die Wellenlänge). Der Einfluss der Oberflächenspannung ist somit einer Vermehrung der Schwerebeschleunigung gleichzustellen. Wn.

C. Niven. On a case of wave motion. Messenger (2) VIII. 75-80.

Der Verfasser bemerkt, dass Wellenbewegung im Wesentlichen ein Fall von continuirlicher Transformation von kinetischer und potentieller Energie sei, indem die kinetische, resp. potentielle Energie, welche eine Anzahl von Theilchen erwirbt, wenn die Welle über sie hingeht, herrührt von den Veränderungen in der potentiellen, resp. kinetischen Energie anderer oder von beiden Ursachen. Diese Betrachtungsart der Wellenbewegung stimmt im Allgemeinen mit der gewöhnlichen Methode zur Lösung von Fragen dieser Art mit Hülfe von Differentialgleichungen und willkürlichen Functionen überein. Es ist daher interessant, einen Fall zu finden, in welchem man von dieser Methode absehen und die successiven Transformationen, welche eintreten, verfolgen kann. Dies kann nun in dem Problem geschehen, welches der Verfasser im Detail in der vorliegenden Arbeit behandelt, und welches lautet: „Eine elastische Faser ist an einem Ende aufgehängt und in irgend einem Punkte zerschnitten. Man soll die aufeinanderfolgenden Bewegungen jedes Theilchens bestimmen.“ Glr. (O.)

J. Boussinesq. Complément à une étude intitulée: „Essai sur la théorie des eaux courantes“ (publiée dans les tomes XXIII., XXIV. du „Recueil des Sa-

vants étrangers), et à un mémoire „Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides" (inséré au tome XIII du Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2[e] série, 1868).
Liouville J. (3) IV. 335-377.

J. Boussinesq. Des pertes de charge qui se produisent dans l'écoulement d'un liquide, quand la section vive du fluide éprouve un accroissement brusque.
C. R. LXXXVII. 491-494.

Die erstgenannte Arbeit zerfällt in vier Abschnitte, die von einander unabhängige Gegenstände behandeln. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der regelmässigen Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit unter folgender Voraussetzung: Es seien u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten, so wird angenommen, dass v und w und in Folge dessen (wegen der Continuitätsgleichung) auch $\frac{\partial u}{\partial x}$ sehr klein seien. Dann sind auch $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$ unmerklich; der Druck zu irgend einer Zeit variirt ferner in einem Querschnitt senkrecht zu x ganz wie der hydrostatische Druck, und es bleibt nur eine partielle Differentialgleichung zwischen u und p übrig, aus der verschiedene Folgerungen gezogen werden.

Der zweite Abschnitt handelt von dem Einfluss der äusseren Reibung auf den Extinctionscoefficienten von periodischen oder nicht periodischen Wellen, falls die Wellenbewegung völlig continuirlich vor sich geht. Es wird gezeigt, dass an der äusseren Wand zwar die Bewegung verschwindet, also keine Arbeit geleistet wird, dass aber die äussere Reibung eine innere Reibung zur Folge hat, welche ihrerseits eine gewisse Totalarbeit zerstört.

Der dritte Abschnitt ist identisch mit der zweiten der oben genannten Arbeiten; sein Inhalt ist aus dem Titel jener Arbeit zu erkennen.

Der letzte Abschnitt endlich bespricht den Zusammenhang der normalen und tangentialen Druckcomponenten N und T mit

den Geschwindigkeitscomponenten u, v, w und berichtigt eine darauf bezügliche Stelle einer früheren Arbeit des Verfassers.

Die Resultate im Einzelnen, sowie die Methode ihrer Ableitung lassen sich nicht in Kürze wiedergeben. In dieser Hinsicht muss Referent auf die Arbeit selbst verweisen, deren Studium allerdings durch fortwährendes Zurückgreifen auf frühere Arbeiten des Verfassers sehr erschwert wird. Wn.

V. v. Lang. Experimente über die Reibung zwischen Wasser und Luft. Pogg. Ann. (2) III. 219-237.

In der rein experimentellen Arbeit wird eine angenäherte Theorie der Bewegung der von einem Wasserstrahl in einer Saugröhre mitgeführten Luft aufgestellt, indem die hydrodynamischen Gleichungen unter folgenden speciellen Voraussetzungen integrirt werden: die Bewegung der Luft ist 1) stationär, 2) nur abhängig von $r = \sqrt{y^2+z^2}$; 3) für $r = r_1$ und $r = r_2$ hat die Geschwindigkeit gegebene Werthe. Wn.

P. Boileau. Théorie des formules concernant l'action retardatrice des parois des courants liquides. C. R. LXXXVII. 48-52, 134-138.

Die beim Fortströmen des Wassers in einem Fluss oder einem Kanal verlorene Arbeit wird theils zur Ueberwindung des Widerstandes der festen Wände (äussere Reibung), theils zur Hervorbringung intramolecularer Bewegung verwandt (innere Reibung). Durch specielle Annahmen über die Art und Weise, wie der Widerstand wirkt, sowie über den auf die intramoleculare Bewegung verwandten Arbeitsbetrag wird die Formel aufgestellt:

$$R_1 i = \beta w^2 + \frac{\alpha}{\delta}.$$

Darin ist i das Gefälle, R_1 das Verhältniss des Querschnitts zum benetzten Umfang, w die Geschwindigkeit an der Wand, δ die Dichtigkeit des Wassers, α und β Constante, die irgendwie

von der Beschaffenheit der Wand abhängen. Aus obiger Formel wird eine andere abgeleitet, indem w durch die mittlere Geschwindigkeit ausgedrückt wird. Die so gewonnenen Formeln werden zum Schluss mit der Erfahrung verglichen. Nach des Referenten Ansicht beweist aber die Uebereinstimmung noch nichts für die Grundlagen der Theorie, vielmehr haben die aufgestellten Formeln wesentlich den Charakter empirischer Formeln.

Wn.

St. Venant. Rapport sur un mémoire de M. Popoff, intitulé: „Nouvelles recherches relatives à l'expression des conditions du mouvement des eaux dans les égouts.“ C. R. LXXXVII. 719-725.

Die Arbeit von Popoff, von der Herr St. Venant hier eine Inhaltsübersicht giebt, weist nach, dass die für den Ausfluss des Wassers durch Ausflussröhren gebräuchlichen Formeln mit der Erfahrung nicht genügend übereinstimmen. Der Verfasser macht auf verschiedene Punkte aufmerksam, die einer Aenderung bedürfen, ohne jedoch neue definitive Formeln aufzustellen.

Wn.

Oscar Smreker. Entwickelung eines Gesetzes für den Widerstand bei der Bewegung des Grundwassers. Z. dtsch. Ing. XXI.

Als Grundlage dienen die von A. Thiem an einem Brunnen in Strassburg gemachten Beobachtungen. Durch gleichmässige Wasserentnahme wurde der Spiegel im Brunnen auf einer gewissen Tiefe unter dem Grundwasserspiegel erhalten und in einer Anzahl Norton'scher Röhren, die in zwei senkrechten durch den Brunnen gehenden Axen symmetrisch vertheilt waren, die erzeugten Depressionen gemessen. Verfasser stellt zunächst die Relation auf:

$$\frac{h}{l} = \xi \frac{v^2}{2g},$$

wobei h die zur Ueberwindung der Widerstände auf der Strecke l

verbrauchte Druckhöhe bedeutet; ξ ist ein Coefficient, dessen Abhängigkeit von v bestimmt werden soll. Nachdem gezeigt ist, dass die auf die Beschleunigung verwandte Druckhöhe vernachlässigt werden kann, entwickelt der Verfasser für ξ die Näherungsformel:

$$\xi = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}$$

und zeigt, dass die so gefundenen Resultate hinreichend mit den Beobachtungen stimmen. Die bedeutenden Fehlerquellen der letzteren gewähren freilich einen ziemlichen Spielraum. Bn.

Th. Meyer. Ueber den Ausfluss des Wassers aus einem Gefässe unter Beachtung des Arbeitsverlustes durch den freien Fall des Wassers. Z. dtsch. Ing. XXII. 145-152, 241-270, 289-298.

Bechtolsheim. Ueber Wasserläufe. Z. dtsch. Ing. XXII. 477-478.

Erstere Abhandlung enthält die Betrachtung einer grossen Anzahl von Fällen des Wasserausflusses, bei welchem das Wasser Röhren von wechselnder Weite passirt. Als Grundlage dient eine in Schlömilch's Zeitschr. Bd. I. gegebene Theorie. Gegen diese wendet sich die in der zweiten Abhandlung enthaltene Kritik, welche nachweist, dass man die in einem fliessendem Strom enthaltene lebendige Kraft nicht nach der mittleren Geschwindigkeit bemessen darf. Bn.

P. Richelmy. Alcune osservazioni intorno alla teoria data da Poncelet per ispegare i fenomeni conosciuti col nome di resistenza dei fluidi e saggio di un calcolo numerico. Atti di Torino XIII. 730-748.

Die Arbeit ist ihrem Inhalte nach wesentlich physikalisch interessant. Eine mathematisch-theoretische Herleitung der aufgestellten Formeln giebt sie nicht. O.

A. FLIEGNER. Nachtrag zu meiner letzten Veröffentlichung: „Versuche über das Ausströmen der atmosphärischen Luft durch gut abgerundete Mündungen."
Civiling. XXIV. 39-48.

E. HERRMANN. Bemerkungen zu A. Fliegner's neueren Versuchen und Ansichten über den Ausfluss der Luft.
Civiling. XXIV. 47-56.

A. FLIEGNER. Entgegnung auf E. Herrmann's Bemerkungen zu meinen Luftausfluss-Versuchen.
Civiling. XXIV. 251-256.

A. FLIEGNER. Versuche über das Ausströmen der atmosphärischen Luft durch Mündungen in dünner Wand. Civiling. XXIV. 401-432.

Fortsetzung der Discussion, die in Bd. IX. p. 681 erwähnt wurde. Theoretisch wesentlich neue Gesichtspunkte werden dabei nicht zu Tage gefördert. O.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

C. NEUMANN. Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig. Teubner.

Ausführliches Referat des Verfassers in Clebsch Ann. XIII. 255.

Das erste Capitel dieser Schrift enthält einige Vervollständigungen und Vereinfachungen der allgemeinen Green-Gauss'schen Theorie, sowie auch die Uebertragung derselben auf den Fall der Ebene, d. i. auf den Fall des logarithmischen Potentials. Auch werden die von Gauss und Green gegebenen Beweise hin und wieder durch andere ersetzt, die von grösserer Strenge sind.

Das zweite und dritte Capitel enthalten einige Anwendungen der Theorie, so z. B. folgende elektrostatische Sätze:

1. Die elektrische Dichtigkeit auf einem gegebenen Conductor ist (falls keine äusseren Kräfte influiren) stets monogen, d. h. an allen Stellen der Oberfläche von einerlei Vorzeichen.

2. Sind zwei Conductoren beliebig geladen, so wird (falls keine äusseren Kräfte influiren) immer wenigstens auf einem derselben eine monogene Vertheilung anzutreffen sein. Sind insbesondere die beiden Conductoren mit gleich grossen und (dem Vorzeichen nach) entgegengesetzten Ladungen versehen, so finden auf beiden monogene Vertheilungen statt.

3. Sind beliebig viele Conductoren mit beliebigen Ladungen gegeben, so wird (falls keine äusseren Kräfte influiren) immer wenigstens auf einem derselben eine monogene Vertheilung stattfinden, u. s. w.

Im vierten Capitel findet man die Theorie der Doppelbelegungen, namentlich die Discontinuitäts-Untersuchungen des von einer solchen Doppelbelegung ausgeübten Potentials. Dass diese (bisher vollständig vernachlässigte) Theorie der Doppelbelegungen derjenigen der einfachen Belegungen gleichberechtigt zur Seite steht, erkennt man am einfachsten durch einen Blick auf die Green'schen Sätze. Bezeichnet z. B. σ eine geschlossene Fläche, $d\sigma$ ein Element derselben, ferner ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale, und bezeichnet endlich V das Potential irgend welcher ausserhalb σ gelegener Massen, so gilt nach einem Green'schen Satz für jedweden innern Punkt i die Formel:

$$V_i = \frac{1}{4\pi}\iint\left(V\frac{\partial T}{\partial \nu} - T\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)d\sigma,$$

wo T die reciproke Entfernung des Punktes i vom Elemente $d\sigma$ vorstellt. Die Formel aber sagt aus, dass V_i angesehen werden kann als die Summe zweier Potentiale, von denen das eine,

$$-\frac{1}{4\pi}\iint T\frac{\partial V}{\partial \nu}\,d\sigma,$$

herrührt von einer gewissen auf der Fläche σ ausgebreiteten einfachen Belegung, während das andere

$$+\frac{1}{4\pi}\iint V\frac{\partial T}{\partial \nu}\,d\sigma$$

herrührt von einer gewissen ebenfalls auf der Fläche σ ausge-

breiteten Doppelbelegung. Auch ist die Theorie der Doppelbelegungen von besonderer Wichtigkeit für die im fünften Capitel entwickelte Methode des arithmetischen Mittels. Diese bereits im Jahre 1870 in ihren Hauptumrissen vom Verfasser angegebene Methode (vgl. dieses Jahrb. Bd. III. p. 493) wird hier zum ersten Mal in ausführlicher Weise exponirt. Ohne auf diese Methode hier genau eingehen zu wollen, mag nur bemerkt sein, dass man mittelst derselben denjenigen Existenzbeweis, der gewöhnlich durch das Dirichlet'sche Princip absolvirt zu werden pflegt, für eine grosse Anzahl von Flächen und Curven mit wirklicher Strenge zu liefern im Stande ist.

Das sechste, siebente und achte Capitel enthalten einige sich anschliessende Untersuchungen. So z. B. wird im achten Capitel die Methode des arithmetischen Mittels für den Fall explicirt, dass die auf der Oberfläche, resp. auf der Curve vorgeschriebenen Werthe mit irgend welchen Unstetigkeiten behaftet sind.

Endlich findet man im neunten Capitel gewisse Methoden, die (wenigstens ihrer Tendenz nach) verwandt sind mit den schon von Murphy angegebenen combinatorischen Methoden.

Nn.

C. Neumann. Neue Methode zur Reduction gewisser Potentialaufgaben. Leipz. Ber. 1878. 1-9.

C. Neumann. Ueber zwei von Green gegebene Formeln. Leipz. Ber. 1878. 10-12.

Nn.

Despeyraux. Théorèmes généraux du potentiel. Mém. de Toul. (7) VIII. 221-242.

J. Delsaux. Sur la démonstration de l'équation

$$\Delta V = -4\pi\varrho.$$

Soc. scient. Brux. II. B. 99-102.

P. Mansion. Rapport sur ce mémoire. Soc. scient. Brux. II. A. 67.

Man kann den Beweis auf den Fall reduciren, dass der Körper eine beliebig kleine Kugel ist, deren Dichtigkeit im Centrum gleich Null ist, falls der Körper heterogen. Dann hat man

$$\int \Delta V dv = \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma,$$

wo V das Potential, v das Volumen, σ die Oberfläche, n die Normale der kleinen Kugel ist. Aber die Theorie der Anziehung ergiebt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi \int \varrho dv,$$

wo ϱ die Dichtigkeit ist. Daraus folgt $\Delta V = -4\pi\varrho$, wenigstens wenn ΔV nicht in jedem Punkte der Kugel sein Zeichen wechselt.

Mn. (Wn.)

A. Wassmuth. Zur Theorie des Flächenpotentials. Carl Rep. XIV. 428-430.

Zum Beweise des Satzes über die Discontinuität, welche die normale Anziehungscomponente einer mit Masse belegten Fläche beim Durchgang des angezogenen Punktes durch die Fläche erfährt, ersetzt der Verfasser das den Fusspunkt der betrachteten Normale umgebende kleine Flächenstück durch die Scheitelgegend desjenigen elliptischen (resp. hyperbolischen) Paraboloids, das der gegebenen Fläche möglichst nahe kommt. Für das Paraboloid ergiebt sich der Satz leicht. Wn.

E. Mathieu. Réflexions au sujet d'un théorème d'un mémoire de Gauss sur le potentiel. Borchardt J. LXXXV. 264-269.

Die „Réflexions" beziehen sich auf den von Gauss gegebenen Beweis für den Satz, dass man einer geschlossenen Fläche stets eine Massenbelegung ertheilen könne, deren Potential V auf der Fläche vorgeschriebene Werthe U besitzt. Der Beweis stützt sich bekanntlich auf die Existenz eines Minimums von

$$\Omega = \int (V-2U) m ds,$$

wo die Integration über alle Massenelemente mds der Flächenbelegung zu erstrecken ist. Aus dem vorliegenden Aufsatze nun ist hier hervorzuheben erstens der Satz, dass das Potential einer solchen Belegung auf sich selbst immer positiv ist, so lange m endlich, auch wenn m positive und negative Werthe besitzt, zweitens der Nachweis, dass die Bedingung $V-U=0$ bei beliebiger, $V-U=\text{const.}$ bei gegebener Gesammtmasse immer zu einem wirklichen Minimum von Ω führt. B.

E. Beltrami. Intorno ad alcune proposizioni di Clausius nella teoria del potenziale. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 13-27, N. Cim. (3) IV. 35-53.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit dem gegenseitigen Zusammenhange zwischen gewissen Formeln für die Transformation dreifacher Integrale in zweifache und umgekehrt, Formeln, auf denen eine Reihe von Haupttheoremen der Potentialtheorie in den Arbeiten von Gauss, Clausius und Riemann beruht. Da eine auszugsweise Darstellung der gegebenen Entwickelungen nicht möglich ist, so sei hier nur erwähnt, dass als Quelle dieser Theoreme die beiden Relationen

$$\int \frac{\partial F}{\partial u}\, d\tau = \int F \frac{\partial u}{\partial n}\, d\omega,$$

$$\int \frac{\partial F}{\partial r}\, d\tau = -\int F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\omega - \sigma F_0$$

anzusehen sind, wo F eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z oder der Polarcoordinaten r, ϑ, φ; u eine der Coordinaten x, y, z; $d\tau$ Element des Raumes τ; $d\omega$ Element der Begrenzung ω von τ; ∂n Element der Normale in $d\omega$, nach aussen positiv; F_0 Werth von F im Nullpunkte ($r=0$); σ die scheinbare Grösse von ω, gesehen vom Nullpunkte aus. Ausserdem werden in ähnlicher Weise die analogen Beziehungen zwischen Ebenen- und Randintegralen behandelt. B.

E. Beltrami. Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 668-680.

Gegeben ein Rotationspotential $V(x, y, z)$, d. h. ein Potential, das sich als Function von z und $u = \sqrt{x^2+y^2}$ allein darstellen lässt, dann soll $W(z, u)$ zu V associirt heissen, wenn

$$\frac{\partial W}{\partial u} = u\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = -u\frac{\partial V}{\partial u}.$$

$W =$ constans ist die Gleichung der Kraftlinien zu V. Es gelten folgende Relationen:

$$dW = u\left(\frac{\partial V}{\partial z}du - \frac{\partial V}{\partial u}dz\right), \qquad dV = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial W}{\partial u}dz - \frac{\partial W}{\partial z}du\right);$$

ferner kann man ansetzen

$$V = \frac{\partial V_1}{\partial z}, \quad W = -u\frac{\partial V_1}{\partial u}; \qquad V = \frac{1}{u}\frac{\partial W_1}{\partial u}, \quad W = \frac{\partial W_1}{\partial z},$$

wo V_1 und W_1 zwei Functionen derselben Art, wie V und W bedeuten und W_1 zu V_1 associirt ist. Nach Erläuterung dieser Relationen an zwei einfachen Beispielen wird allgemein die Function U aufgesucht, durch deren partielle Ableitungen sich V und W linear ausdrücken lassen. Es ergiebt sich

$$dU = Vdw + Wdv,$$

wo v und w zwei Functionen derselben Art, wie V und W sind. Die weiteren Abschnitte enthalten Consequenzen aus diesen Beziehungen, sowie die Aufstellung analoger Relationen bei Einführung von Polarcoordinaten, nebst Beispiel. B.

E. Beltrami. Alcuni punti della teoria del potenziale. Rend. di Bol. 1877-1878. 162-168.

A. Wangerin. Ueber die Reduction der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Berl. Monatsber. 1878. 152-166.

Es ist ein Körper und eine dreifach orthogonale Flächenschaar mit den Parametern $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ gegeben, der die Begrenzung des Körpers angehört, dann lassen sich in gewissen Fällen Particularlösungen von $\Delta V = 0$ in der Form $\lambda R R_1 R_2$ aufstellen, wo R, R_1, R_2 Functionen von den $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ allein mit zwei willkürlichen Constanten sind, während λ eine allen Particularlösungen gemeinsame Function aller drei Parameter ohne willkürliche Constante bedeutet. In der vorliegenden Abhandlung wird nun die Frage nach der Gestalt der Körper, welche solche Particularlösungen zulassen, allgemein für den Fall beantwortet, dass die Körperbegrenzung und die beiden Schaaren ϱ und ϱ_1 Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe sind. Als Resultat ergiebt sich zunächst folgendes: Die rechtwinkligen Coordinaten x, r eines Punktes der Meridiancurve müssen mit den Parametern t, u der orthogonalen Meridiancurvenschaaren durch eine Gleichung von der Form $x + ir = F(t + iu)$ zusammenhängen, ferner muss F so beschaffen sein, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{r^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right\} = \frac{1}{r^2}\{F'(t+iu) + F(t-iu)\}$$

die Form $\varphi(t) + \psi(u)$ annimmt. Diese Bedingungen waren schon von Hrn. C. Neumann als hinreichend erkannt worden, wesentlich ist jedoch, dass sie hier auch als nothwendig nachgewiesen werden. Die weitere Verfolgung dieser Bedingungen führt dann nach Elimination des Arguments $t - iu$ zu dem eleganten Resultat, dass F eine elliptische Function von $t + iu$ sein muss. Hieraus folgt dann weiter, dass die allgemeinste Form der gesuchten Curven durch die Gleichung

$$(x^2 + r^2)^2 + Ax(x^2 + r^2) \pm B^2x^2 \pm C^2r^2 + E^2x = \pm D^4$$

gegeben ist, welche durch die Substitution

$$x + ir = \frac{\alpha + \beta(x_1 + ir_1)}{\alpha' + \beta'(x_1 + ir_1)}$$

aus der Form

$$(x_1^2 + r_1^2)^2 + Ax_1^2 + Br_1^2 = \pm D$$

hervorgeht. B.

A. Wassmuth. Note über den Ausdruck für das innere Potential eines homogenen Ellipsoids. Grunert Arch. LXII. 448.

Der für das genannte Potential hergeleitete Ausdrucklautet:

$$2\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}\left\{(x^2-\alpha)\frac{\partial P_0}{\partial\alpha}+(y^2-\beta)\frac{\partial P_0}{\partial\beta}+(z^2-\gamma)\frac{\partial P_0}{\partial\gamma}\right\};$$

α, β, γ sind die Quadrate der Halbaxen und P_0 der Werth des Potentials im Mittelpunkte des Ellipsoids. B.

Laguerre. Sur l'attraction qu'exerce un ellipsoide homogène sur un point extérieur. C. R. LXXXVI. 1257-1259.

Durch Anwendung der bekannten Formel

$$\frac{2\pi}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{A+Bi\cos\varphi+Ci\sin\varphi}$$

wird das dreifache Integral für das Potential V des homogenen Ellipsoids

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

in einem äusseren Punkte (x, y, z) zunächst in ein vierfaches verwandelt, bei dem sich jedoch durch eine einfache geometrische Betrachtung sofort zwei Integrationen ausführen lassen, so dass man, abgesehen von einem constanten Factor, für V den Ausdruck

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\frac{(1-t^2)\,dt\,d\varphi}{x+iy\cos\varphi+iz\sin\varphi-t\sqrt{(a^2-b^2)+(b^2-c^2)\sin^2\varphi}}$$

erhält, dessen Integration nach t sich ohne Schwierigkeiten ausführen lässt. Zur völligen Strenge dieses an sich einfachen Verfahrens würde es allerdings wegen der auftretenden complexen Grössen erforderlich sein, die etwas weitläufige Unterscheidung der verschiedenen in Bezug auf Vorzeichen etc. möglichen Fälle durchzuführen. B.

G. W. F. BAEHR. Note sur l'attraction. Versl. en Mededeel. XIII. 145-160; Arch. Néerl. XIII. 197-212.

Diese Notiz hat zwei Abschnitte. Im ersten wird ausgegangen von den bekannten Ausdrücken für die Anziehung eines homogenen Umdrehungsellipsoides auf einen Punkt seiner Oberfläche und daraus die Fläche abgeleitet, welche erzeugt wird durch die Rotation der Curve, die orthogonal zur Resultante der Attraction ist. Die Rechnung zeigt, dass diese Curve eine Ellipse ist, deren Axen mit der Axe des Meridians des Ellipsoids zusammenfallen.

Im zweiten Abschnitte findet man einige Betrachtungen über die Attraction eines Ringes auf einen Punkt seiner Revolutionsaxe. Das Resultat wird auf elliptische Integrale zurückgeführt.

G.

F. TISSÉRAND. L'attraction des sphéroides elliptiques homogènes. Mém. de Toul. (7) VII. 325-331.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

N. Oumoff. Ueber fictive Wechselwirkungen zwischen Körpern, die sich in einem Medium von constanter Elasticität befinden. Mosk. Math. Samml. IX. (Russisch).

P.

J. Jewnewitzsch. Ueber das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte und dessen Anwendung zur Bestimmung der inneren Spannungen in elastischen Systemen. Ber. d. Techn. Inst. zu St. Petersb. 1877.

P.

G. Helm. Zu Riemann's Gravitationstheorie. Schlömilch Z. XXIII. 261-263.

In Riemann's „Neue mathematische Principien der Naturphilosophie“ (Riemann's Werke p. 502) findet sich der Satz: „Nimmt man an, dass der raumerfüllende Stoff eine incompressible homogene Flüssigkeit ohne Trägheit sei, und dass in jedes ponderable Atom in gleichen Zeiten stets gleiche, seiner Masse

proportionale Mengen einströmen, so wird offenbar der Druck, den das ponderable Atom erfährt, *der Geschwindigkeit der Stoffbewegung an dem Orte des Atoms proportional sein.*" Der Verfasser der vorliegenden Notiz zeigt nun durch Anwendung bekannter Sätze der Potentialtheorie, dass die im obigen Citat schräg gedruckten Worte heissen müssen: „dem Newton'schen Potentiale in dem Orte des Atoms proportional sein."

Wn.

H. F. Weber. Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion. Wolf Z. XXIII. 325-366.

Nach einer von Fick aufgestellten Hypothese (Pogg. Ann. XCIV.) ist das von der Hydrodiffusion befolgte Elementargesetz von derselben Form, wie das von Fourier für die Wärmeleitung in festen Körpern aufgestellte. In Folge dessen muss die Concentration z, falls sie nur von einer Dimension abhängig ist, der partiellen Differentialgleichung genügen

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

wobei k die Diffusionsconstante ist. Um nun die Richtigkeit des Elementargesetzes zu prüfen, was bisher nicht in genügender Weise geschehen, wird in der vorliegenden Arbeit die Gleichung (1) für zwei verschiedene Arten von Anfangs- und Grenzbedingungen integrirt; sodann wird aus der so ermittelten Concentration die elektromotorische Kraft berechnet, die zwischen zwei an den Enden des Diffusionsgefässes angebrachten Zinkplatten in Folge des Concentrationsunterschiedes beider Enden entsteht; diese berechnete elektromotorische Kraft wird endlich mit der beobachteten verglichen. So grosses Interesse diese Methode von physikalischem Gesichtspunkte aus hat, enthält sie doch mathematisch nichts Neues, da die angewandten Integrationsmethoden aus der Theorie der Wärmeleitung bekannt sind.

Wn.

S. Canevazzi. Studi geometrici sull' equilibrio molecolare. Rend. di Bologna 1877. 138-139; Mem. di Bologna (3) VII. 194-233.

Nach einer Recapitulation der Reciprocitätsbeziehungen zwischen Seil- und Kräftepolygon, wendet der Verfasser dieselben an auf ein ebenes System von materiellen Punkten, die auf einander mechanische Einwirkungen ausüben. Die Intensitäten und Richtungen der Kräfte, welche auf ein Flächenelement wirken, werden dargestellt durch die conjugirten Halbmesser von Kegelschnitten. Sind alle Kräfte einer Art (nur Druck oder nur Zug), so ist die Curve eine Ellipse, im anderen Falle besteht sie aus 2 conjugirten Hyperbeln, von denen die eine Druck-, die andere Zugspannungen angiebt; die Asymptoten sind die Richtungen, in denen nur Tangentialkräfte (Abscheerungen) wirken. Auf Grund der projektivischen Eigenschaften lassen sich die erforderlichen Constructionen alle mit Hilfe eines Kreises ausführen. Die gefundenen Gesetze werden auf den Raum ausgedehnt, und es wird gezeigt, wie die Bedingungen des molecularen Gleichgewichtes elastischer Körper, der Erdmassen, der Flüssigkeiten daraus abgeleitet werden können. Bn.

O. E. Meyer. Ueber die elastische Nachwirkung. Pogg. Ann. (2) IV. 249-268.

Der Verfasser bespricht die verschiedenen zur Erklärung der elastischen Nachwirkung aufgestellten Theorien. Die vom Verfasser selbst früher aufgestellte Theorie (Annahme einer inneren Reibung) giebt Folgerungen, die jedenfalls mit der von W. Weber entdeckten Erscheinung der elastischen Nachwirkung nicht identisch sind [cf. F. d. M. VI. 647]. Boltzmann's Theorie (cf. F. d. M. VI. 648, VIII. 639) besitzt einen hohen Grad von Allgemeinheit, aber auch von Unbestimmtheit. Nach Meyer's Ansicht soll diese Theorie ausserdem den atomistischen Hypothesen widersprechen. Neesen's Theorie (s. F. d. M. VIII. p. 639) sei ferner als eine blosse Beschreibung, nicht als eine Erklärung der Thatsachen

anzusehen. Zum Schluss wird eine Ansicht von Kohlrausch erörtert, wonach zur Erklärung der in Frage stehenden Erscheinungen die Bewegungen herangezogen werden, die nach der kinetischen Wärmetheorie jedes Theilchen um seine Gleichgewichtslage macht. Diese Ansicht versucht Herr Meyer nun mathematisch zu formuliren und gelangt durch mehrere, dem Referenten zum Theil ziemlich willkürlich erscheinende Annahmen dazu, statt der einfachen Elasticitätsgleichung für die Schwingung eines Theilchens

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dt^2} = \mu \frac{d^2u}{dx^2}$$

die folgende zu setzen:

$$\varepsilon \frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dt^2} = \mu \frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} + \eta \frac{du}{dx} \frac{d^3u}{dx^2 dt} + \zeta\varepsilon \frac{du}{dt} \frac{d^2u}{dx\,dt}.$$

Dabei ist u der Abstand von derjenigen Lage, für die $\frac{du}{dt} = 0$ ist. Die letzte Gleichung wird integrirt unter der Annahme, dass u eine lineare Function von x ist. Wn.

L. Boltzmann. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Pogg. Ann. (2) V. 430-432.

Herr O. E. Meyer hatte gegen Boltzmann's Theorie der elastischen Nachwirkung den Einwand erhoben, dieselbe stände in Widerspruch mit den bisher allgemein verbreiteten Anschauungen der Atomtheorie (cf. das vorhergehende Referat). Dies wird von Herrn Boltzmann bestritten, indem er erörtert, dass die Gruppirung der fortwährend in Bewegung befindlichen Molecüle nicht blos von den momentanen, sondern auch von den vorhergegangenen Zuständen des Körpers abhängen könne; und die verschiedene Gruppirung modificire auch die elastischen Kräfte. Allerdings scheine seine (Boltzmann's) Annahme über den Einfluss der Gruppirungsänderung auf die elastischen Kräfte nicht überall zutreffend zu sein. Wn.

E. Warburg. Ueber das Gleichgewicht eines Systems ausgedehnter Molecüle und die Theorie der elastischen Nachwirkung. Pogg. Ann. (2) IV. 232-249.

Der vorliegende Aufsatz ist ein Auszug aus einer Arbeit, die der Verfasser in den Berichten der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg veröffentlicht hat. Letztere hat den Zweck, die von Wilh. Weber zur Erklärung der elastischen Nachwirkung aufgestellte Hypothese mathematisch zu formuliren. Nach Weber rührt die elastische Nachwirkung von einer Drehung der kleinsten Theile um ihre Schwerpunkte her. Es wird deshalb hier folgende Aufgabe gestellt: Gegeben ist ein System beliebig gestalteter, gleicher, starrer Molecüle, deren Schwerpunkte im natürlichen Zustande gleichförmig angeordnet sind; ferner sind gegeben die Verschiebungen der Schwerpunkte für einen Zustand, der von dem natürlichen unendlich wenig verschieden ist. Es sollen erstens die zum Schwerpunkt relativen stabilen Gleichgewichtslagen der Molecüle für diesen Zustand gefunden werden. Zweitens sollen die Spannungen für den Fall, dass die Molecüle in ihren stabilen Gleichgewichtslagen ruhen, berechnet und verglichen werden mit den Spannungen für den Fall, dass bezüglich der Einstellung der Molecüle an jeder Stelle keine Richtung des Raumes bevorzugt ist. Diese Aufgabe wird gelöst durch Entwickelung des Potentials des Systems in Bezug auf ein beliebiges seiner Molecüle, wobei vorausgesetzt wird, dass die linearen Dimensionen der Molecüle unendlich klein sind gegen den Abstand ihrer Schwerpunkte. In dem vorliegenden Auszuge sind nur die Resultate, nicht die Entwickelungen selbst, kurz mitgetheilt. Diese Resultate werden dann angewandt auf die Berechnung der stabilen Gleichgewichtslagen bei der Torsion und Dehnung eines Drahtes von kreisförmigem Querschnitt. Die Einzelnheiten dieser Anwendung übergehen wir hier und bemerken nur noch, dass nach des Verfassers eignen Worten die von ihm verfolgte Hypothese noch nicht soweit entwickelt ist, dass quantitative Bestimmungen aus derselben abzuleiten wären.

Zum Schluss giebt der Verfasser an, wie er sich den Vor-

gang der elastischen Nachwirkung auf Grund der mechanischen Wärmetheorie vorstellt. Wn.

F. Grashof. Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. Berlin. R. Gärtner.

Zweite Auflage der 1866 erschienenen Festigkeitslehre. Durch wesentliche Umarbeitung ist dieselbe nunmehr auch für das Selbststudium geeignet gemacht worden. Sie zerfällt in fünf Abschnitte, von denen der erste die allgemeine Theorie der Elasticität enthält; derselbe entwickelt die Begriffe des Spannungs- und Deformationsellipsoides und die allgemeinen Beziehungen zwischen Spannung und Deformation bei dreiaxigen, einaxigen und isotropen Körpern. Der zweite, weitaus grösste Abschnitt behandelt die für die Praxis wichtigen geraden stabförmigen Körper unter Heranziehung zahlreicher Beispiele. Die folgenden Abschnitte handeln dann noch von den krummen Stäben, den Platten und von der Deformationsarbeit. Bn.

W. E. Story. On the elastic potential of crystals. Amer. J. I. 177-184.

Die Componenten der elastischen Druckkräfte kann man bekanntlich als partielle Derivirte einer ganzen homogenen Function zweiten Grades der 6 Grössen

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad y_y = \frac{dv}{\partial y},\quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z},\quad y_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ldots,$$

darstellen. Diese Function, die hier elastisches Potential genannt wird, enthält, wenn man von jeder Voraussetzung über die Constitution des Körpers abstrahirt, 21 Constante, die sich für isotrope Körper auf zwei reduciren. In dem vorliegenden Aufsatz wird nun untersucht, welches die Zahl der Constanten für die einzelnen Krystallsysteme ist. Die Resultate dieser Untersuchung sind zum Theil bekannt, die Methode ist die gewöhnliche, zu untersuchen, welche Aenderung die oben genannte Function durch Coordinatentransformation erleidet. Wn.

De Saint-Venant. Des paramètres d'élasticité des solides, et de leur détermination expérimentale. C. R. LXXXVI. 781-786.

Der Verfasser stellt einige bekannte Resultate der Elasticitätstheorie zusammen. Dieselben beziehen sich 1) auf die Zahl der in den elastischen Druckkräften enthaltenen Constanten für Körper von verschiedener Structur und die Relationen zwischen diesen Constanten (für isotrope Körper nimmt der Verfasser nur eine Constante an); 2) auf den Zusammenhang jener Constanten mit dem Elasticitätsmodul; 3) auf die Quercontraction eines Prismas bei Längendilatation desselben; 4) auf die Torsion eines kreisförmigen Cylinders. Er zeigt dann, wie man diese Resultate zur numerischen Bestimmung der Elasticitätsconstanten verwerthen kann. Wn.

De Saint-Venant. Sur la torsion des prismes à base mixtiligne et sur une singularité que peuvent offrir certains emplois de la coordonnée logarithmique du système cylindrique isotherme de Lamé. C. R. LXXXVII. 849.

De Saint-Venant. Exemples du calcul de la torsion des prismes à base mixtiligne. C. R. LXXXVII. 893.

Verfasser recapitulirt die in den C. R. 1847 und Mém. d. Sav. étrangers 1853 entwickelten Formeln für die durch die Torsion hervorgerufenen longitudinalen Verschiebungen u der Punkte eines ursprünglich ebenen Schnittes und die allgemeine Lösung der Aufgabe durch Polarcoordinaten.

Alsdann specialisirt er die Lösung für den Fall, dass der Querschnitt ein gemischtliniges Rechteck sei, d. h. ein Sector eines concentrischen Kreisringes; es findet sich u als Summe von unendlich vielen Gliedern, enthaltend Potenzen des Radius vector, multiplicirt mit $\sin m\beta$ $\left(m = \frac{n+1}{\gamma}\pi,\ \gamma\right.$ der Centriwinkel des Sectors$\left.\right)$.

Alsdann giebt er noch 2 Lösungen derselben Aufgabe, indem er für u eine Hülfsgrösse V einführt und die Polarcoordinaten durch die Lamé'schen rechtwinkligen Isothermen-Coordinaten ersetzt. Die Endformel ist sowohl auf dem von Lamé (Leçons) als auch auf dem von Thomson und Tait (Treatise of natural philosophy) angegebenen Wege entwickelt. Beide Formeln geben für den Fall, dass der innere Radius $= 0$, also ein voller Kreissektor als Querschnitt da ist, auf den begrenzenden Radien unmögliche Werthe von V. Der Widerspruch ist in einer Anmerkung zur zweiten Abhandlung gelöst, da das Resultat die Form $\frac{0}{0}$ hat; doch zeigt sich dadurch, dass diese Formeln für die Ableitung der Resultate ihren Dienst versagen.

In der zweiten Abhandlung giebt nun der Verfasser die Gleichung für das Moment Mx der durch die Verschiebung der Theilchen verursachten elastischen Widerstände und zeigt dann an einer Reihe von numerischen Resultaten, welche verhängnissvollen Fehler entstehen können, wenn man den Torsionswiderstand unter der falschen Voraussetzung berechnet, dass die Querschnitte eben und senkrecht zur Prismenkante bleiben. Bezeichnet nämlich μ_0 das Moment des Torsionswiderstandes unter eben dieser Voraussetzung, so findet sich beispielsweise:

$$\frac{Mx}{\mu_0} = 0{,}0923;\ 0{,}1333;\ 0{,}3776 \text{ für Sectoren von bez. } 45^\circ, 60^\circ, 180^\circ.$$

Wie aber für $\gamma = 360^\circ$ das Verhältniss $\frac{Mx}{\mu_0} = 0{,}5589$ sein kann, ist schwer zu verstehen, da ja in diesem Falle die Voraussetzung, dass die Querschnitte eben bleiben, zutrifft. Sollte ein constanter Factor vergessen sein?

Am Schluss giebt der Verfasser auch für Sektoren von 60° und 120° die gefährlichen Punkte des Querschnittes an, d. h. die Stellen des Maximal-Abscherungswiderstandes. Sie finden sich auf den Grenzradien in Abständen von 0,56r, bez. 0,367r vom Mittelpunkt. Bn.

J. Boussinesq. Équilibre d'élasticité d'un sol isotrope sans pesanteur supportant différents poids.
C. R. LXXXVI. 1260.

Unter der Voraussetzung, dass auf der ebenen unbegrenzten Oberfläche des Körpers eine begrenzte Schicht ruht, deren Gewicht in den einzelnen Punkten durch $f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$ gegeben ist, werden die dadurch hervorgerufenen elastischen Verschiebungen u, v, w durch eine Function Φ dargestellt, welche die erste Ableitung des Potentials der lastenden Schicht ist. Danach ergeben sich Formeln für die drei Spannungen N_3, T_1, T_2, welche auf ein horizontales Flächenelement wirken; für ein Element der Oberfläche werden die Werthe der Spannungen durch Integrale dargestellt. Bn.

J. Boussinesq. Sur la dépression que produit, à la surface d'un sol horizontal, élastique et isotrope, un poids qu'on y dépose et sur la répartition de ce poids entre ses divers points d'appui. C. R. LXXXVII. 402.

Die Aufgabe wird behandelt für den Fall, dass der schwere Körper ein Rotationskörper sei mit senkrechter Axe und ebener Basis. Die Senkung w wird durch ein Doppelintegral dargestellt und einige specielle Fälle (gleichmässige Vertheilung) ausgeführt. Die umgekehrte Aufgabe, aus der Einsenkung die Druckvertheilung zu finden, wird ebenfalls berührt. Bn.

J. Boussinesq. Calcul des dilatations éprouvées par les éléments matériels rectilignes appartenant à une petite portion d'une membrane élastique courbe que l'on déforme. C. R. LXXXVI. 817.

Es wird eine Formel entwickelt für die Arealveränderung eines unendlich kleinen Flächenstückes, und indem diese Aenderung gleich Null gesetzt wird, der Gauss'sche Satz von den elastischen Flächen bewiesen, dass bei einer Umformung ohne Flächenvergrösserung die Gesammtkrümmung unverändert bleibt. Bn.

H. T. Eddy. The elastic arch. Am. J. I 241-245.

Der Verfasser beweist durch einfache Betrachtungen folgende Sätze:

Die neutrale Axe des elastischen Bogens ist die Curve der Biegungsmomente, welche durch den an den Stützpunkten wirkenden Schub erzeugt wird.

Wenn an den Stützpunkten Momente wirken, so ist die Schublinie entsprechend zu verlegen.

Wenn die durch die Belastung erzeugte Momentencurve mit Zugrundelegung des faktisch vorhandenen Schubes so construirt wird, dass ihre Schlusslinie mit der Schublinie des Bogens zusammenfällt, dann ist das Biegungsmoment an jedem Punkt gleich dem Produkt des Schubes mit der zwischen der neutralen Axe und der Momentencurve enthaltenen Verticalen. Bn.

J. Boussinesq. Sur la question des conditions spéciales au contour des plaques élastiques. C. R. LXXXVI. 108-110.

M. Lévy. Quelques observations sur une nouvelle note de M. Boussinesq relative à la théorie des plaques élastiques. C. R. LXXXVI. 304-307.

J. Boussinesq. Sur les conditions spéciales au contour des plaques. C. R. LXXXVI. 461-463.

Fortsetzung der schon im vorigen Jahre (cfr. F. d. M. IX. 698—699) begonnenen Discussion über die Frage, ob das Problem der elastischen Platte drei Randbedingungen erfordere, wie Poisson und mit ihm Lévy annimmt, oder nur zwei, wie Kirchhoff will. Die beiderseits angeführten Gründe scheinen dem Referenten weniger geeignet, eine definitive Entscheidung herbeizuführen, als das, was Kirchhoff in seiner Erwiderung auf die erste Arbeit von Lévy hervorgehoben hat (cfr. F. d. M. IX. 628). Wn.

A. Barthélémy. Sur les plaques et membranes de formes elliptiques. Mém. de Toul. (7) IX. 175-240.

G. van der Mensbrugghe. Études sur les variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. Premier mémoire. Mém. de l'Acad. de Brux. XLIII.

J. Plateau. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLV. 574-577.

G. van der Mensbrugghe. Sur une nouvelle application de l'énergie potentielle des surfaces liquides. Bull. de Belg. (2) XLVI. 625-693.

In der ersten Arbeit wird die potentielle Energie einer Flüssigkeit definirt, die entweder frei oder in Berührung mit einem festen Körper oder einer andern Flüssigkeit ist. Dabei wird das folgende allgemeine Princip aufgestellt: Wenn die Oberflächenschicht einer Flüssigkeit sich vergrössert oder wenn dieselbe der Sitz einer potentiellen Energie wird, die sie vorher nicht besass, so findet Abkühlung statt, und die Spannung ist grösser, als vorher. Das Umgekehrte findet statt im umgekehrten Falle (vergl. F. d. M. VIII. p. 706). Verschiedene experimentelle Bestätigungen werden dafür angeführt.

In der zweiten Arbeit wird das obige Princip angewandt zur Erklärung der Savart'schen Beobachtungen über Flüssigkeitslamellen (Ann. de Chim. LIV. 55, 1833).

Mn. (Wn.)

P. M. Heringa. Beschouwingen over de theorie der capillaire verschijnselen. Nieuw Arch. IV. 1-30.

P. M. Heringa. Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires. Arch. Néerl. XIII. 1-34.

Die Theorie der Capillarität, wie sie in den Arbeiten von Laplace, Gauss und Poisson gegeben wird, ist der Gegenstand des ersten Abschnittes dieser Abhandlung. Der Verfasser kann sich nämlich mit dieser Theorie nicht befreunden und macht auf einige Schwierigkeiten aufmerksam, die sich bei der Erklärung einer Beobachtung von Plateau gezeigt haben.

Er beginnt mit einer Uebersicht der Theorie aus Jamin's

Cours de Physique und bemerkt, dass sich hier ein Sprung findet, indem erst die Molecularkräfte verglichen werden mit der Schwerkraft, woraus folgen würde, dass der Druck, der in Folge der Molecularkräfte entsteht, sich ebenso wie der Druck in Folge der Schwerkraft durch die ganze Flüssigkeit fortpflanzen müsste, was jedoch nach dem Verfasser nicht der Fall ist.

Weiter wird für die Geschichte der capillaren Theorien hingewiesen auf die Abhandlung von Bède: „Recherches sur la capillarité“ in den Mémoires couronnés et des savants étrangers publiés par l'Académie Royale de Belgique, (1861, 1863, 1865 und 1867); dann geht der Verfasser dazu über, die principiellen Fehler in den drei vornehmsten Theorien zu zeigen.

Zuerst bespricht er die Theorie von Laplace, wie sie sich im vierten Theile der „Mécanique céleste“ findet, und entwickelt seine Bedenken gegen die aufgestellten Hypothesen, sowie gegen die Entwickelung, so dass das absprechende Urtheil von Gauss über diese Theorie bestätigt wird. Die Theorie von Gauss wird nur kurz behandelt. Der Verfasser hat hier keine Einwendungen gegen die Entwickelung, sondern nur gegen die Grundgleichung, welche ihr zu Grunde liegt. Er behauptet nämlich, dass Gauss versäumt habe, den Gegendruck der Wände zu berücksichtigen, doch giebt er die Modificationen nicht an, welche in die Theorie gebracht werden müssten, um diese in Rechnung zu ziehen. Auch die Theorie von Poisson wird unrichtig befunden. Poison sagt nämlich zuerst, es wirkten zwei Kräfte, eine abstossende und eine anziehende, später bringt er jedoch nur einen Theil der Kraft in Rechnung; er thut es zu dem Zwecke, etwas zu erläutern, was anders nicht zu erklären ist.

Im zweiten Theile seiner Abhandlung theilt der Verfasser seine eignen Vorstellungen von der Natur der Flüssigkeit und der Ursache der capillaren Erscheinungen mit. Er denkt sich die Flüssigkeit in einem Fasse wie eine Masse kleiner Kugeln, die vollkommen rund und nicht zusammendrückbar sind, für welche weiter die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Hieraus leitet er die folgenden Resultate ab: 1) In der Masse entsteht durch die gegenseitige Anziehung ein constanter Druck; 2) in der Ober-

fläche nimmt der Druck ab; 3) in der Nähe der Wände nimmt der Druck zu oder ab; 4) es ist kein Grund anzunehmen, dass der Druck, entstanden durch die gegenseitige Anziehung in der Oberfläche, sich in die tiefer liegenden Theile fortpflanzen werde; 5) die Krümmung der Oberfläche von constantem Drucke dehnt sich nicht weiter aus, als der Einfluss der Wände; 6) die senkrechte Wand allein ist nicht im Stande, die Kugelmasse aufzuhalten. Weiter behandelt er den speciellen Fall, dass eine Kugel ganz in eine Flüssigkeit getaucht wird, und geht dann zu den Experimenten über, welche von Wilhelmy (Pogg. Ann.) mit zum Theile untergetauchten Körpern angestellt worden sind. Zum Schlusse bespricht er die Experimente von Plateau mit Flüssigkeitsmembranen und glaubt hierin eine Bestätigung seiner Theorie zu finden. Er schliesst jedoch mit dem Bekenntniss, dass er noch keine genügenden mathematischen Resultate erhalten habe.

G.

J. Moutier. Sur les théories capillaires. Soc. phil. Paris (7) II. 45-47.

Der Verfasser zeigt, wie aus der Gauss'schen Theorie der Capillarität die Grundformeln der Laplace'schen Theorie für eine einzige Flüssigkeit folgen. Er betrachtet dabei aber nur die Vergrösserung, welche ein Flächenelement erfährt, wenn alle Punkte unendlich kleine Verrückungen nach aussen erfahren, und benutzt zur Berechnung dieser Vergrösserung einen von Bertrand herrührenden Satz der Flächentheorie. Er nimmt aber nicht darauf Rücksicht, dass die Punkte der Fläche auch eine Verschiebung in dieser selbst erleiden können, wie es z. B. Kirchhoff in seiner Mechanik (Vorl. XIII.) thut. Referent hält aus diesem Grunde die hier vorliegende Ableitung für unvollständig.

Wn.

J. Moutier. Sur l'endosmose. Soc. phil Paris (7) II. 120-122.

In einer Capillarröhre mögen sich zwei Flüssigkeiten befinden. Erfährt die eine derselben eine verticale Verrückung derart, dass

ihre Berührungsfläche mit der festen Wand vergrössert wird, so entstehen neue Molecularkräfte, deren Potential sich unmittelbar aus der Gauss'schen Theorie ergiebt. Diese Kräfte fasst der Verfasser als solche auf, welche die eine Flüssigkeit nach der andern hintreiben, und in ihnen sieht er die Ursache der Endosmose. Wn.

A. Terquem. Sur la production des systèmes laminaires de Plateau. C. R. LXXXVII. 1057-1059.

Ein verticales Gestell, das aus zwei parallelen horizontalen festen Stäben und aus zwei verticalen biegsamen Fäden besteht, wird in eine Seifenlösung getaucht. Durch die Oberflächenspannung nehmen die Fäden die Form von Kreisbogen an. Bestimmt wird der Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung und der Krümmung der Fäden. Wn.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

Crum Brown and P. G. Tait. On certain effects of periodic variation of intensity of a musical note. Proc. of Edinb. IX. 736-737.

Cly.

K. L. Bauer. Die Summationstöne als Differenz- und als Stosstöne aus den Obertönen der Primärtöne. Pogg. Ann. (2) IV. 516-525.

Der Verfasser verwirft die Helmholtz'sche Erklärung der Summationstöne, hält diese Töne vielmehr entweder für Differenztöne der mit den Grundtönen mitklingenden Obertöne oder für Stosstöne der letzteren. Sind a und b die relativen Schwingungszahlen der Grundtöne, x und y ganze Zahlen, so ist der

Summationston ein Differenzton der Obertöne, wenn

$$ax - by = \pm(a+b);$$

ähnliche Gleichungen finden auch statt, wenn der Summationston ein Stosston der Obertöne sein soll. Für einzelne gegebene Intervalle werden die möglichen Lösungen dieser Gleichungen ausführlich discutirt. Wn.

G. Ferraris. Ein Beweis für das Helmholtz'sche Princip über Klangfarben. Carl Rep. XIV. 497-506; Atti di Torino XIV. 287-299.

Ein Ton sei aus einem Grundton und einer Reihe harmonischer Obertöne zusammengesetzt. Wird durch diesen Ton ein Telephon erregt, so ist die Intensität i des entstehenden Stromes proportional dem Schwingungsausschlag. Ferner werde durch den eben genannten Strom in einer andern in der Nähe befindlichen Leitung ein Strom inducirt. Die Intensität desselben ist dann proportional $-\frac{di}{dt}$, und das Gleiche gilt von dem Schwingungsausschlag eines in dem zweiten Stromkreise enthaltenen Telephons. Man erhält somit die Schwingung des zweiten Telephons, indem man die des ersten nach t differentiirt. Daraus folgt, dass die Amplituden der einzelnen Elementarwellen sowohl, als ihre Phasen im zweiten Telephon andere sind, als im ersten. (Siehe auch Abschn. XI. Cap. 3.) Wn.

H. Helmholtz. Telephon und Klangfarbe. Berl. Monatsber. 1878. 488-500; Pogg. Ann. (2) V. 448-460.

H. F. Weber. Die Inductionsvorgänge im Telephon. Wolf Z. XXIII. 265-272.

Siehe Abschn. XI. Cap. 3.

D. J. Korteweg. Over voortplantings-snelheid van golven in elastische buizen. Diss. Leiden.

Die Veranlassung zu der Untersuchung, deren Resultate in dieser Dissertation niedergelegt sind, ist das in letzter Zeit über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Pulses Geschriebene. Die experimentellen und theoretischen Betrachtungen darüber müssen, wie der Verfasser meint, auf rein mathematischem Wege gefunden werden können und dann ohne einen empirischen Coefficienten. Dazu betrachtet er eine lange cylindrische Röhre mit Wänden von bekannter Elasticität und gefüllt mit einer Flüssigkeit, deren Elasticitätscoefficient ebenfalls bekannt ist, um dafür die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Gleichgewichtsstörung zu berechnen. Nimmt man in der so gefundenen Formel den Elasticitätscoefficienten der Wände unendlich gross an, so hat man es zu thun mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Flüssigkeit, mit der die Röhre gefüllt ist; nimmt man dagegen den Elasticitätscoefficienten der Flüssigkeit unendlich gross, so bekommt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Pulswelle, wie diese in der Röhre entstehen würde, wenn sie mit einer zusammendrückbaren Flüssigkeit gefüllt wäre. Giebt man endlich beiden Elasticitätscoefficienten, der Flüssigkeit und der Wände, endliche Werthe, so bekommt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von dem, was der Verfasser gemischte Wellen nennt. Der erste Fall ist der am meisten bekannte, daher beschäftigt sich der Verfasser vorzugsweise mit den beiden anderen. Nach einer ausführlichen Einleitung über die mit dem Gegenstande verwandten Untersuchungen von Résal, Wertheim, Kundt, André u. a. kommt der Verfasser zur mathematischen Behandlung.

Im ersten Capitel behandelt er die Theorie der Wellen, welche durch die allgemeine partielle Differentialgleichung ohne zweites Glied dargestellt werden, im zweiten die der obengenannten Pulswellen und im dritten die der gemischten Wellen, wobei sich ergiebt, dass die Formel von Résal für die Geschwindigkeit der Welle annähernd richtig ist.

Im vierten Capitel sieht der Verfasser von der bis dahin benutzten Hypothese ab, dass ein Theilchen der Flüssigkeit, welches im Gleichgewichtszustande von Ebenen begrenzt wird, auch im Bewegungszustande dieselbe Gestalt behalte, und nimmt nur an,

dass der Bewegungszustand und der Druck an allen Seiten um die Axe gleich sind. Dabei kommt er zu dem merkwürdigen Resultate, dass man doch einfache Wellen erhalten werde, welche sich mit unveränderlicher Intensität und Form fortbewegen, so dass man sich jede Welle als hieraus zusammengesetzt denken darf, wenn nur die Vibrationsquelle constant bleibt.

Im fünften und letzten Capitel wird noch der Einfluss der Reibung auf Pulswellen und gemischte Wellen untersucht, wo der Verfasser sehr viele Berechnungen giebt und mit der Bemerkung schliesst, dass es sehr erwünscht sein würde, die Resultate dieser Berechnung durch viele Experimente mit der Beobachtung vergleichen zu können. (S. auch das folgende Referat). G.

D. J. Korteweg. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in elastischen Röhren. Pogg. Ann. (2) V. 525-542.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Aenderung zu ermitteln, welche die bekannte Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in einer elastischen Flüssigkeit erleidet, wenn diese Flüssigkeit in einer Röhre mit elastischen, statt in einer mit festen Wänden enthalten ist. Er legt dabei die vereinfachenden Voraussetzungen zu Grunde, 1) dass ein Flüssigkeitstheilchen, das ursprünglich von zwei Ebenen senkrecht zur Röhrenaxe begrenzt ist, zwar breiter und schmaler wird, aber immer durch Ebenen begrenzt bleibt; 2) dass die Wellenlänge gross genug ist, um bei den in der Röhrenwand entstehenden Spannungen nur auf die Ausdehnung oder Eindrückung des ringförmigen Durchschnitts senkrecht zur Axe achten zu müssen. Unter diesen Voraussetzungen leitet er folgende drei Grundgleichungen ab:

$$(1) \qquad \frac{p_1}{E} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{2r_1}{R_1} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\frac{\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)}{\varrho},$$

$$(3a.)\qquad \frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} = \frac{p_1 - q_1}{a_1 \varrho_1} = \frac{p_1 - \frac{E_1 a_1 r_1}{R_1^2}}{a_1 \varrho_1}.$$

Darin ist x die Coordinate parallel der Röhrenaxe, u_1 die Verschiebung eines Flüssigkeitsquerschnitts aus seiner Gleichgewichtslage, p_1 die Aenderung, welche der Druck der Flüssigkeit an der Stelle x bei der Bewegung erleidet, R_1 der Radius der Röhre, r_1 die Aenderung des Radius, ϱ und E Dichtigkeit und Elasticitätscoefficient der Flüssigkeit, während ϱ_1 und E_1 dieselbe Bedeutung für die Wand haben; a_1 ist die Dicke der Wand, q_1 endlich der elastische Druck in einem Element der Röhrenwand. Die erste der obigen Gleichungen stellt die Aenderung des Drucks in Folge der Aenderung des Volumens eines Flüssigkeitstheilchens dar; die zweite drückt die Beschleunigung des Theilchens vermöge des Druckunterschiedes auf Vorder- und Hinterfläche aus, die dritte die Beschleunigung eines Elements der Wand, auf welches der Flüssigkeitsdruck einerseits, der elastische Druck andererseits wirken. Vernachlässigt man die Trägheit der Röhrenwand, so wird $p_1 = q_1$. Dann tritt an Stelle der Gleichung (3a) die folgende:

$$(3b)\qquad p_1 = \frac{E_1 a_1 r_1}{R_1^2}.$$

Aus den Gleichungen (1), (2), (3b) folgt nun als Gleichung für die Wellenbewegung der Flüssigkeit:

$$(A)\qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \left(\frac{\varrho}{E} + \frac{2\varrho R_1}{E_1 a_1}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Ist die Röhrenwand fest, statt elastisch, so ist $E_1 = \infty$, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch Gleichung (A) dargestellten Welle ist die bekannte

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}.$$

Ist die Wand elastisch, die Flüssigkeit incompressibel, so dass $E = \infty$ ist, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\beta = \sqrt{\frac{a_1 E_1}{2\varrho R_1}},$$

was mit einem von Résal abgeleiteten Resultate übereinstimmt

(cfr. F. d. M. VIII. p. 614). Im allgemeinen Falle ist die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_p, durch die beiden obigen Grössen α und β ausgedrückt:

$$\frac{1}{v_p^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}.$$

Nachdem der Verfasser diese Formel für die praktische Anwendung umgeformt, zeigt er, dass, wenn man an Stelle von (3b) die Gleichung (3a) zu Grunde legt, wenn man also die lebendige Kraft der transversalen Bewegung der Röhrenwand nicht vernachlässigt, an die Stelle der Differentialgleichung (A) eine Differentialgleichung vierter Ordnung tritt, aus der sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit α' die Gleichung ergiebt:

$$\frac{R_1^2}{\alpha^2\gamma^2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \alpha'^4 - \frac{R_1^2}{\gamma^2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \alpha'^2 - \frac{1}{v_p^2}\alpha'^2 + 1 = 0.$$

Darin haben α, v_p, R_1 die frühere Bedeutung, λ ist die Wellenlänge, $\gamma = \sqrt{\frac{E_1}{\varrho_1}}$. Von den beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung ist diejenige zu nehmen, die für $\lambda = \infty$ in v_p übergeht.

Zum Schluss zeigt der Verfasser noch, welche Modificationen eintreten, wenn die Bewegung der Flüssigkeit nicht mehr für alle Punkte einer zur Axe senkrechten Ebene dieselbe ist, sondern auch von der Entfernung R abhängt, die ein Punkt von der Röhrenaxe hat. Ist r die Aenderung, welche R bei der Bewegung erleidet, so tritt an Stelle der Gleichung (1) nur die Gleichung

$$\frac{p}{E} + \frac{r}{R} + \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

wo u an Stelle des früheren u_1, p an Stelle von p_1 steht. Zu Gleichung (2) kommt noch die Gleichung hinzu:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial R},$$

während die frühere Gleichung (2), ebenso wie (3) ungeändert bleibt. Für diese Gleichungen werden particuläre Integrale von der Form aufgestellt:

$$u = u' \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x - \delta . t) + \gamma\right\},$$

$$r = r' \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x - \delta . t) + \gamma\right\},$$

$$p = p' \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x - \delta . t) + \gamma\right\},$$

wo u', r', p' nur Functionen von R sind, die durch Einsetzen der letzten Ausdrücke in die jetzt gültigen Differentialgleichungen ermittelt werden. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit δ ergiebt sich dann der Werth:

$$\delta = v_p \left\{1 - \frac{\pi^2 R_1^2 v_p^2}{4\beta^2\lambda^2}\left(1 - \frac{v_p^2}{\alpha^2}\right) - \frac{a_1 \varrho_1 R_1}{4\varrho} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{v_p^4}{\beta^4}\right\}.$$

Die Bedeutung der hierin vorkommenden Buchstaben ist oben angegeben. Wn.

Th. Wand. Ueber die Resonanz in Hohlräumen.

Pogg. Ann. (2) IV. 107-149.

Der Aufsatz reproducirt zunächst in etwas anderer Darstellung die wesentlichsten Sätze und Resultate, welche Helmholtz in seinem bekannten Aufsatze „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden“ aufgestellt hat. Der Verfasser knüpft daran einige weitere Sätze, deren hauptsächlichste sind:

1) Hohlräume, die angeblasen den gleichen Ton geben, lassen diesen Ton stets in gleicher Stärke wiederklingen, wenn er von aussen erregt wird.

2) Die Grundtöne einer offenen und einer gleich langen gedeckten Pfeife liegen weniger als eine Octave auseinander.

3) Bestimmung der Schwingungszahl einer cubischen Pfeife mit cylindrischem Ansatz und einer solchen mit zwei Löchern.

Referent hält die Ableitungen des Herrn Verfassers, die sich hinsichtlich der Methode eng an Helmholtz anschliessen, nicht alle für hinreichend streng; z. B. hat er Bedenken gegen die Richtigkeit der Schlussweise beim Beweise des oben unter 1) genannten Satzes. Zum Theil sind aber auch die vom Verfasser als neu angegebenen Resultate bekannt, z. B. die Schwingungs-

zahl einer cubischen Pfeife mit cylindrischem Ansatz ist, wenn auch auf ganz anderem Wege, von Bourget abgeleitet (cfr. F. d. M. VII. p. 632). Wn.

R. H. M. Bosanguet. On the relation between the notes of open and stopped pipes. Phil. Mag. (5) VI. 63-93.

Nach Bernoulli's Theorie müsste der Grundton einer an einem Ende geschlossenen Pfeife genau die tiefere Octave des Grundtons der gleichlangen offenen Pfeife sein. Bekanntlich ist das aber nicht der Fall, sondern der Grundton der geschlossenen Pfeife ist etwas höher. Diese Erscheinung wird in der vorliegenden Arbeit zu erklären gesucht. Csy. (Wn.)

Lord Rayleigh. Note on acoustic repulsion. Phil. Mag. 1878.

Die Arbeit bezieht sich auf die von Dvořák und Mayer beobachtete Erscheinung, dass ein Resonator, der durch eine Schallquelle in Schwingung versetzt ist, die mit ihm selbst nahezu unisono schwingt, abgestossen wird. Lord Rayleigh zeigt hier, dass diese Erscheinung eine nothwendige Folgerung der hydrodynamischen Gleichung

$$\pi = \int \frac{dp}{\varrho} = R - \frac{d\varphi}{dt} - \tfrac{1}{2}v^2$$

ist. Csy. (Wn.)

H. A. Lorentz. Over het verband tusschen de voortplantingssnelheid van het licht en de dichtheid en samenstelling der middenstoffen. Verh. Amsterdam. 1878. 1-112.

Der Verfasser will in dieser umfangreichen Abhandlung die Folgen der elektromagnetischen Lichttheorie von Maxwell, welche bisher nur theilweise mit der Erfahrung verglichen sind, näher untersuchen, damit dadurch der Werth dieser Theorie besser beurtheilt werden könne.

Im ersten Capitel giebt er eine Uebersicht der elektromagnetischen Theorie und befolgt dabei eine Methode, welche grösstentheils mit jener von Helmholtz übereinstimmt. Er discutirt die bekannten Resultate, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Bewegung der Geschwindigkeit des Lichtes gleich ist, und dass der Brechungsexponent durch die Quadratwurzel der specifischen Inductionsconstanten dargestellt werden kann.

Im zweiten Capitel wird die Lichtbewegung in einem isotropen Medium mit molekularer Struktur behandelt. Hier findet der Autor eine sehr interessante Relation zwischen der Dichtigkeit des Mediums und dem Brechungsexponenten. Auch untersucht er diesen Exponenten für eine Mischung zweier Substanzen und giebt hierfür eine allgemeine Formel. Er glaubt, dass der hier eingeschlagene Weg zu einer Theorie des Einflusses führen kann, welchen die Bewegung der Medien auf die elektrischen Bewegungen ausübt.

Im dritten Capitel wird die Dispersion des Lichtes behandelt. Der Verfasser setzt voraus, dass die Theilchen des Mediums eine regelmässige cubische Anordnung besitzen, und kommt zu dem Schlusse, dass die Discontinuität der Moleküle die Dispersion nicht erklären kann. Bei zwei Hypothesen über die Bewegung in den Molekülen kommt er zu speciellen Dispersionsausdrücken. Hierdurch wird nachgewiesen, dass man bei verschiedenen Hypothesen über die Bewegung der Moleküle zu Formeln kommen kann, welche die Dispersion in bekannten Fällen erklären. Weiter wird gezeigt, wie man die Dispersion einer Mischung aus jener der Substanzen ableiten kann. Die gefundenen Formeln werden mit den Beobachtungs-Resultaten mehrerer Physiker verglichen, wobei ziemlich übereinstimmende Werthe gefunden werden.

Im vierten Capitel wird die Beziehung zwischen Brechungsexponent, Dichtigkeit und Mischung der Substanzen näher betrachtet und die Formeln der theoretischen Untersuchung wieder mit der Erfahrung verglichen. Hierbei benutzt der Verfasser auch die Resultate der Versuche, welche Wüllner u. a. für viele Flüssigkeiten und Mischungen bekommen haben. Obgleich einige Zahlen

in der Tabelle ziemlich grosse Abweichungen zeigen, ist die Uebereinstimmung im Allgemeinen doch gross genug, um, die elektromagnetische Theorie des Lichtes vorausgesetzt, die Formel für Mischungen bei einer ersten Annäherung auf die untersuchten Substanzen anwenden zu können. Am Ende bespricht der Verfasser die Möglichkeit, die Brechungsexponenten der Elemente Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff im freien Zustande aus jenen der Verbindungen abzuleiten, und giebt hiervon zahlreiche Beispiele. Er meint, dass, obgleich unsere Kenntniss der Relation zwischen Brechungsexponent und chemischer Constitution noch sehr lückenhaft sei, die gefundenen Abweichungen vermuthen lassen, dass, sobald man nur die Ursachen dieser Abweichungen bei den Dichtigkeitsveränderungen einer Substanz und den Mischungen mehrerer Substanzen kenne, auch die Brechungsexponenten der hier untersuchten Verbindungen genauer berechnet werden können. G.

H. A. Lorentz. Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes. Schlömich Z. XXIII. 197-210.

Der vorliegende Aufsatz ist eine Fortsetzung der Arbeit, über die im vorigen Jahre (F. d. M. IX. p. 711—715) berichtet ist. Darin wird die dort besprochene elektromagnetische Lichttheorie auf Metalle ausgedehnt. Für diese müssen sich, da sie die Elektricität leiten, während die durchsichtigen Substanzen als Isolatoren aufgefasst waren, auch eigenthümliche optische Eigenschaften ergeben. Zunächst wird in den Metallen unter dem Einfluss der elektromotorischen Kraft ein Leitungsstrom geweckt, dessen Intensität durch das Ohm'sche Gesetz bestimmt wird. Neben dieser Wirkung soll nach der Annahme des Verfassers eine Polarisation der Theilchen hervorgerufen werden, die denselben Gesetzen folgt, wie bei diëlektrischen Körpern. Durch das Vorhandensein des Leitungsstroms werden die Componenten des Gesammtstroms andere, als bei den Isolatoren, und daraus ergiebt sich für Metalle eine Lichtbewegung, deren Amplitude in der Fortpflanzungsrichtung immer kleiner wird, also eine Ab-

sorption des Lichtes, deren mathematischer Ausdruck von der gewöhnlichen Form ist. Es wird dann, als physikalisch wichtiger, die Reflexion des Lichtes an Metallen untersucht, wobei die Grenzbedingungen mit den früheren für durchsichtige Medien identisch sind. Auch die Resultate haben, in symbolischer Form (mit Hülfe des Imaginären) dargestellt, genau dieselbe Form, wie für das an isolirenden Körpern reflectirte Licht. Sobald man aber, um die wirkliche Bewegung zu erhalten, nur den reellen Theil aus jenen Resultaten nimmt, hört die Uebereinstimmung auf. Denn gewisse darin vorkommende Grössen, die bei den Nichtleitern reell sind, sind bei den Metallen imaginär. Die reellen Resultate ergeben nun, dass linear polarisirtes einfallendes Licht nach der Reflexion elliptisch polarisirt ist. Aber die Gesetze dieser elliptischen Polarisation stimmen mit der Erfahrung nicht überein. Eine Uebereinstimmung sucht der Verfasser nun dadurch zu erhalten, dass er für den Leitungsstrom das Ohm'sche Gesetz nicht mehr als gültig annimmt, sondern statt dessen die Annahme zu Grunde legt, es befinde sich in den Metallen ein Stoff in Strömung, dessen Bewegung durch einen der Reibung ähnlichen Widerstand gehemmt wird. Durch eine solche Annahme lassen sich zwar die Formeln mit der Erfahrung in Uebereinstimmung bringen. Aber man muss dann auch sehr starke Abweichungen vom Ohm'schen Gesetz und ausserdem sehr grosse Polarisationsfähigkeit der Metallmoleküle annehmen. Wn.

V. v. Lang. Theorie der Circularpolarisation. Pogg. Ann. Suppl. VIII. 608-625.

Um die Erscheinungen circularpolarisirender Medien zu erklären, nimmt der Verfasser an, dass die Körpermoleküle dem Elementarparallelepipedon des innerhalb des Körpers vorhandenen Aethers eine Drehung zu ertheilen suchen, die dem Ausschlage des betreffenden Aethertheilchens proportional ist. Von den sechs tangentialen Spannungscomponenten des deformirten Elementarparallelepipedons sind in Folge dessen nicht mehr je zwei einander gleich, wie ohne jene Drehwirkung, sondern zwei, die

sonst gleich wären, sind jetzt z. B.

$$T_1 = \varrho M\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + J_1 \xi; \quad T'_1 = \varrho M\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) - J_1 \xi;$$

ähnlich verhalten sich je zwei der vier übrigen tangentialen Componenten, während die normalen Spannungscomponenten die üblichen Werthe behalten. Setzt man diese Ausdrücke der elastischen Kräfte in die allgemeinen Elasticitätsgleichungen ein, so erhält man die Differentialgleichungen für isotrope circular polarisirende Medien. Um dieselben Gleichungen für circular polarisirende Krystalle zu erhalten, muss man dasselbe Verfahren anwenden, auf welches der Verfasser die Theorie der Doppelbrechung basirt hat (cf. F. d. M. VIII. p. 651). Man muss in den obigen Gleichungen statt ξ, η, ζ setzen $\xi - \xi'$, $\eta - \eta'$, $\zeta - \zeta'$, wo ξ', η', ζ' die Ausschläge der Körpertheilchen sind. Man muss dann annehmen, dass für ein bestimmtes System rechtwinkliger Axen $\frac{\xi'}{\xi}$, $\frac{\eta'}{\eta}$, $\frac{\zeta'}{\zeta}$ constante Werthe haben. Von den so erhaltenen Gleichungen hat die erste die Form

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \mathfrak{a}^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{a}^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathfrak{b}^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + \mathfrak{c}^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$
$$= K_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right);$$

die andern entstehen aus dieser durch Vertauschung von ξ, x, $\mathfrak{a}^2$ mit η, y, $\mathfrak{b}^2$, resp. ζ, z, $\mathfrak{c}^2$.

Diese Gleichungen werden nun in bekannter Art weiter behandelt. Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen eine elliptisch polarisirte, transversale Welle jenen Gleichungen genügt. Es ergeben sich dabei analoge Resultate, wie in der gewöhnlichen Theorie der Doppelbrechung; nur hat man es hier mit elliptisch polarisirten Wellen zu thun statt mit geradlinig polarisirten. An Stelle der optischen Axen der gewöhnlichen Doppelbrechung treten hier zwei Richtungen, für welche die Polarisation eine circulare ist. Ein besonderes Interesse hat der Fall der einaxigen Krystalle, bei denen $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist, wodurch die beiden eben definirten optischen Axen in eine zusammenfallen. Die für diesen Fall abgeleiteten Formeln stimmen im Ganzen

mit den Beobachtungen am Quarz überein. Doch sind die grundlegenden Annahmen über die Einwirkung der Körpermoleküle auf die Aethertheilchen immerhin zu willkürlich, um die vorliegende Theorie als eine definitive betrachten zu können. Die Zulässigkeit der Annahme, dass T_1 und T'_1 ungleich, erscheint dem Referenten nicht zweifellos. Wn.

E. Lommel. Theorie der Absorption und Fluorescenz. Pogg. Ann. (2) III. 251-284.

E. Lommel. Theorie der normalen und anomalen Dispersion. Pogg. Ann. (2) III. 339-356; Erl. Ber. 1877. 63-80.

E. Lommel. Theorie der Doppelbrechung. Pogg. Ann. (2) IV. 55-67; Erl. Ber. 1877. 98-109.

In der ersten der in der Ueberschrift genannten Abhandlungen wird eine Theorie der Absorption und Fluorescenz entwickelt, die sich auf den einfachen Grundgedanken gründet, dass die Körpertheilchen durch einen periodischen Impuls, welchen sie von der in dem umgebenden Mittel fortgepflanzten Welle empfangen, in Bewegung gesetzt werden. Durch weitere Ausführung dieses Gedankens und unter Annahme einer Reibung zwischen Aether- und Körpertheilchen werden dann in der zweiten Arbeit die Modificationen bestimmt, welche die Aetherwelle durch Rückwirkung der Körpertheilchen erfährt, und damit werden normale und anomale Dispersion, sowie Oberflächenfarben, Absorption und Fluorescenz durch eine einheitliche Theorie umfasst. Endlich gelingt es dem Verfasser in der dritten Arbeit, aus denselben Prämissen auch die Doppelbrechung zu erklären.

Was den Gedankengang im Einzelnen betrifft, so wird zur Erklärung der Absorption und Fluorescenz angenommen, die Bewegung eines Körperatoms werde bestimmt durch die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+2k\frac{\partial x}{\partial t}+p^2x+b\varepsilon x^2+c\varepsilon^2x^3+\cdots+f\sin(qt)=0.$$

Es soll also das Theilchen in seine Gleichgewichtslage zurückgezogen werden durch eine Kraft, die nicht blos der ersten Po-

tenz der Entfernung x von dieser Gleichgewichtslage proportional ist, sondern $= p^2x + bsx^2 + \cdots$. Es wirkt ferner auf das Theilchen ein Widerstand proportional der Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}$; endlich wird auf dasselbe ein periodischer Impuls ausgeübt. Gleichung (1) ist eine Erweiterung derjenigen Gleichung, aus der der Verfasser schon früher die Fluorescenz abgeleitet hatte (cf. F. d. M. III. p. 514). Um diese Gleichung zu integriren, denkt der Verfasser x nach Potenzen der kleinen Grösse s entwickelt und schon s^2 vernachlässigt; er setzt also

$$x = x_0 + s.x_1$$

in (1) ein und setzt die Potenzen von s^0 und s^1 für sich gleich Null. Dann entstehen für x_0 und x_1 lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und mit zweiten Gliedern, welche sich nach bekannter Methode integriren lassen. Für specielle Fälle, namentlich für $q = 2\sqrt{p^2 - k^2}$, für $k = 0$, für $k = 0$ und $q = p$, $q = 2p$, $q = \frac{1}{2}p$ nehmen die Auflösungen specielle Formen an, die nicht unmittelbar aus der allgemeinen Form folgen. Diese einzelnen Formen der Lösung werden nun discutirt und daraus Schlüsse gezogen, die wir an einem Beispiel erläutern wollen. Für $k = 0$ und $q = p$ enthält x_0 das Glied $\frac{f}{2p} \cdot t \cdot \cos(pt)$, das die Zeit t als Factor enthält. Die Amplitude der schwingenden Bewegung nimmt also der Zeit proportional zu, und die lebendige Kraft wächst fortwährend. Was aber das Körperatom an lebendiger Kraft gewinnt, muss die an ihm vorübergehende Wellenbewegung, von welcher es den periodischen Impuls $f \sin(qt)$ empfängt, an Energie verlieren. Die Lichtwelle wird also absorbirt. In analoger Weise wird für alle einzelnen Fälle geschlossen; aus dem Zuwachs des Atoms an lebendiger Kraft wird die Absorption berechnet. Die durch die absorbirte Welle entstehende Eigenschwingung des Körperatoms erklärt dann die Fluorescenz. Dass durch Fluorescenz nicht homogenes Licht zu entstehen braucht, wird so erklärt: Die Eigenschwingung des Atoms hat den Factor e^{-kt}; sie kann kein homogenes Licht hervorbringen, da dieses nur aus einfachen pendelartigen Schwin-

gungen besteht. Man entwickle daher e^{-kt} zwischen $t = 0$ und $t = a$ in eine trigonometrische Reihe und lasse a immer grösser werden (oder man stelle e^{-kt} mit Hülfe des Fourier'schen Satzes dar), dann ist die Eigenschwingung des Atoms durch eine unendliche Reihe von einfachen pendelartigen Schwingungen dargestellt, und zwar für $a = \infty$ in stetiger Aufeinanderfolge der Schwingungszahlen. Das schwingende Körperatom giebt also ein continuirliches Spectrum. Durch Discussion der Formeln, deren Ableitung hier angegeben, werden nun die Gesetze der verschiedenen möglichen Arten von Absorption und Fluorescenz abgeleitet und mit der Erfahrung in Uebereinstimmung gefunden.

Um die Theorie der Dispersion mit der der Absorption in Zusammenhang zu bringen, geht der Verfasser von folgenden Gleichungen aus:

$$\text{(1a)} \quad \left\{ \begin{aligned} & m \frac{\partial^2 (x-x_0)}{\partial t^2} \\ & \quad = -2km \frac{\partial (x-x_0)}{\partial t} - mp^2 (x-x_0) - mf.\sin(qt-\varphi), \end{aligned} \right.$$

$$\text{(2)} \quad \mu \frac{\partial^2 (x_0 - \xi)}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 (x_0-\xi)}{\partial y^2} + mf \sin(qt-\varphi).$$

Die Gleichung (1a) gilt für die Bewegung eines Körpertheilchens von der Masse m; sie ist identisch mit der obigen Gleichung (1), nur dass hier $x - x_0$ an Stelle von x steht, und dass die mit Potenzen von ε multiplicirten Glieder fortgeblieben sind; x_0 bestimmt dabei die gemeinsame feste Gleichgewichtslage, nach der Körper- und Aethertheilchen hingezogen werden. Gleichung (2), durch welche die Verschiebung $(x_0 - \xi)$ eines Aethertheilchens von der Masse μ aus der Gleichgewichtslage bestimmt wird, ist die gewöhnliche Elasticitätsgleichung für ebene transversale Wellen von der Fortpflanzungsrichtung y, nur mit Hinzufügung des zweiten Gliedes rechts. Diese Hinzufügung wird dadurch motivirt, dass, da das bewegte Mittel dem Körpertheilchen den periodischen Impuls $-mf\sin(qt-\varphi)$ ertheile (φ ist die noch von y abhängige Phase), nach dem Principe der Gleichheit von Action und Reaction auf die Aethermasse μ die gleiche Kraft in entgegengesetzter Richtung einwirken müsse. Die Wechselwir-

kung zwischen Körper- und Aethertheilchen, durch welche jener periodische Impuls entsteht, wird als eine Art Reibungswirkung angenommen, so dass

$$(3) \qquad 2mr\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}\right) = mf.\sin(qt-\varphi)$$

ist. Diese Gleichungen werden so behandelt, dass durch Integration von (3) $\xi - x$, dann aus (1a) $x - x_0$ bestimmt wird. Diese Ausdrücke genügen auch der Gleichung (2), falls

$$f = f'.e^{-K.y}, \quad \varphi = \frac{q}{c}\cdot y$$

gesetzt wird, und falls der Absorptionscoefficient K und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c des periodischen Impulses gewissen zwei Gleichungen genügen. Durch Discussion der Abhängigkeit der Grössen c und K von den Coefficienten der Differentialgleichungen ergeben sich die Gesetze der normalen und anomalen Dispersion.

Referent bemerkt zu dieser Darstellung Folgendes: In ganz ähnlicher Art, wie hier, ist die anomale Dispersion schon von Helmholtz erklärt. Denkt man in (3) $\xi - x$ an Stelle von $\frac{\partial \xi}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}$, und wird dann der Ausdruck (3) in (1a) und (2) eingesetzt, so erhält man genau die Gleichungen, die Helmholtz seiner Theorie der anomalen Dispersion zu Grunde gelegt hat (cf. F. d. M. VI. p. 654). Den periodischen Impuls aber a priori einzuführen, scheint dem Referenten nicht hinreichend mechanisch motivirt zu sein; ein solcher Impuls müsste sich vielmehr erst als Folgerung aus den Gleichungen ergeben. Man kann also nur sagen: Den Gleichungen der Elasticitätstheorie sind hier empirisch solche Glieder hinzugefügt, dass die Gleichungen die Erscheinung wiedergeben.

Im dritten Theile wird die Untersuchung auf Krystalle ausgedehnt. Die zu Grunde gelegten Gleichungen sind analog gebildet, wie die Gleichungen (1a) und (2), nur dass für den periodischen Impuls der Ausdruck (3) eingesetzt ist. Die Gleichungen sind:

$$m\frac{\partial^2(x'-x)}{\partial t^2}$$
$$= -2km\frac{\partial(x'-x)}{\partial t} - mp_1^2(x'-x) - 2mr\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t}\right),$$
$$\mu\frac{\partial^2(x-\xi)}{\partial t^2}$$
$$= \omega^2\left[\frac{\partial^2(x-\xi')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x-\xi')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x-\xi')}{\partial z^2}\right] + 2mr\left(\frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t}\right),$$

wozu noch vier andere Gleichungen kommen, die dadurch entstehen, dass man an Stelle von x, x', ξ' setzt y, y', η', resp. z, z', ζ' und zugleich p_2, resp. p_3 an Stelle von p_1, während die übrigen Constanten sich nicht ändern. Es liegt darin die Annahme, dass nur die ponderablen Körpertheilchen von krystallinischer Structur sind, während der Aether auch innerhalb des Körpers isotrop und incompressibel ist; ferner die Annahme, dass der Schwerpunkt x, y, z der Körpermasse m und der Aethermasse μ während der Bewegung unverrückt derselbe bleibt. Zu Coordinatenaxen sind die Hauptelasticitätsaxen des Körpers genommen. Es wird nun in der gewöhnlichen Weise untersucht, ob sich in diesem Aether einfache pendelartige transversale Schwingungen in ebenen Wellen fortpflanzen können. Das Resultat stimmt mit dem gewöhnlichen insofern überein, als sich in jeder Richtung zwei transversale Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen können, deren Schwingungen auf einander senkrecht sind. Beide haben zugleich verschiedene Absorptionscoefficienten. An die Stelle des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} - 1 = 0$$

der Fresnel'schen Theorie tritt hier die Fläche

$$(x^2+y^2+z^2-1)\left(\frac{x^2}{n_1^2-1} + \frac{y^2}{n_2^2-1} + \frac{z^2}{n_3^2-1}\right) = x^2+y^2+z^2,$$

so dass die Wellenfläche viel complicirter wird, als in der gewöhnlichen Theorie. Wn.

R. GLAZEBROOK. An experimental investigation into the velocities of normal propagation of plane waves in a biaxal crystal, with a comparison of the results with theory (Abstract). Proc. of London XXVII. 496-503.

Die Beobachtungen wurden an zwei Arragonit-Krystallen angestellt. Aus den beobachteten Brechungswinkeln hat der Verfasser das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten in verschiedenen Richtungen berechnet. Die Vergleichung der Resultate mit der Fresnel'schen Theorie ergab, dass diese Theorie als eine der Wirklichkeit sehr nahe kommende anzusehen ist.

Cly. (Wn.)

E. KETTELER. Zum Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion. Carl Rep. XIV. 336-355.

E. KETTELER. Zur Theorie der Dispersion und Absorption in doppeltbrechenden Medien. Carl Rep. XIV. 390-417.

E. KETTELER. Beiträge zu einer endgültigen Feststellung der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes. Carl Rep. XIV. 606-642.

Alle drei Aufsätze sind Abdrücke von Arbeiten, über die schon im vorigen Jahre referirt ist (cf. F. d. M. IX. p. 717, 718, 715).

Wn.

E. KETTELER. Zur Theorie der longitudinal-elliptischen Schwingungen im incompressiblen Aether. Pogg. Ann. (2) III. 83-113, 284-314.

Die Arbeiten des Herrn Verfassers, von denen schon mehrere vorhergehende demselben Gegenstande gewidmet waren, lesen sich nicht leicht, weil in jeder folgenden auf die früheren recurrirt wird und dabei einige der Voraussetzungen und Resultate jener früheren Arbeiten beibehalten, andere ganz umgestossen werden. Dadurch ist eine vollständige Uebersicht des Ganzen ungemein erschwert. Auch kann man nicht sicher sein, ob der

Verfasser die nun abgeleiteten Resultate wirklich als definitive betrachtet oder dieselben in einer folgenden Arbeit wieder umändern wird. Aus diesen Gründen glaubt Referent sich auf die Darlegung des Hauptgesichtspunktes der vorliegenden Arbeit beschränken zu sollen, ohne auf die Einzelheiten einzugehen. Wesentlich handelt es sich hier um eine neue Formulirung der Grenzbedingungen, die für den Uebergang des Lichtes von einem Medium in ein anderes gelten, und es soll die neue Formulirung für alle möglichen Fälle der Reflexion und Brechung gültig sein. Unter Verwerfung der früher von ihm aufgestellten Bedingungen (cf. F. d. M. VI. p. 652, IX. p. 715), namentlich des Continuitätsprincips, macht der Verfasser für die Grenzfläche folgende Annahmen:

1) Die drei elastischen Drehungscomponenten (Deformationen) sind an der Grenzfläche für beide Medien gleich;

2) die lineare Dilatation parallel der Trennungsfläche ist für beide Medien gleich;

3) der Aether ist incompressibel, die räumliche Dilatation desselben also Null.

Die beiden ersten Bedingungen geben die nöthige Zahl von Gleichungen, und es bedarf nicht der Anwendung des Satzes von der lebendigen Kraft. Ist xz die Einfallsebene, z die Normale der brechenden Fläche, sind ferner ξ, η, ζ die Verrückungen eines Punktes parallel den Axen und beziehen sich die Indices 1, 2 auf die beiden in der brechenden Fläche zusammenstossenden Medien, so sind diese Bedingungen:

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)_1=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)_2,$$

wozu noch zwei analoge Bedingungen für die beiden anderen Deformationscomponenten kommen:

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_1=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_2,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0.$$

(3) findet für beide Medien statt; dazu kommen zur Bestimmung der ξ, η, ζ noch die allgemeinen Differentialgleichungen, die der

Verfasser in früheren Arbeiten unter Berücksichtigung des Mitschwingens der ponderablen Moleküle aufgestellt hat (cf. F. d. M. VIII. 652, IX. 718). Von diesen Grenzbedingungen und Hauptgleichungen ausgehend leitet der Verfasser die Amplituden des reflectirten und gebrochenen Strahls ab für die Totalreflexion innerhalb eines ponderablen Mediums, für die Metallreflexion, für die Reflexion an absorbirenden Krystallflächen, für die innere Spiegelung und Brechung beim Uebergang von einem absorbirenden Medium in ein anderes, für die Reflexion an der Grenze eines bewegten absorbirenden Mittels.

Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich noch das merkwürdige Resultat, dass ein ursprünglich in der Einfallsebene polarisirter Lichtstrahl nach der Brechung eine longitudinal-elliptische Schwingung vollführt, also eine Ellipse beschreibt, deren Axen nach der obigen Bezeichnung, parallel x und z sind. Die hierbei auftretende longitudinale Bewegung, die mit der Incompressibilität des Aethers wohl vereinbar ist, ist eine Folge der Gleichung, die der Verfasser für die Einwirkung der ponderablen Theilchen auf die Aetherschwingungen aufgestellt hat.

Zum Schluss erörtert der Verfasser seine Ansicht über die Constitution der Grenzschicht zweier Medien, wobei er die Ansicht ausspricht, dass Glasreflexion und Metallreflexion qualitativ verschieden seien, nicht blos durch die Grösse des Extinctionscoefficienten. Wn.

F. Klaes. Ueber die Veränderlichkeit der Lage der Absorptionsstreifen. Pogg. Ann. (2) III. 389-414.

Die wesentlich experimentelle Arbeit untersucht die Verschiebung, die ein Absorptionsstreifen einer absorbirenden Substanz dadurch erleidet, dass jener Substanz eine andere, nicht absorbirende beigemischt wird. Theoretischen Inhalts ist nur ein kurzer Abschnitt, in dem eine von Ketteler aufgestellte Dispersionsformel (cfr. F. d. M. VIII. p. 652) unter speciellen Annahmen umgeformt wird. Zum Schluss stellt der Verfasser seine Beobachtungen durch eine empirische Formel dar. Wn.

H. Pellat. De l'impossibilité de la propagation d'ondes longitudinales persistantes dans l'éther libre ou engagé dans un corps transparent. C. R. LXXXVI. 1126-1129.

Der Verfasser schliesst aus den Cauchy'schen Formeln und aus dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft, dass für jedes Medium das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen $= \sqrt{\tfrac{4}{3}}$ sein müsste. Dies widerspreche völlig der Erfahrung. Deshalb sei die Annahme longitudinaler Wellen unzulässig. Dies der Gedankengang des Aufsatzes; die Einzelheiten der Beweisführung sind aus dem vorliegenden Auszuge nicht zu entnehmen.

Wn.

H. Pellat. Sur la transformation que subissent les formules de Cauchy relatives à la réflexion de la lumière à la surface d'un corps transparent, quand on suppose une épaisseur sensible à la couche de transition. C. R. LXXXVI. 1325-1328.

Der Verfasser glaubt, dass beim Uebergang von einem Medium in ein anderes der Aether seine Eigenschaft nicht plötzlich ändert, sondern dass innerhalb einer dünnen Uebergangsschicht eine allmähliche Aenderung erfolgt. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dieser Schicht nimmt er den Ausdruck an

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{x}{\varepsilon},$$

wo μ_1 und μ_2 die constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in beiden Medien sind, ε die Dicke der Schicht, x die Entfernung eines Punktes der Schicht von ihrer oberen Grenze. Durch Benutzung der Cauchy'schen Continuitätsbedingungen leitet er dann für den Fall, dass die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, die Amplituden des gebrochenen und reflectirten Strahles ab. Die so erhaltenen Ausdrücke unterscheiden sich von den Fresnel-Cauchy'schen durch Hinzufügung eines Correctionsgliedes,

das mit $\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)^2$ proportional ist, wo λ_1 die Wellenlänge des einfallenden Strahls bedeutet. Danach würde weisses Licht auch bei der Reflexion farbig werden, wenn nicht $\frac{\varepsilon}{\lambda_1}$ verschwindend klein wäre. Wn.

A. Cornu. Sur la polarisation elliptique par réflexion à la surface des corps transparents. C. R. LXXXVI. 649-652.

Das Cauchy'sche Gesetz über die Phasendifferenz des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahles bei der Reflexion an einer durchsichtigen Substanz kann man angenähert durch eine einfache geometrische Construction darstellen. Man beschreibe um den Punkt, in dem der einfallende Strahl die reflectirende Fläche trifft, eine Kugel, construire auf der Oberfläche derselben ein sphärisches Dreieck, dessen eine Ecke der Punkt ist, in dem der reflectirte Strahl die Kugel trifft, während die gegenüberliegende Seite der Lage und Grösse nach constant, d. h. nur von der Natur der reflectirenden Substanz abhängig ist. Die Phasendifferenz wird dann durch den Aussenwinkel des sphärischen Dreiecks an der oben genannten Ecke repräsentirt. Diese Construction hat der Verfasser allein aus Beobachtungen abgeleitet, ihre Resultate stimmen aber mit den Cauchy'schen Formeln gut überein. Wn.

Grolous. Nouvelle interprétation de la loi de Brewster. Soc. phil. Paris (7) I. 146-148.

Auf die Grenze zweier durchsichtigen Medien falle ein seitlich begrenztes Bündel paralleler Strahlen unter dem Polarisationswinkel. Trägt man auf demjenigen einfallenden Strahle, der durch den Schwerpunkt der Schnittfläche des Bündels mit der reflectirenden Ebene geht, die Geschwindigkeit V, auf dem zugehörigen gebrochenen Strahle die Geschwindigkeit V' ab, legt dann durch die Endpunkte senkrechte Ebenen, so ist der Cylinder-

stumpf, der dadurch auf dem einfallenden Bündel abgeschnitten wird, gleich dem auf dem gebrochenen Bündel abgeschnittenen Stumpfe. Wn.

J. Plašil. Physikalische Deutung der imaginären Grössen. Casopis VII. 173-175. (Böhmisch).

Von einer Bemerkung Fresnel's ausgehend erklärt der Verfasser die Bedeutung einer imaginären Amplitude.

Std.

W. Voigt. Zur Fresnel'schen Theorie der Diffractions-Erscheinungen. Pogg. Ann. (2) III. 532-568.

Die auf Anwendung des Huygens'schen Princips basirten Theorien der Diffraction sind, was die Lage der Interferenzstreifen betrifft, in vollkommener Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Das Gleiche ist aber nicht mit den Intensitäten der Fall, da diese von dem noch unbekannten Gesetze abhängen, nach welchem die Strahlung einer leuchtenden Fläche in verschiedenen Richtungen geschieht. Ausserdem ergiebt sich, wenn man ohne Zwischenstellen eines Schirmes durch eine Lichtquelle einen beliebigen Punkt bestrahlen lässt und die Schwingung einmal direct, das andere Mal unter Anwendung des Huygens'schen Princips berechnet, die Phase beide Male um $\frac{\lambda}{4}$ verschieden ist. Der Nachweis dieses Widerspruchs und die Auffindung des vorher erwähnten Gesetzes bilden den ersten Theil der Arbeit. Zu dem Zwecke wird eine aus einem leuchtenden Punkte entstehende Kugelwelle betrachtet und die Bewegung eines Punktes einmal nach dem Huygens'schen Princip berechnet, indem dies Princip auf eine Wellenfläche (Kugel) angewandt wird, das andere Mal direct. Legt man bei Anwendung des Princips auch ein beliebiges Ausstrahlungsgesetz zu Grunde, sieht aber (was zur Ausführung der Integration nöthig) die Wellenlänge λ als unendlich klein an gegen die Entfernung des betrachteten Punktes von irgend einem Element der Kugelfläche, so ergeben beide Be-

rechnungsarten doch stets die oben genannte Phasendifferenz. Weiter wird eine analoge Betrachtung für den Fall durchgeführt, dass man das Huygens'sche Princip auf eine beliebig gelegene Ebene anwendet, die Wellen immer als Kugelwellen angenommen. Auch hier ergiebt sich in Bezug auf die Phase dasselbe Resultat; und dies Resultat lässt sich unter gewissen Voraussetzungen auch auf den Fall ausdehnen, dass statt der Ebene eine beliebige Fläche eintritt. Dagegen unterscheidet sich das bei der Ebene gefundene Resultat in einem anderen Punkte von dem bei der Kugel gefundenen. Während nämlich bei der Kugel die Anwendung des Huygens'schen Princips dieselbe Amplitude ergiebt, wie die directe Bestrahlung, ergeben beide Berechnungsarten bei der Ebene verschiedene Amplituden. Beide Amplituden lassen sich jedoch zur Uebereinstimmung bringen, wenn man für das bis dahin beliebige Gesetz der Ausstrahlung eine bestimmte Annahme macht. Diese ist, dass die Ausstrahlung proportional ist dem Cosinus des Winkels zwischen der Normale und der Ausstrahlungsrichtung. Dies Gesetz wird nun angewandt, um die Intensität des von einer Wellenfläche unter einem gegebenen Winkel ausgestrahlten Lichtes zu berechnen bei geradliniger und elliptischer Polarisation, sowie für natürliches Licht.

Die obige Phasendifferenz von $\frac{\lambda}{4}$, die bei Berechnung der Schwingung eines Punktes nach dem Huygens'schen Princip stets auftritt, ist dem Verfasser ein Beweis gegen die Haltbarkeit der Fresnel'schen Grundvorstellungen. Er hält dieselben mehr für eine künstlich ersonnene Regel und unternimmt es daher, die Diffractionserscheinungen aus der Elasticitätstheorie abzuleiten. Hier zeigt sich jene Phasendifferenz nicht, während im Uebrigen die Fresnel'sche Annahme hinsichtlich der Intensität des ausgestrahlten Lichtes bestätigt wird. Zu Grunde gelegt wird eine Formel, die man bei der Verbreitung des Schalls in der Luft anzuwenden pflegt, und die von Poisson herrührt (der Verfasser citirt nur Riemann). Es ist der Ausdruck des Geschwindigkeitspotentials, resp. der Verdichtung mit Hülfe zweier Doppelintegrale. Mit Hülfe dieser Formel ergiebt sich zunächst aus den Elasticitätsgleichungen, dass aus rein

transversalen Schwingungen nie longitudinale entstehen können; wenn die räumliche Dilatation gleich Null ist, stimmen die Gleichungen für die elastischen Verrückungen mit der Schallgleichung überein, so dass man die oben genannten Formeln jetzt auch auf die Berechnung der Lichtschwingungen anwenden kann. Es wird nun eine Oeffnung in einem Schirm betrachtet, der der Wellenebene parallel ist, und die Verrückung des Mediums in dem Moment, wo die Welle eben den Schirm erreicht hat, wird als Anfangszustand angesehen. Man kann dann, um die Schwingung in einem beliebigen Punkte zu berechnen, die oben genannte Formel, die die Fortpflanzung einer momentanen Verrückung ergiebt, nur auf ein Zeitelement anwenden und gelangt zu periodischer Schwingung durch Integration nach der Zeit. Dabei ist es aber nöthig, der während des betrachteten Zeitmoments vorhandenen Anfangserschütterung eine gewisse Breite beizulegen. Berechnet man so die Intensität in einem ausserhalb des Schirmes liegenden Punkte, so findet sich nichts von der Fresnel'schen Phasenverzögerung von $\frac{\lambda}{4}$, aber auch nichts von der Verschiedenheit der ausgestrahlten Intensität in verschiedener Richtung. Die so gefundenen Resultate lassen sich sofort auf andere Fälle ausdehnen, namentlich auf den Fall, dass eine beliebige ebene Oeffnung durch eine im Endlichen befindliche Lichtquelle in Bewegung gesetzt wird.

Endlich wird noch die von der Oeffnung nach rückwärts entsandte Bewegung behandelt. Zu dem Zwecke wird die obige Betrachtung (für eine der Wellenlänge parallele Oeffnung) abgeändert. Vorher hatte sich ergeben, dass nicht blos die Fläche der Oeffnung, sondern eine Schicht von gewisser Dicke anfänglich constante Verrückung und Geschwindigkeit haben müsste, um die zu Grunde gelegten Formeln anzuwenden. Dann müsste sich diese Erschütterung nach beiden Seiten, nach vorwärts und rückwärts, mit gleicher Intensität fortpflanzen. Deshalb wird die eben genannte Annahme dahin abgeändert, dass durch jene Schicht eine Bewegung in Form einer Sinuscurve sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Strahlenrichtung fortpflanzt. Dann ergiebt sich für

vorwärts gelegene Punkte dasselbe Resultat wie früher, für rückwärts gelegene Punkte aber Ruhe. Eine Schwierigkeit tritt noch dadurch ein, dass das fortgepflanzte System von Bewegungen mit der Incompressibilität des Aethers nicht vereinbar ist. Deshalb scheinen dem Referenten durch die vorliegende Arbeit noch nicht alle Schwierigkeiten beseitigt zu sein. Wn.

J. Fröhlich. Einführung des Princips der Erhaltung der Energie in die Theorie der Diffraction. Pogg. Ann. (2) III. 376-389; IV. 319-320.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass bei Anwendung des Huygens'schen Princips die relativen Amplituden zwar richtig seien, nicht aber die absoluten. Um letztere zu bestimmen, müsse man noch das Princip der Erhaltung der Energie hinzufügen, und zwar in folgender Form: Die auf den Beobachtungsschirm fallende gesammte Bewegungsenergie (Intensität) der Lichtbewegung ist stets gleich oder kleiner, als die Bewegungsenergie der gesammten, durch die beugende Oeffnung dringenden Lichtbewegung. Der Verfasser wendet dies Princip auf die Beugung an einer rechteckigen Oeffnung an, auf welche paralleles Licht senkrecht zur Oeffnung fällt. Das gebeugte Licht denkt er auf einem kugelförmigen Schirm aufgefangen, so dass der Mittelpunkt der Kugel zugleich der Mittelpunkt der leuchtenden Oeffnung ist. Die Intensität, welche die gewöhnliche Theorie in einem Punkte des Schirmes ergiebt, multiplicirt er dann mit einem unbestimmten Factor, ferner mit dem Flächenelement und integrirt (unter gewissen Vernachlässigungen) über die Fläche des Schirmes. Das so erhaltene Integral ist nach dem obigen Princip gleich der gesammten auf die Oeffnung fallenden Energie. Dadurch bestimmt sich der vorher unbestimmte Factor. Doch ist der für denselben abgeleitete Werth nicht neu, sondern, wie Herr Voigt (cf. das vorstehende Referat) bemerkt, ergiebt sich derselbe schon aus der Fresnel'schen Theorie. Die Rechnung wird dann noch auf n gleiche, parallele Oeffnungen und auf mehrere Reihen von solchen Oeffnungen ausgedehnt. In einem Zusatz wird noch ge-

zeigt, wie das obige Princip auf beliebige Oeffnungen und beliebig gestaltete Schirme auszudehnen ist. Wn.

J. Fröhlich. Experimentaluntersuchungen über die Intensität des gebeugten Lichtes. Pogg. Ann. (2) III. 568-582.

Ausgehend von der in einer früheren Arbeit (cf. das vorige Referat) gefundenen Grundformel berechnet der Verfasser die Intensität eines Beugungsbildes, das dadurch entsteht, dass das von einer parallelogrammförmigen leuchtenden Oeffnung ausgehende Licht durch ein Gitter von parallelen, sehr schmalen Spalten gebeugt wird. Um mit der Beobachtung vergleichbare Resultate zu erhalten, werden dann die Mittelwerthe der Intensität für gewisse Flächen angenähert berechnet. Wn.

J. Fröhlich. Ein neuer Satz in der Theorie der Diffraction und dessen Anwendung. Pogg. Ann. (2) V. 134-142.

Eine beugende Oeffnung, deren Dimensionen sehr gross sind gegen die Wellenlänge des Lichts, sei von einer beliebigen Curve begrenzt. Auf dieselbe falle Licht von einer gleichmässigen leuchtenden Kugelfläche FF, und das Licht werde nach der Beugung auf einem kugelförmigen Schirme ff aufgefangen. Die Radien der Flächen FF und ff seien sehr gross im Verhältniss zu den Dimensionen der Oeffnung; der gemeinsame Mittelpunkt beider liege in der Oeffnung oder deren unmittelbarer Nähe. Dann gilt der Satz: „Die kinetische Energie des von der Fläche FF ausgehenden, auf ein Schirmelement df fallenden gebeugten Lichtes ist gleich der kinetischen Energie des vom conjugirten leuchtenden Element dF herrührenden, auf den ganzen kugelförmigen Schirm ff fallenden gebeugten Lichtes.“ Zwei Elemente dF und df werden dabei conjugirt genannt, wenn deren Kegelecken in der Oeffnung gleich sind.

Aus dem obigen Satze, dessen Beweis auf mehreren angenäherten Annahmen beruht, die sich ihrerseits aus den Voraussetzungen ergeben, folgt weiter: „Die Beleuchtung des mittleren

Theiles des Beugungsbildes einer sehr grossen, gleichmässig leuchtenden Kugelfläche ist dem Flächeninhalt der Projection der beugenden Oeffnung auf die einfallende Wellenfläche direct proportional, hingegen von der Gestalt und Lage der beugenden Oeffnung gänzlich unabhängig.“ Wn.

W. Steadman Aldis. On a modification of Huyghens' principle. Quart. J. XV. 326-335.

Nach dem Huygens'schen Princip hat man, um die Schwingung eines Punktes zu erhalten, die Summe aller Impulse zu berechnen, die von sämmtlichen Punkten der Vorderfläche einer Welle auf den betreffenden Punkt ausgeübt werden. Da nun die Welle stets eine gewisse Breite hat, so entsteht die Frage, weshalb nur die von der Vorderfläche herrührenden Impulse berücksichtigt werden, nicht auch die aus dem Innern des Erschütterungsgebiets herrührenden. Diese Schwierigkeit sucht der Verfasser in einigen speciellen Fällen zu beseitigen, indem er bei der Anwendung des Princips auch die aus dem Innern des momentanen Erschütterungsgebietes herrührenden Impulse in Rechnung zieht. Die Fälle sind: 1) Fortpflanzung einer Welle in einer Röhre gemäss der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

2) Fortpflanzung von Kugelwellen, die der Gleichung genügen:

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2},$$

3) Fortpflanzung einer ebenen Welle in einem Medium, dessen Theilchen sich gegenseitig anziehen. Nimmt man die Erschütterung stets als eine einfache Welle und von der Breite einer Wellenlänge an, so ergiebt im ersten Falle das erweiterte Huygens'sche Princip genau dasselbe Resultat, wie die Differentialgleichung. Im zweiten und dritten Falle ist das Gleiche der Fall, wenn man die Annahme hinzufügt, dass die von der Welle ausgehenden Impulse eine Phasenverschiebung von $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer gegen die ursprüngliche Welle haben. Wenn aber im

dritten Falle eine Welle durch eine Oeffnung geht und man annimmt, dass auf einen hinter der Oeffnung liegenden Punkt nur die Theile der Welle wirken, die aus der Welle herausgeschnitten werden, wenn man den Punkt mit allen Punkten der Oeffnung verbindet, so erhält man, wie aus dem Beispiel der kreisförmigen Oeffnung hervorgeht, für die Intensität andere Resultate, als bisher. Durch die vom Verfasser gegebenen Entwickelungen scheint dem Referenten wenig gewonnen zu sein, da die Breite der ursprünglichen Erschütterung nicht eine beliebige sein darf.

Wn.

K. Exner. Ueber die Fraunhofer'schen Ringe, die Quetelet'schen Streifen und verwandte Erscheinungen. Pogg. Ann. (2) IV. 525-550.

Neben Beobachtungen der im Titel genannten Erscheinungen finden sich in der vorliegenden Arbeit Bemerkungen über die theoretische Erklärung derselben und über ihren Zusammenhang. Die hauptsächlichsten Bemerkungen beziehen sich auf Verdet's Theorie der Fraunhofer'schen Ringe und auf Lommel's Arbeit über Interferenz des gebeugten Lichtes. Verdet's Resultat hält der Verfasser in der von Verdet ausgesprochenen Form nicht für correct; es sei aber richtig, wenn man unter der Intensität in einem Punkte die mittlere Intensität in der Nähe desselben verstehe. An Lommel's Arbeit (cf. F. d. M. VIII. p. 660—662) verwirft Herr Exner das letzte Resultat als falsch, dass ein Beugungsbild auch zu Stande komme, wenn die getrübte Fläche der spiegelnden nicht parallel ist. Ist die Anordnung des Versuchs so, dass alle Staubpartikelchen an der Entstehung des Phänomens theilnehmen, so entsteht nach Exner's Ansicht eine deutliche Erscheinung nur, wenn die elementaren Ringsysteme der einzelnen Partikelchen congruent sind; und dies ist nur der Fall bei Parallelismus der genannten Flächen. Zum Schluss wird für den Fall, dass jede Stelle des Beugungsbildes nur durch einige, neben einander liegende Staubpartikelchen erzeugt wird, gezeigt, dass die Lage des achromatischen Ringes (desjenigen, für welche die

Wegdifferenz der interferirenden Strahlen Null ist) von der Gestalt und Lage der Bestäubungsfläche unabhängig ist. Wn.

C. Bartl. Ueber den Weg, den ein Punkt aus einem Medium in das angrenzende in der kürzesten Zeit durchläuft. Grunert Arch. LXII. 189-201.

Der Verfasser stellt sich folgendes Problem: „Ein beliebiger Punkt des Mediums M bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v bis zur Grenzfläche des anliegenden Mediums M_1 und von da mit einer andern constanten Geschwindigkeit v' zu einem bestimmten Punkte dieses Mediums. Welcher Art ist der so beschriebene Weg, wenn der Punkt in der möglichst kürzesten Zeit von seiner Position in die letzte gelangen soll.“ Der Verfasser gelangt zu den bekannten Gesetzen der Optik. O.

Thollon. Théorie du nouveau spectroscope à vision directe. C. R. LXXXVI. 595-598; Almeida J. VII. 141-148.

In der vorliegenden Notiz werden durch elementare Betrachtungen die Eigenschaften eines Doppelprismas (couple) abgeleitet, dessen beide Prismen aus derselben Substanz bestehen und gleiche brechende Winkel haben, während ihre Kanten parallel sind und die an einander stossenden Seitenflächen einen gegebenen Winkel bilden. Dabei ist die Orientirung eine solche, dass beide einen Lichtstrahl in gleichem Sinne ablenken. Von den Resultaten erwähnen wir folgende zwei: 1) Eine schmale Oeffnung, durch einen Collimator in einfarbigem Lichte betrachtet, erscheint gleich breit, mag das Doppelprisma eingeschaltet werden oder nicht. 2) Wenn die Lichtstrahlen die erste Fläche des Doppelprismas senkrecht treffen und ebenso die letzte unter rechtem Winkel verlassen, so ist die Elementardispersion (Ableitung des Einfallswinkels des zweiten Prismas nach dem Brechungsquotienten) durch das ganze Spectrum constant. Wn.

M. A. Bertin. Théorie élémentaire des lentilles sphériques minces ou épaisses. Ann. d. Chim. et Phys. (5) XIII. 476-508.

Elementare Darstellung der Linsentheorie. Im ersten Theile wird die Theorie mit Vernachlässigung der Linsendicke in der gewöhnlichen Art gegeben. Der zweite Theil entwickelt die Gauss'sche Theorie in ähnlicher Art, wie es Herr Neumann (die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems, Leipzig 1866) schon früher gethan, und mit Benutzung des Neumann'schen Buches. Neue Resultate oder eigenthümliche Methoden enthält die Arbeit nicht. Wn.

E. Bouty. Nombre des éléments nécessaires pour déterminer l'effet extérieur d'un système optique. Almeida J. VII. 331-340.

Ein optisches System ist völlig definirt durch die Lage der Hauptebenen und der Focalebenen. Es wird nun an einigen Beispielen gezeigt, wie statt dieser Elemente andere gegeben sein können, z. B. Lage der Hauptebenen und zwei andere Bedingungen, oder Lage von drei Paar conjugirten Ebenen und eine Vergrösserung etc. Wn.

R. Pendlebury. On equivalent lenses. Messenger (2) VII. 129-131.

Eine Linse ist äquivalent einem System von n Linsen mit derselben Axe, wenn dieselbe, an die Stelle der ersten Linse gestellt, dieselbe Richtungsänderung eines gegebenen Strahles hervorbringt, wie das System. In der vorliegenden Arbeit wird nun eine allgemeine Formel aufgestellt für die Brennweite einer Linse, die n Linsen von den Brennweiten $f_1, f_2, \dots f_n$ äquivalent ist, während $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ die Abstände zwischen den einzelnen Linsen sind. Der Ausdruck für die Brennweite wird sowohl als Zähler eines Kettenbruchs, wie als Determinante dargestellt.

Glr. (Wn.)

K. W. ZENGER. Ueber Berechnung aplanatischer katadioptrischer Objective. Prag. Ber. 1877. 52-65.

Der Verfasser hatte früher eine Theorie der katadioptrischen Aplanaten gegeben (siehe F. d. M. VIII. p. 671.) In der vorliegenden Arbeit giebt er als Anhang zu jener Arbeit eine kurzgefasste Anleitung zur Berechnung solcher Aplanaten und die nöthigen Hülfstafeln. O.

J. MOUTIER. Sur la théorie des lentilles. Soc. phil. Paris (7) II. 136-138.

Constructive und rechnungsmässige Bestimmung der Lage und Grösse des Bildes bei einer biconvexen Linse. O.

J. MOUTIER. Sur une propriété des objectifs achromatiques. Soc. phil. Paris (7) I. 201-202.

Herleitung eines Satzes von Listing aus Formeln, die Herr A. Martin neuerdings in den Ann. de l'Éc. N. gegeben hat. Der Satz heisst: „Im Allgemeinen hat ein achromatisches Objectif, dessen Innenflächen in genauer oder angenäherter Berührung sind, auf seiner Axe und auf derselben Seite zwei Brennpunkte, von wo die ausgesandten Strahlen ohne Aberration gebrochen werden für eine mässige Oeffnung; und für den Raum zwischen diesen Punkten haben die Randstrahlen ihren Vereinigungspunkt weiter von der Linse als die centralen Strahlen.“ O.

J. MOUTIER. Sur la théorie des oculaires composés. Soc. phil. Paris (7) I. 172-174.

Für ein System von zwei Linsen bestimme man den Abstand je eines Hauptbrennpunktes des Systems von dem äusseren Brennpunkt je einer der Linsen. φ sei die mittlere Proportionale zwischen den genannten Abständen, y der Abstand des leuchtenden Objects von dem ersten Hauptbrennpunkt des Systems, y' der Abstand des Bildes von dem zweiten Hauptbrennpunkt, so ist

das Verhältniss der Bildgrösse zum Object gleich

$$\frac{y'}{\varphi} = \frac{\varphi}{y}.$$

Diese Formel wird angewandt zur Berechnung der Vergrösserung der zusammengesetzten Oculare astronomischer Fernröhre.

Wn.

G. G. STOKES. On an easy and at the same time accurate method of determining the ratio of dispersion of glasses intended for objectives. Proc. of London XXXVII. 485-494.

Aus den beiden Glassorten, die zur Verfertigung eines Objectivs verwandt werden sollen, sind zwei Prismen zu verfertigen, die einander achromatisiren. Dass diese Bedingung erfüllt ist, erkennt man leicht aus dem secundären Spectrum, das sich äusserst schnell verändert, wenn der brechende Winkel des einen Prismas oder die Azimuthalstellung eines Prismas eine Aendederung erleidet. Hinsichtlich der Details muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Cly. (Wn.)

F. KOHLRAUSCH. Ueber die Ermittelung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Totalreflexion. Pogg. Ann. (2) IV. 107-149.

In der rein experimentellen Arbeit wird ein neues Instrument, Totalreflectometer genannt, beschrieben, und für dieses wird die Grenze der Genauigkeit mathematisch untersucht. Wn.

K. W. ZENGER. Ueber eine neue spektrometrische Methode. Prag. Ber. 1877. 20-40.

Beschreibung und Begründung einer Methode zur Bestimmung von Brechungsexponenten. O.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

C. Neumann. Ueber die gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände. Clebsch Ann. XI. 318-340.

Der Verfasser discutirt die von Tait, Thomson und Helmholtz gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände, zeigt, dass denselben kein besonderes Gewicht beizumessen sei, und fasst schliesslich das Resultat seiner Untersuchungen in folgendem Satz zusammen: Will man für die elektrostatischen und elektrodynamischen Erscheinungen eine Theorie haben, welche in all' ihren Betrachtungen von einer gemeinschaftlichen Quelle ausgeht, und welche gleichzeitig in den experimentellen Thatsachen kein handgreifliches Veto findet, so scheint bis zum heutigen Tage die Weber'sche Theorie die einzige zu sein, welche diesen Anforderungen entspricht. Nn.

C. Neumann. Ueber die Zuverlässigkeit des Ampère'schen Gesetzes. Clebsch Ann. XI. 309-318.

Das Ampère'sche Gesetz dürfte in den Augen der meisten Physiker und Mathematiker immer noch auf der bedenklichen Hypothese beruhen, dass die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein einzelnes Stromelement gegen letzteres senkrecht sei. Der Verfasser zeigt, dass das in Rede stehende Gesetz in Wirklichkeit von dieser Hypothese unabhängig ist, dass nämlich zur Ableitung des Gesetzes folgende vier Hypothesen ausreichend sind:

1) Die Kraft R, welche zwei Stromelemente JDs und $J_1 Ds_1$ auf einander ausüben, ist proportional mit

$$JJ_1\, Ds\, Ds_1$$

und schlägt daher in ihr Gegentheil um, sobald in einem der beiden Elemente die Stromrichtung umgekehrt wird.

2) Abgesehen vom Factor $JJ_1 Ds Ds_1$ ist die Kraft R nur noch abhängig von der relativen Lage der beiden Elemente.

3) Die Kraft *R* ist ersetzbar durch diejenigen Kräfte, welche die Componenten von JDs und die Componenten von $J_1 Ds_1$ auf einander ausüben.

4) Die Kraft *R* fällt ihrer Richtung nach zusammen mit der Verbindungslinie der beiden Elemente. Nn.

C. Neumann. Ueber die Zusammensetzung der nach dem Weber'schen Gesetz sich ergebenden Beschleunigungen. Leipz. Ber. 1878. 12-13.

Durch äusserst einfache Betrachtungen gelangt der Verfasser zu folgendem Resultat: Hält man bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes an dem Grundsatze fest, dass die auf einen beweglichen Punkt ausgeübten *Kräfte* nach der Regel des Parallelogramms sich zusammensetzen, so wird dieser Grundsatz nicht mehr gelten für die auf den Punkt ausgeübten *Beschleunigungen*.
Nn.

H. Lorberg. Ueber Magnetinduction und über einige Folgerungen aus dem Clausius'schen Grundgesetz der Elektrodynamik. Pogg. Ann. Suppl. VIII. 581-598.

H. Lorberg. Ueber das Grundgesetz der Elektrodynamik. Pogg. Ann. Suppl. VIII. 599-607.

H. Lorberg. Ueber das elektrodynamische Grundgesetz. Borchardt J. LXXXIV. 305-331.

Nachdem seit einer Reihe von Jahren die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes von verschiedenen Seiten bestritten worden ist, sind neue Grundgesetze von Helmholtz und dann von Clausius (F. d. M. VIII. 681—685) vorgeschlagen worden. Ersteres hat aber eine nicht minder lebhafte Opposition erfahren, und auch über letzteres ist die Discussion noch nicht als abgeschlossen zu betrachten. Insbesondere zieht der Verfasser eine Reihe von Consequenzen aus dem Clausius'schen Gesetz, welche er als mindestens unwahrscheinlich bezeichnet, und kommt derselbe schliess-

lich, wie wir hier vorgreifend bemerken wollen, auf das Weber'sche Gesetz als das allein zulässige zurück, mit dem Zusatz, dass sich in dem elektrischen Strome die beiden Elektricitäten mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten bewegen müssen. Von den vorliegenden Abhandlungen enthält die letzte eine weitere mathematische Ausführung der in der ersten, besonders aber in der zweiten kürzer mitgetheilten Resultate.

Der Verfasser entwickelt zunächst die in einem Stromelement inducirte elektromotorische Kraft, wenn ein Kreisstrom oder ein Linearmagnet um seine Axe gedreht wird, und wenn: a) das Stromelement ruht, b) dasselbe sich um die gleiche Axe dreht.

Dieselbe ist: im Falle a)

nach dem Weber'schen Gesetz: $-\frac{\partial F}{dx}$,

nach dem Clausius'schen Gesetz: 0;

im Falle b)

nach dem Weber'schen Gesetz: 0,

nach dem Clausius'schen Gesetz: $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Hier ist:

$$F = \frac{4}{k^2} J'\left(A\frac{\delta x}{dt} + B\frac{\delta y}{dt} + C\frac{\delta z}{dt}\right),$$

$$A = \int \frac{dx'}{r}, \quad B = \int \frac{dy'}{r}, \quad C = \int \frac{dz'}{r}.$$

Die Integrale sind über den geschlossenen Kreisstrom mit der Intensität J' zu nehmen. Die Zeichen $\frac{\delta x}{dt}$, $\frac{\delta y}{dt}$, $\cdots$ bedeuten abgekürzt:

$$\beta z - \gamma y, \quad \gamma x - \alpha z, \quad \alpha y - \beta x,$$

wo α, β, γ constante Winkelgeschwindigkeiten um die drei Axen sind. Die bis jetzt vorliegenden Versuche über die unipolare Induction in linearen Leitern gestatten keine Entscheidung zwischen den Grundgesetzen. Der Verfasser hat daher die Rechnung auch für den Fall durchgeführt, dass ein Linearmagnet oder Kreisstrom in der Nähe eines körperlichen Leiters rotirt. Dieselbe lässt sich vollständig ausführen, wenn der Körper eine leitende

Kugel ist, und wenn der Linearmagnet in der Verlängerung eines Durchmessers liegt. Auch in diesem Fall führen die beiden Theorien zu entgegengesetzten Resultaten. Ruht die Kugel, so wird sich im Innern und an der Oberfläche freie Elektricität finden, wenn man das Weber'sche Gesetz zu Grunde legt. Rotirt die Kugel gleichmässig mit dem Magnet, so würde dasselbe Resultat nach dem Clausius'schen Gesetze folgen. Obgleich auch hiernach durch Versuche nur schwer zu entscheiden sein wird, so hält doch der Verfasser die Folgerungen des Clausius'schen Gesetzes für wenig wahrscheinlich, und es scheint ihm besonders die Clausius'sche Annahme, dass die Wechselwirkung zweier Elektricitätstheilchen nicht allein von ihren relativen, sondern auch von ihren absoluten Bewegungen abhängen, bedenklich. Beschränkt man sich aber auf die Abhängigkeit der Wechselwirkung von der relativen Bewegung der Elektricitätstheilchen, so kann man durch eine ähnliche Reihe von Schlüssen, wie sie Clausius in seiner oben citirten Arbeit gemacht hat, zu einem Ausdruck für diese Wirkung gelangen. Der Verfasser kommt dabei zunächst zu dem Schluss, dass beide Elektricitäten sich mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten bewegen müssen. Für die Componenten der Wirkung findet er dann einen Ausdruck, welcher aus der Summe zweier Glieder besteht. Das erste Glied ist dasjenige, welches aus dem Weber'schen Gesetz folgen würde; das zweite Glied würde eine elektromotorische Wirkung eines ruhenden Stromendes auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen anzeigen. Da es sehr wahrscheinlich ist, dass eine solche nicht existirt, so wird man bei den vorausgeschickten Annahmen, wie oben bemerkt, auf das Weber'sche Gesetz, als das allein mögliche geführt. Ok.

W. Weber. Ueber die Energie der Wechselwirkung.
Pogg. Ann. (2) IV. 343-373.

Der Verfasser zeigt zunächst, dass, wenn man nur die Wechselwirkung der (theils positiven, theils negativen) Elektricitäten zu Grunde legt, ferner für die Wirkung zweier Stromelemente

auf einander das Ampère'sche Gesetz annimmt, dass dann dem Coulomb'schen Gesetz ein Factor hinzuzufügen ist, welcher zu dem früheren elektrodynamischen Grundgesetz des Verfassers führt. Es handelt sich weiter darum zu zeigen, dass dieses Gesetz in Uebereinstimmung sich befindet mit dem Grundsatz der Erhaltung der Energie, wenigstens in derjenigen Formulirung, welche C. Neumann demselben gegeben hat. Endlich wendet sich der Verfasser gegen die Einwürfe, welche Helmholtz vor einiger Zeit (F. d. M. IV. 545—546) auf Betrachtung des Falles gegründet hat, dass ein Elektricitätstheilchen sich unter dem Einfluss einer constanten Kraft im Innern einer gleichmässig mit Elektricität geladenen Kugelschale bewegt. Eine genauere Analyse zeigt, dass die dort angedeuteten sehr unwahrscheinlichen Bewegungserscheinungen, wie z. B. die Erlangung einer unendlich grossen Geschwindigkeit, nicht eintreten oder doch wenigstens zu keinen Consequenzen führen, welche sich mit den Anschauungen der Mechanik in Widerspruch befänden. Ok.

E. Riecke. Ueber das ponderomotorische Elementargesetz der Elektrodynamik. Gött. Nachr. 1878. 541-550.

Kurzer Auszug aus einer Abhandlung des Verfassers. Da letztere dem Referenten nicht vorliegt, so muss derselbe auf eine Beurtheilung der erhaltenen Resultate verzichten. Nach Angabe des Verfassers enthält die Abhandlung zunächst eine Ableitung des Ampère'schen Gesetzes mit möglichster Beschränkung der willkürlichen Voraussetzungen, sowie eine Besprechung einer ähnlichen Ableitung, welche von C. Neumann herrührt. Durch geeignete Zerlegung der nach dem Ampère'schen Gesetz resultirenden Kraft in Componenten lässt sich zeigen, dass das von Helmholtz vorgeschlagene Gesetz sich als ein Theil des Ampère'schen ergiebt, ferner dass das Helmholtz'sche Gesetz unvereinbar ist mit Entladungserscheinungen Geissler'scher Röhren. Auch das Clausius'sche Gesetz verdient keinen Vorzug vor dem Ampère'schen, einmal weil nach demselben das Princip von Wirkung und

Gegenwirkung nicht erfüllt wird, sodann weil dasselbe den Einfluss eines Zwischenmediums mit in Betracht zieht, von dem man sich vorläufig noch keine Vorstellung zu bilden vermag. So wird man zu dem Weber'schen Gesetz als dem bis jetzt am besten begründeten zurückgeführt. Ok.

F. Niemöller. Elektrodynamische Versuche mit deformirbaren Stromleitern. Pogg. Ann. (2) V. 433-448.

Der Stromleiter, mit welchem der Verfasser experimentirt, besteht aus einem horizontalen Metallstab, welcher bifilar an zwei nach oben divergirenden Silberdrähten hängt. Wird durch dieses System ein elektrischer Strom geleitet, und lässt man darauf elektromagnetische oder elektrodynamische Kräfte wirken, so wird dasselbe um eine verticale Axe gedreht, und es ist mit dieser Drehung eine Deformation verbunden. Als ablenkende Kräfte benutzt der Verfasser den Erdmagnetismus und die elektrodynamische Wirkung von Stromdrähten, welche in der Nähe des Systems befindlich sind.

Für den ersten Fall wird die Berechnung der Ablenkung vollständig durchgeführt. Dieselbe wird mit Benutzung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten angesetzt und ergiebt ein Resultat, welches recht genau mit den Versuchen übereinstimmt.

Im Anschluss hieran weist der Verfasser nach, dass Versuche dieser Art keine Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen liefern können, dass besonders das Helmholtz'sche Potentialgesetz dieselben Kraftcomponenten liefert, wie das Ampère'sche Gesetz, und dass auch die Grassmann'schen und Clausius'schen Fundamentalformeln in diesem Fall zu gleichen Resultaten führen.

Zum Schluss macht der Verfasser auf eine Folgerung aus dem neuen Clausius'schen Grundgesetze aufmerksam, welche mit unsern gewöhnlichen Vorstellungen von der Elektricität im Widerspruch steht. Wird nämlich ein mit Elektricität geladener Körper mit einer gleichmässigen Geschwindigkeit v bewegt, so sind die

Componenten der Wirkung der ganzen auf dem Körper befindlichen Elektricität in Bezug auf ein Theilchen:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial \xi}(1-kv^2), \quad \text{etc.}$$

Dieselben verschwinden, wenn V innerhalb des Körpers constant ist. In dem besonderen Fall, wo

$$v = \sqrt{\frac{1}{k}},$$

verschwinden dieselben aber auch ohne diese Bedingung, d. h. freie Elektricität befindet sich auf der Kugel in jeder Vertheilung im Gleichgewicht. Das Gleichgewicht ist ein indifferentes. Die betreffende Geschwindigkeit ist in diesem Fall der Weber'schen Constanten gleich. Ok.

R. Clausius. Déduction d'un nouveau principe électrodynamique. Liouville J. (3) IV. 63-119.

Vergl. F. d. M. IX. 734-735. Ok.

R. Clausius. Ueber einige neue von Herrn Zöllner gegen meine elektrodynamischen Betrachtungen erhobene Einwände. Pogg. Ann. (2) IV. 217-226.

Fortsetzung der Discussion zwischen Zöllner und Clausius (F. d. M. IX. 734—735) über das von Letzterem aufgestellte elektrische Elementargesetz. Das von Clausius gegen das Weber'sche Gesetz erhobene Hauptbedenken bestand darin, dass nach demselben constante Ströme Influenzwirkungen hervorbringen müssten, welche bisher nicht beobachtet worden sind. Zöllner führt dagegen an, dass diese Wirkung sehr klein sein müsste, weil der Ausdruck für dieselbe einen sehr kleinen Zahlenfactor enthält. Nach Clausius kann aber die Kleinheit dieses Factors an sich nicht entscheidend sein, da z. B. auch alle Induktionswirkungen durch Ausdrücke wiedergegeben werden, welche denselben Factor enthalten. Ferner hat Zöllner den Versuch gemacht, unter gewissen Annahmen das Clausius'sche Gesetz auf

das Weber'sche zurückzuführen. Durch Vergleichung der drei in Frage kommenden Elementargesetze (auch das Riemann'sche wird hierzu herangezogen) zeigt Clausius die Unmöglichkeit einer solchen Reduction. Ok.

H. FRITSCH. Theorie der ruhenden Elektricität, behandelt mit Baconischer Induction. Pr. Königsberg i. Pr.

Der Verfasser theilt alle zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen gebildeten Hypothesen in drei Hauptklassen: die unitarische (Euler-Edlund), die dualistische (die gewöhnliche) und die Bewegungshypothese (Hankel, Pogg. Ann. CXXVI). Durch eine Reihe von Schlüssen sucht er nachzuweisen, dass die beiden ersten physikalisch unzulässig sind, so dass nur die letzte als brauchbar übrig bleibt. Ok.

G. J. MICHAELIS. Opmerkingen over de theorien van Weber, Riemann en Clausius der electrodynamische verschijnselen. Nieuw Arch. IV. 151-181.

Die elektrodynamischen Theorien von Ampère, Weber, Riemann und Clausius in Verbindung mit den Betrachtungen und Berechnungen von Grassmann, Helmholtz, Maxwell, Neumann und anderen werden ausführlich besprochen und einer neuen Kritik unterworfen.

In den folgenden Hauptsätzen fasst der Autor das Resultat seiner Untersuchung zusammen:

Nur die Wirkung geschlossener linearer Ströme auf einander kann durch eine ganz bestimmte Formel dargestellt werden. Die gegenseitige Wirkung von Stromelementen wird jedoch ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$X = -\frac{1}{c^2}\, ii'\, ds\, ds' \left(\frac{\xi}{z^3} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{2\xi}{z^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 \xi . Q}{\partial s \partial s'} \right),$$

$$Y = -\frac{1}{c^2}\, ii'\, ds\, ds' \left(\frac{\eta}{z^3} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{2\eta}{z^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 \eta . Q}{\partial s \partial s'} \right),$$

$$Z = -\frac{1}{c^2}\, ii'\, ds\, ds' \left(\frac{\zeta}{z^3} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{2\zeta}{z^2} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial^2 \zeta . Q}{\partial s \partial s'} \right).$$

Hierin ist $x'-x=\xi$, $y'-y=\eta$, $z'-z=\zeta$ genommen, und Q stellt eine unbekannte Function von z vor. Bei der Hypothese, dass alle Kräfte im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirken, geben die Gleichungen

$$X = p(X''-X')+X',$$
$$Y = p(Y''-Y')+Y',$$
$$Z = p(Z''-Z')+Z'$$

die allgemeinste Form der Grundformel der elektrischen Kräfte, welche überhaupt möglich ist. Dabei bedeuten X', Y', Z' die Componenten der Kräfte, welche Weber für die gegenseitige Wirkung von zwei elektrischen Punkten gefunden hat, X'', Y'', Z'' diejenigen, welche Riemann angenommen hat, p endlich eine willkürliche Zahl. Wenn vorausgesetzt wird, dass in einem elektrischen Strome die beiden Elektricitäten sich mit gleicher und entgegengesetzter Geschwindigkeit bewegen, kann man aus diesen Hauptformeln alle elektrodynamischen und alle Inductions-Erscheinungen auf gleiche Weise ableiten. Wenn dagegen vorausgesetzt wird, dass in einem Strome nur die positive Elektricität sich bewegt, machen es die Experimente von Weber und Kohlrausch wahrscheinlich, dass die genannten Hauptformeln den Beobachtungen nicht widersprechen; das Gegentheil ist jedenfalls nicht bewiesen.

Eine Hauptformel, in der die absoluten Geschwindigkeiten der Theilchen vorkommen, setzt voraus, dass ein Medium Ursache der Wirkung ist.

Versuche, um durch eine solche Formel die elektrodynamischen und Inductions-Erscheinungen in Stromelementen zu erklären, ohne die Bewegung des vorausgesetzten Mediums in Rechnung zu bringen, sind unrichtig, obgleich sie für geschlossene Ströme vielleicht ein gutes Resultat geben können. G.

J. C. Lewis. On Ampère's electrodynamic theory.
Messenger (2) VIII. 84-87.

Elementare Beweise für einige der Resultate der Ampère'schen Theorie, welche gewöhnlich durch Integration aus seiner berühmten Formel hergeleitet werden. Die in dieser Arbeit ge-

gebenen Beweise handeln 1) von der Existenz der elektrodynamischen Wirkungsrichtungen (directrices de l'action électrodynamique) in jedem Punkte des Raumes. 2) Die Wirkung auf ein Stromelement ist senkrecht zu dem Element und zu der Richtung. 3) Die Wirkung auf ein Element ist proportional der Grösse der „wirkenden Kraft" und dem Sinus des Winkels zwischen ihr und dem Element. Diese Sätze werden alle direct aus den experimentellen Gesetzen abgeleitet, auf denen die Ampère'sche Theorie beruht. Glr. (O.)

C. Maxwell. On the electrical capacity of a long narrow cylinder, and of a disk of sensible thickness. Proc. L. M. S. IX. 94-101.

Bezeichnet man mit E die einem leitenden Körper mitgetheilte Elektricitätsmenge, mit ψ_0 den constanten Werth des Potentials bei dieser für sich in Ruhe befindlichen Ladung, mit Q_0 die potentielle Energie und mit K die Capacität des Condensators, so bestehen die Gleichungen:

$$Q_0 = \tfrac{1}{2}\psi_0.E,$$
$$E = K.\psi_0,$$

also:

$$K = \tfrac{1}{2}\frac{E^2}{Q_0}.$$

Da nun Q_0 der kleinste Werth ist, welchen die Ladung E bei irgend welcher Vertheilung hervorbringen kann, so ist, wenn Q die potentielle Energie für irgend eine andere Anordnung bedeutet, jedenfalls:

$$K > \tfrac{1}{2}\frac{E^2}{Q}.$$

Hieraus kann man Annäherungswerthe für K berechnen, indem man eine solche Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche des Körpers annimmt, dass Q ausgerechnet werden kann. Ist z. B. der Leiter ein sehr langer, dünner Cylinder (Länge l und Radius b), so kann man die Dichtigkeit constant annehmen und erhält:

$$K > \frac{1}{\lg \frac{4l}{b} - 1}.$$

Um weitere Annäherungen zu erhalten, benutzt der Verfasser allgemeiner gehaltene Formeln für die Dichtigkeit λ:

$$\lambda = \Sigma A_i P_i \left(\frac{\xi}{l}\right).$$

Dann ist das Potential:

$$\psi = \Sigma A_i Q_i(\alpha) . P_i(\beta),$$

wo

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \frac{r_1 + r_2}{l}, \qquad \beta = \tfrac{1}{2} \frac{r_2 - r_1}{l},$$

r_1 und r_2 die Entfernungen des betreffenden Punktes von den Endpunkten der Cylinderaxe bedeuten. P_i ist die i^{te} Kugelfunction, und

$$Q_i(\alpha) = P_i(\alpha) . \lg \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} + R_i(\alpha);$$

$R_i(\alpha)$ endlich ist eine ganze Function von α, deren allgemeiner Ausdruck nicht gegeben ist. Mit Hilfe einer solchen, zunächst noch ganz willkürlichen Vertheilung werden weitere Annäherungswerthe der Capacität berechnet. Ein ähnliches Verfahren wendet der Verfasser auch auf eine dünne Platte (Radius a, Dicke b) an, bei welcher er sich zunächst die Elektricität über die beiden kreisförmigen Grenzflächen so vertheilt denkt, wie sie sich anordnen würde, wenn jede nur allein vorhanden wäre. Man erhält für die Capacität der Scheibe:

$$K > \frac{2a}{\pi - \frac{b}{a}\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^4\right] \lg \left[\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 1\right]},$$

oder, wenn $\frac{b}{a}$ ein sehr kleiner Bruch ist, annähernd

$$K = \frac{2}{\pi}\left(a + \frac{1}{2\pi} b \lg \frac{a}{b}\right).$$

Ok.

A. Cayley. On the distribution of electricity on two spherical surfaces. Phil. Mag. (5) V. 54-61.

Die Arbeit enthält eine neue Lösung des Problems von der Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln. Die Radien der Kugeln seien a und b, ihre Mittelpunkte A und B, die Entfernung zwischen A und $B = c$, so dass $c > a+b$. Der Verfasser zeigt, dass die Lösung des Problems sich darauf reducirt, die Form der Functionen φ und Φ in der Functionalgleichung

$$a\varphi(x)+\frac{b^2}{c-x}\,\Phi\left(\frac{b^2}{c-x}\right)=h,$$

$$\frac{a^2}{c-x}\,\varphi\left(\frac{a^2}{c-x}\right)+b\,\Phi(x)=\gamma$$

zu finden, wo h und γ die Potentiale der Kugeln A und B bezeichnen.

Für einen Punkt auf der Axe in der Entfernung x vom Mittelpunkt der ersten Kugel, also von A, ist das Potential der Elektricität auf dieser Oberfläche $a\varphi(x)$ oder $\frac{a^2}{x}\varphi\left(\frac{a^2}{x}\right)$, je nachdem der Punkt ein innerer oder äusserer ist. Aehnlich ist das Potential für die zweite Kugel $b\Phi(x)$ oder $\frac{b^2}{x}\Phi\left(\frac{b^2}{x}\right)$. Die Lösung der Gleichungen wird das Potential für einen äusseren Punkt geben, dessen Entfernungen resp. x oder $c-x$ sind, und es ist leicht mit Hülfe der Kugelfunctionen das Potential eines Punktes, der nicht auf der Axe liegt, zu finden, wenn das eines Punktes auf der Axe bekannt ist. Ebenso lässt sich die elektrische Dichtigkeit in einem Punkte der Oberfläche bestimmen. Herr Cayley zeigt noch, dass seine Lösung mit der von W. Thomson in seiner „theory of electrical images“ gegebenen übereinstimmt.

Csy. (O.)

D. Bobylew. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf Leitern, welche aus heterogenen Theilen bestehen. Clebsch Ann. XIII. 183-232.

Berühren sich zwei verschiedene Metalle, so werden dieselben

schwach elektrisch, und zwar zeigen sie elektrische Ladungen von verschiedenem Vorzeichen. Um diese Erscheinung zu erklären, nimmt man an ihrer gemeinsamen Grenzfläche eine Scheidungskraft an, welche im Stande ist, die beiden Körper so zu laden, dass das Potential zwar im Innern eines jeden constant ist, diese Constante aber in beiden Körpern verschiedene Werthe hat. In der vorliegenden Abhandlung untersucht der Verfasser, durch welchen Ausdruck das Potential der freien Elektricität in dem Fall wiederzugeben ist, dass der Körper aus zwei heterogenen Metallen besteht. Hierbei wird zunächst angenommen, dass derselbe im Ganzen die Form einer Kugel (Radius R) hat, welche in zwei ungleiche Segmente zerfällt, von denen das eine aus Kupfer, das andere aus Zink besteht. Der Ausdruck für das Potential V muss dann den folgenden Bedingungen genügen:

Für den äusseren Raum muss $\Delta V = 0$ sein; V selbst und seine ersten Differentialquotienten sollen dort endlich, stetig und einwerthig sein und in unendlicher Entfernung verschwinden. Auf dem Theil der Kugeloberfläche, welcher aus Zink besteht, muss V den constanten Werth $C(Zn)$ erhalten, während auf der Kupferfläche der davon verschiedene Werth $C(Cu)$ ist. Es wird gezeigt, dass die folgende Function diesen Bedingungen genügt:

$$V = \frac{R^2}{4\pi}\left\{C(Zn)\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{\partial r}\right)_{r=R}\sin f.df.dp\right.$$
$$\left.+C(Cu)\int_0^{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{T}-\Phi\right)}{\partial r}\right)_{r=R}\sin f.df.dp\right\}.$$

Hierin ist gesetzt:

$$\Phi = \frac{R}{\sqrt{(r\varrho)^2-2r\varrho.R^2\cos\gamma+R^4}},$$
$$\frac{1}{T} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{r^n}{\varrho^{n+1}}P_n(\cos\gamma).$$

T ist der Abstand zweier Punkte, deren Polarcoordinaten ϱ, φ, ψ und r, f, p sind; γ ist der Winkel r, ϱ. Das Polarcoordinaten-

system ist so gelegt, dass die Axe senkrecht zur Grenzfläche *Zn*, *Cu* steht. Der Winkel α endlich giebt den Winkelabstand des Grenzkreises von der Axe.

Bei eingehender Untersuchung der angegebenen Function zeigt sich, dass dieselbe den gestellten Bedingungen im äusseren Raum und auf der Oberfläche genügt, dass sie aber in dem Grenzkreise vieldeutig ist, d. h. dass durch denselben alle diejenigen Niveauflächen gehen, deren Constanten zwischen $C(Cu)$ und $C(Zn)$ liegen. Für den äusseren Raum kann V angesehen werden als Summe der Potentiale von Oberflächenbelegungen der beiden Theile der Kugeloberfläche und einer Doppelbelegung auf der inneren Grenzfläche. Es lässt sich also schreiben:

$$V = \int_1 \frac{\sigma_1 do}{T} + \int_2 \frac{\sigma_2 do}{T} + (Zn \mid Cu)\frac{\Omega}{4\pi}.$$

Hier bezieht sich das erste Integral auf die *Cu* Oberfläche, das zweite auf die *Zn* Oberfläche, Ω bedeutet die Grösse der Oeffnung der Kegelfläche von dem betreffenden Punkt nach dem Grenzkreise. Die Dichtigkeiten σ_1 und σ_2 lassen sich durch elliptische Integrale ausdrücken, und es zeigt sich, dass beide nach dem Grenzkreise zu unendlich werden. Die Constante ist

$$(Zn \mid Cu) = C(Zn) - C(Cu).$$

In dem letzten Theile der Abhandlung werden ähnliche Rechnungen für den Fall ausgeführt, dass der leitende Körper aus einer grösseren Zahl heterogener Metalle zusammengesetzt ist.

Ok.

W. M. Hicks. On velocity and electrical potentials between parallel planes. Quart. J. XV. 274-315.

Befindet sich die elektrische Masse 1 in dem Punkt P eines leitenden Mediums und ist dasselbe durch zwei parallele Ebenen begrenzt, so ist das resultirende Potential im Punkt Q:

$$\frac{1}{QP} + \Sigma\frac{1}{QP_r} + \Sigma\frac{1}{QP'_r}.$$

Die Punkte P_r und P'_r erhält man durch fortgesetzte Spiegelung in Bezug auf die beiden Ebenen.

Denkt man sich anstatt des Massenpunktes eine den Ebenen parallele unendlich lange und gleichmässig mit Elektricität belegte Linie, so findet Bewegung nur statt in einer zu der Geraden senkrechten Ebene. Das Potential ist in diesem Fall:

$$\lg PQ + \Sigma \lg (QP_r) + \Sigma \lg (QP'_r).$$

Die Lage der Punkte P ist leicht abzuleiten. Setzt man

$$F(x, r) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+4na)^2+r^2}},$$

so ist im ersten Fall das Potential:

$$\Phi = F(x+2a+b, r) + F(x-b, r) + C.$$

Setzt man ferner

$$f(x, r) = \tfrac{1}{2} \lg \prod_{-\infty}^{+\infty} [(x+4na)^2+r^2],$$

so ist im zweiten Fall:

$$\Phi = f(x+2a+b, r) + f(a-b, r) + C.$$

Der Verfasser beschäftigt sich hauptsächlich mit der Transformation und weiteren Discussion dieser Ausdrücke. Mit dem zweiten Fall beginnend, bespricht er in den §§ 4—15 eine Reihe verschiedener Potentialausdrücke für den Fall einer und mehrerer Elektricitätsquellen und stellt die Gleichungen für die Stromlinien fest. Im § 16 wird der erste Ausdruck transformirt. In den folgenden §§ 17—37 denkt sich der Verfasser den Raum durch zwei Paare paralleler zu einander senkrechter Ebenen begrenzt und bespricht ähnliche elektrische Strömungen innerhalb desselben. Zum Schluss folgen Anwendungen der erhaltenen Formeln und Sätze auf einige analoge Probleme der Wärmeleitung. Ok.

H. A. Rowland. Theory of electric absorption.

Am. J. I. 53-59.

Nach der Entladung von Leydener Flaschen, Telegraphenkabeln etc. tritt häufig nach einiger Zeit von selbst eine schwächere Ladung, von demselben Vorzeichen wie die erste, wieder auf. Der Verfasser will feststellen, wie der Isolator beschaffen sein muss, wenn eine solche Erscheinung (man erklärt sie gewöhn-

lich durch eine Absorption der Elektricität in dem Isolator) möglich sein soll. Ausgehend von den von Maxwell (Treatise Art. 325) aufgestellten Hauptgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial V}{\partial z}\right)+4\pi\varrho = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial V}{\partial z}\right)-\frac{d\varrho}{dt} = 0,$$

wo V das Potential, ϱ die Dichtigkeit im Punkte $x\,y\,z$ bedeuten; $\varkappa$ das specifische Induktionsvermögen, k das Leitungsvermögen sind ebenfalls in dem Körpersystem, welches aus Leitern und Nichtleitern bestehen kann, als veränderlich anzusehen.

Soll keine elektrische Absorption eintreten, so muss das Verhältniss der Dichtigkeiten zweier beliebiger Punkte stets dasselbe sein und bleiben. Setzt man dasselbe:

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = c,$$

so lassen die oben gegebenen Gleichungen die folgenden Lösungen zu:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-ct}, \quad V = V_0 e^{-ct},$$

wo $\varrho = -k\dfrac{dV}{dn}$ die Stromstärke bedeutet und $c = 4\pi m$, $m = \dfrac{k}{\varkappa}$ gesetzt ist. Man kann aus diesen Gleichungen umgekehrt schliessen: Absorption tritt ein, wenn $\dfrac{k}{\varkappa}$ nicht für das ganze System constant ist. Dies kann sein:

1. wenn der Körper aus heterogenen Theilen besteht,
2. wenn die Leitung in demselben nicht dem Ohm'schen Gesetze folgt, also k von den elektrischen Kräften abhängt,
3. wenn $\varkappa$ von letzteren abhängt.

Der Verfasser untersucht hiernach weiter diejenigen Materialien, welche hauptsächlich elektrische Absorption zeigen, und behandelt dann noch den Fall eines aus parallelen Platten bestehenden Condensators. Ok.

J. Moutier. Sur un théorème de l'électricité. Soc. phil. Paris (7) I. 145-146.

Zwei Leiter seien in Verbindung mit Elektricitätsquellen von constantem Niveau. Bei einer kleinen Verschiebung der Leiter wird den Quellen die doppelte Energie entzogen, welche der von den Leitern geleisteten Arbeit entspricht; die letztere ist gleich dem Energiezuwachs der Leiter. Wn.

J. Moutier. Sur le condensateur plan. Soc. phil. Paris (7) II. 64-67.

J. Moutier. Sur les surfaces de niveau d'un corps électrisé. Soc. phil. Paris (7) II. 76-78.

Der Verfasser giebt eine Reihe von Bemerkungen über Probleme der Elektrostatik, welche sämmtlich schon als gelöst zu bezeichnen sind. Da derselbe meist sehr vereinfachende Annahmen zu Grunde legt, so ist es nicht zu verwundern, dass auch die Rechnungen sehr einfach ausfallen, und können dieselben vielleicht bei einer elementaren Behandlung des Gegenstandes mit Nutzen verwandt werden. Ok.

J. Moutier. Sur la formule d'Ampère. Soc. phil. Paris (7) II. 141-145.

Ausgehend von der Annahme, dass die Wirkung zweier Stromelemente durch die Formel ausgedrückt werden kann:

$$F = ii'.ds\,ds'[\sin\vartheta.\sin\vartheta'\cos\varepsilon f(r) - \cos\vartheta.\cos\vartheta'\varphi(r)],$$

wo $f(r)$ und $\varphi(r)$ zwei noch unbekannte Functionen der Entfernung sind, zeigt der Verfasser in recht einfacher Weise, wie durch zwei Versuche von Ampère diese Functionen bestimmt und der Ausdruck in die gewöhnliche Ampère'sche Formel übergeführt werden kann. Ok.

J. Moutier. Sur l'induction électrodynamique. Soc. phil. Paris (7) I. 197-201.

Es wird die Methode besprochen, die Vertheilung des Magnetismus eines Stabes zu bestimmen durch Verschiebung einer Spirale und Beobachtung der dadurch hervorgebrachten Inductionsströme. Zu dem Zweck denkt sich der Verfasser den Magnet ersetzt durch parallele Kreisströme und die allgemeine Inductionsformel auf diesen Fall angewandt. Der Verfasser kommt zu dem Resultat, dass die Inductionsströme nur ein angenähertes Mass der magnetischen Vertheilung geben können, und dass die Stärke des Stromes bei unverändertem Widerstand nahezu unabhängig ist von dem Radius des Inductionskreises. Ok.

J. Boussinesq. Sur diverses propriétés dont jouit le mode de distribution d'une charge électrique à la surface d'un conducteur ellipsoïdal. C. R. LXXXVII. 978-979.

Aus der bekannten Anordnung der Elektricität auf der Oberfläche eines Ellipsoids zieht der Verfasser einige geometrische Folgerungen, welche ohne Beweis mitgetheilt werden. Ok.

Mascart. Sur la théorie de la propagation de l'électricité dans les conducteurs. C. R. LXXXVI. 965-968.

Unter der Voraussetzung, dass sich die Elektricität nach Art der geleiteten Wärme verbreitet, giebt der Verfasser von der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

in folgender Weise eine particuläre Lösung. Setzt man:

$$V = f(y), \quad y = \frac{\alpha x}{2\sqrt{t}},$$

so ist:

$$\frac{d^2 V}{dy^2} + 2y\frac{dV}{dy} = 0$$

und

$$V = C\int_0^y e^{-y^2}.dy + C'.$$

Dieser Ausdruck kann auf das folgende Problem angewandt werden: Eine Leitung werde an dem einen Ende eine kurze Zeit τ auf das Potential V_1 gebracht und dann zur Erde abgeleitet. Das Potential an einem Punkt der Leitung U kann dann ausgedrückt werden durch:

$$U = V(t) - V(t-\tau).$$

Für eine sehr kleine Zeit τ erhält man dann:

$$U = \tau \frac{V_1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} . e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{4t}}.$$

Man kann diesen Vorgang als Fortpflanzung einer einzigen, elektrischen Welle ansehen. Bezeichnet man die Zeit, welche vergeht, bis U sein Maximum erreicht, mit T, so ist:

$$T = \frac{\alpha^2 . x^2}{6}.$$

Diese Zeit kann in gewissem Sinne als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität angesehen werden. Ok.

A. Cornu. Sur l'extension à la propagation de l'électricité des formules de Fourier relatives à la diffusion de la chaleur. C. R. LXXXVI. 1120-1123.

Der Verfasser stellt die Frage, ob es gestattet sei, die Formeln der Wärmeleitung auf die Fortpflanzung der Elektricität zu übertragen, also letztere durch die partielle Differentialgleichung auszudrücken:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = m^2 . \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

wo V das Potential der freien Elektricität bedeutet. Ohne den Versuch zu machen, diese Frage, welche übrigens schon von Kirchhoff (Pogg. Ann. C und CII) sehr gründlich erörtert worden ist, wirklich zu beantworten, giebt der Verfasser ein sehr einfaches Integral jener Gleichung:

$$V = A . e^{-\beta x} . \sin 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} - \frac{x}{aT} \right),$$

wo

$$\beta = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{\pi}{T}}, \quad a = 2m\sqrt{\frac{\pi}{T}},$$

welches die Fortpflanzung schnell wechselnder Ströme auf langen Telegraphenleitungen ausdrücken könnte. Er zieht daraus den Schluss, dass, wenn man auf zwei verschieden langen Leitungen an den Enden ($x = l$ und l') gleiche Amplituden erhalten will, die Schwingungszeiten T und T' der Gleichung genügen müssen: $\frac{T}{l^2} = \frac{T'}{l'^2}$. Dies soll mit angestellten praktischen Untersuchungen nicht übereinstimmen. Ok.

W. v. Bezold. Die Theorie der stationären Strömung unter ganz allgemeinen Gesichtspunkten betrachtet. Pogg. Ann (2) III. 12-36.

Bekanntlich besteht eine gewisse Analogie zwischen constanten elektrischen Strömen und den stationären Strömungen von Flüssigkeiten in Röhren oder verzweigten Röhrensystemen. Der Verfasser hat diese Analogie dadurch in eine mathematische Form gebracht, dass er stationäre Strömungen von Punktsystemen ganz allgemein betrachtet. Legt man für ein Stück einer Stromlinie die Fundamentalgleichung zu Grunde:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial s} - \xi,$$

wo links die Beschleunigung, rechts die beschleunigenden Kräfte $\left(-\frac{\partial V}{\partial s}\right)$ und eine Widerstandskraft $(-\xi)$ steht, so kann man eine Reihe von Aufgaben lösen, welche die bekannten Gesetze für elektrische Ströme mit Einschluss der Wärmeentwickelung liefern. Zum Schluss wird noch der Fall von Strömungen mit veränderlicher Geschwindigkeit behandelt, welcher bei Luftströmungen in Röhrensystemen vorkommt. Ok.

F. Auerbach. Ueber die Verbreitung stationärer elektrischer Ströme in leitenden Flächen. Pogg. Ann. (2) III. 498-516.

Im Anschluss an die ersten Arbeiten über diesen Gegenstand von Kirchhoff (Pogg. Ann. LXIV) und Quincke (Pogg. Ann. XCVII) hat der Verfasser eine Reihe einfacherer Probleme der Stromausbreitung in Ebenen und begrenzten Stücken eines Cylindermantels behandelt. Die Aufgabe kann als gelöst gelten, wenn das Potential der freien Elektricität bekannt ist. Es handelt sich dann nur noch um die Discussion der Niveau- und der Stromlinien. Es mag genügen, hier denjenigen Fall näher zu betrachten, den der Verfasser auch experimentell untersucht hat. Setzt man:

$$\varphi = \frac{i}{4\pi k s}\cdot \lg\left(\frac{\varrho^4 r_2^2}{r^4 \varrho_2^2}\right),$$

so giebt dieses Potential die angenäherte Lösung der Verbreitung der Elektricität in einem unendlich langen ebenen Streifen von der Breite b, bei welchem die Elektroden an den Rändern einander grade gegenüberliegen. In der Formel bedeuten r und ϱ die Entfernungen eines Punktes des Streifens von den Elektroden, r_2 und ϱ_2 die Entfernungen desselben Punktes von den Spiegelbildern des Mittelpunktes der die Elektroden verbindenden Linie in Bezug auf die beiden Grenzlinien. Ok.

N. Oumoff. Ueber die stationäre Bewegung der Elektricität auf leitenden Flächen von willkürlicher Form. Mosk. Math. Samml. IX. (Russisch).

P.

L. Ditscheiner. Ueber den galvanischen Widerstand eines ebenen Ringes. Pogg. Ann. (2) V. 282-287.

Lässt man in zwei Punkten einer leitenden Kreisscheibe einen constanten Strom ein- resp. austreten, so erhält man das Potential der freien Elektricität für einen Punkt der Scheibe in der Form

$$v = M - \frac{E}{4\pi\varkappa\delta}\lg\left(\frac{\varrho_1\varrho_1'}{\varrho_2\varrho_2'}\right)^2,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die Entfernungen des Punktes von den Elektroden, ϱ_1', ϱ_2'

die Entfernungen desselben Punktes von den Bildern der Elektroden in Bezug auf die Kreislinie nach reciproken Radien Vectoren bedeuten. Der Verfasser zeigt, dass man in ähnlicher Weise das Potential und also auch den Widerstand bei einem Ring, begrenzt von zwei concentrischen Kreisen, finden kann. Man hat dann die beiden Elektroden in der besprochenen Weise in Bezug auf beide Grenzkreise abzubilden; ebenso die ersten Bilder u. s. w. Wir müssen darauf verzichten, hier die entstehenden, complicirten Formeln wiederzugeben.

Zum Schluss weist der Verfasser einen Fehler nach, den Auerbach (vgl. das vorige Referat) bei Berechnung des Durchgangs der freien Elektricität durch einen ebenen Streifen begangen hat. Ok.

O. Chwolson. Ueber das Problem der Stromverzweigung in einer ebenen Platte. Schlömilch Z. XXIII. 47-60.

Der Verfasser behandelt die Stromverzweigung in einer grossen Anzahl verschiedenartig begrenzter Platten. Der Endzweck seiner Betrachtungen ist indess stets nur, die Vertheilung elektrischer Massen so anzugeben, dass das von denselben herrührende logarithmische Potential den Bedingungen des Problems genügt, d. h. dass für jeden Punkt des Randes

$$\frac{dV}{dn} = 0.$$

Für eine erste Gruppe von Platten bedarf es dazu der Hilfssätze:

a) Für eine beliebige Gerade ist $\frac{dV}{dn} = 0$, wenn die elektrischen Massen symmetrisch in Bezug auf dieselbe angeordnet sind.

b) Für einen Kreis (Mittelpunkt M), für welchen zwei Massen m innerhalb und ausserhalb auf demselben Radius in den Punkten P und Q liegen, und für welche $MP.MQ = a^2$, ist

$$\frac{dV}{dn} = \frac{m}{a},$$

wo a der Kreisradius ist.

Ist zunächst die Platte ein Halbkreis, die eine Elektrode in P_1, so hat man zu derselben Q_1 nach Satz b), P'_1 und Q'_1 nach a) zu bestimmen und allen vier Punkten die gleiche Masse zu geben.

Macht man dieselbe Operation für die andere Elektrode, so besteht das Potential aus dem logarithmischen Potential der acht Massen.

In ähnlicher Weise folgen Anwendungen auf Platten, welche Kreissectoren sind, auf solche, welche durch die unendlich langen Schenkel eines spitzen Winkels begrenzt sind und auf verschiedene andere Grenzcombinationen von Kreisen und Geraden. In allen diesen Fällen können die elektrischen Massen in einem System von Punkten concentrirt gedacht werden.

Es giebt aber auch solche Fälle von Begrenzung, bei welchen die Massen continuirlich, z. B. auf Linien, vertheilt sind. Dies tritt ein, wenn die Platte von zwei unendlich langen Geraden begrenzt ist, welche sich unter stumpfem Winkel schneiden. Nachdem der Verfasser zunächst nachgewiesen hat, dass auch bei unendlich ausgedehnten Platten das Potential durch die gewöhnlichen Bedingungen eindeutig definirt ist, giebt er die Lage der Massenvertheilung in dem eben erwähnten Fall, ohne die Rechnung weiter durchzuführen. Ok.

A. Roiti. Sulla determinazione delle costanti degli elettromotori di Holtz. Atti d. Ist. Ven. (5) IV. 1007-1030.

Die Arbeit ist ausschliesslich experimentell. Es handelt sich um die Vergleichung der elektromotorischen Kraft einer in Bewegung befindlichen Maschine mit einer galvanischen Kette vermittelst eines Elektrometers. Ok.

E. Riecke. Versuch einer Theorie der elektrischen Scheidung durch Reibung. Pogg. Ann. (2) III. 414-436.

Vgl. F. d. M. IX. 739—740. Ok.

E. Dorn. Ueber die galvanischen Ströme, welche beim Strömen von Flüssigkeiten durch Röhren erzeugt werden. Pogg. Ann. (2) V. 20-45.

Die in physikalischer Beziehung interessante Abhandlung enthält nur einige einfache Berechnungen über die Bestimmung der elektromotorischen Kraft der erzeugten Ströme durch Galvanometerablenkungen und über die gleichzeitige Berücksichtigung der Polarisation. Ok.

H. Dirscher. Neue Methode, um den Widerstand einer galvanischen Batterie zu messen. Schlömilch Z. XXIII. 138-139.

Da die Beschreibung dieser Methode ohne Zeichnung nicht gut wiedergegeben werden kann, so mag die Bemerkung genügen, dass dieselbe recht einfach ist, da man dazu nur eines Differentialgalvanometers und eines Rheostaten bedarf. Die Rechnungen sind elementar und enthalten nur Anwendungen der bekannten Formeln der Stromverzweigung. Ok.

R. Ferrini. Sulla resistenza delle eliche degli elettromagneti telegrafici. Rend. Ist. Lomb. (2) XI. 34-39.

Der Verfasser geht aus von einer Entwicklung von Maxwell (treatise on electricity), nach welcher ein Elektromagnet die bestmögliche Construction hat, wenn die Gleichung gilt

$$\frac{\lambda}{R} = \frac{x-a}{x}.$$

Hier bedeutet λ den Widerstand der Magnetisirungsspirale, R den Widerstand des äusseren Stromkreises, x die Dicke des besponnenen Drahtes, $x-a$ diejenige des unbesponnenen Drahtes der Magnetisirungsspirale.

Diese Beziehungen werden angewandt auf eine Telegraphenlinie, wobei ein veränderter Ausdruck für den äusseren Widerstand zu benutzen ist, und wird wiederum die beste Construction des Elektromagnets berechnet. Ok.

H. Helmholtz. Ueber galvanische Ströme, verursacht durch Concentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie. Pogg. Ann. (2) III. 201-216.

Wird ein Strom durch eine Salzlösung geleitet, so besteht die Wirkung desselben nicht allein aus einer chemischen Zersetzung derselben nach ihren Aequivalenten, sondern auch aus einer Veränderung der Concentration an den Elektroden. Man kann sich diese letzte Veränderung fortdauernd auf die folgende Weise rückgängig gemacht denken. Wo der Strom die Lösung verdünnt, werde die überschüssige Wassermenge in Dampf verwandelt und entfernt; an den Stellen, wo die Lösung concentrirter wird, werde umgekehrt Dampf niedergeschlagen. Ausserdem muss sich, da der eigentliche Zersetzungsprocess unverändert von Statten geht, das Wasser mit dem aufgelösten Salz bewegen, wenn überall der ursprüngliche Zustand der Lösung erhalten werden soll. Denkt man sich endlich durch geeignete Zufuhr von Wärme die Temperatur constant erhalten, so kann man, wenigstens bei schwachen Strömen, den ganzen Vorgang als einen umkehrbaren Carnot-Clausius'schen Kreisprocess auffassen. Da Temperaturänderungen gar nicht vorkommen sollen, also Wärme aus Reservoiren von gleicher Temperatur zugeführt, resp. fortgenommen wird, so muss die Summe der gewonnenen und verlorenen Arbeit verschwinden. Dieselbe besteht

1) aus der Arbeit der elektrischen Kräfte:

$$J(P_a - P_k),$$

wo J die Stromstärke, P_a und P_k die Werthe des Potentials an der Anode und Kathode bedeuten;

2) aus der bei der Verdampfung und Ausdehnung des Dampfes geleisteten Arbeit. Für letztere ergiebt sich nach einigen Rechnungen, welche wir hier übergehen:

$$J\int_k^a q(1-n)\frac{dW}{dp}\cdot dp.$$

Hier bedeutet W die Arbeit für die Bildung der Masseneinheit Dampf, so dass:

$$W = p.V + \int_V^{V_1} p.dv,$$

wo V das Volumen der Masseneinheit Dampf bei dem Druck p, V_1 das Volumen derselben bei einem sehr kleinen Druck p_1 repräsentirt. Zum Verständniss der übrigen Grössen sei bemerkt, dass q die mit einem elektrolytischen Aequivalent des Salzes verbundene Wassermenge ist und n derjenige Bruchtheil des Aequivalents des Kations, der von der Stromeinheit in der Zeiteinheit nach der Kathode geführt wird. Das Integral bezieht sich auf die verschiedenen Zustände der Lösung von einer Elektrode zur anderen. Es ist von Null verschieden, wenn die Concentration der Lösung an den beiden Elektroden verschieden ist. Setzt man nach den früheren Bemerkungen über den Kreisprocess die gefundenen Arbeitsgrössen einander gleich, so ist:

$$P_k - P_a = \int_k^a q(1-n)\frac{dW}{dp}\cdot dp.$$

Diese Gleichung giebt die elektromotorische Kraft eines Plattenpaares von demselben Metall, welches in eine Salzlösung von verschiedener Concentration an den beiden Platten taucht. Da die Spannkraft der Dämpfe über Salzlösungen verschiedener Concentration bei gleicher Temperatur verschieden ist, so ist q als Function von p anzusehen. Setzt man nach Wüllner's Versuchen:

$$q = \frac{b}{p_0 - p}$$

und nimmt das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz als gültig an, so ist:

$$P_k - P_a = b.p_0 V_0 \int_k^a \frac{(1-n)dp}{p(p_0-p)}.$$

Wird endlich auch $1-n$ als constant angesehen, so kann man integriren und erhält:

$$P_k - P_a = b.V_0(1-n)\lg\left[\frac{q_a - q_0}{q_k - q_0}\right],$$

wo q_a und q_k die Werthe von q (siehe oben) für die Elektroden bedeuten.

Dieses Resultat wird mit Versuchen von J. Moser verglichen, und schliesslich eine Berechnung der in Frage kommenden Grössen nach absoluten Massen vorgenommen. Ok.

F. Braun. Ueber die Elektricitätsentwickelung als Aequivalent chemischer Processe. Pogg. Ann. (2) V. 182-216.

Die Abhandlung enthält chemisch-physikalische Betrachtungen ohne specielleres mathematisches Interesse.

Hauptsächlich sucht der Verfasser nachzuweisen, dass die gewöhnliche Theorie der galvanischen Ketten, nach welcher die elektromotorische Kraft derselben proportional zu setzen ist der Summe der Wärmewirkungen in der Kette, welche den chemischen Processen in derselben entsprechen, erheblicher Modificationen bedarf. Ok.

A. Naccari e M. Bellati. Sulla intensità del fenomeno Peltier a varie temperature. Atti d. Ist. Ven. (5) IV. 23-69

Nach eingehender Besprechung der Literatur über die Thermoelektricität, das Peltier'sche Phänomen und den durch die mechanische Wärmetheorie festgestellten Zusammenhang dieser Erscheinungen geben die Verfasser eine ausführliche Beschreibung ihrer Experimentaluntersuchung über die Peltier'sche Wärmeentwickelung bei verschiedenen Temperaturen. Ok.

H. Herwig. Ueber Wärmeentwickelung durch Drehen von elektrolytischen Molekülen. Pogg. Ann. (2) IV. 178-217.

Der Verfasser sucht diejenige Wärmemenge zu beobachten, welche erzeugt wird, wenn man eine galvanische Batterie mit zwei Platinplatten in Verbindung setzt, welche in angesäuertes Wasser tauchen, wobei die elektromotorische Kraft der Batterie so klein gewählt ist, dass eine Zersetzung des Wassers nicht erfolgt. Man kann sich dann vorstellen, dass die Platinplatten

nach Art eines Condensators geladen und die (polar anzunehmenden) Flüssigkeitsmoleküle in eine bestimmte Richtung gedreht werden. Um überhaupt messbare Wirkungen zu erhalten, musste die Stromrichtung oft und schnell gewechselt werden. Die hierbei entstehende Wärme kann aber auch noch von anderen Wirkungen, den sogenannten Convectionsströmen, herrühren. Diese lassen sich berechnen. Der Verfasser giebt dafür die Fundamentalgleichungen:

$$Ri = E - P\frac{di}{dt} - Q, \quad i = \frac{Q}{w} + c\frac{dQ}{dt},$$

wo Q die Potentialdifferenz an den Platinblechen, E die elektromotorische Kraft, i die Stromstärke, c die Capacität bedeuten. Die hieraus berechnete Grösse:

$$Q = \frac{E.w}{R+w} + A.e^{-at} + B.e^{-bt},$$

wo a und b die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + \left(\frac{R}{P} + \frac{1}{cw}\right)x + \frac{R+w}{P.cw} = 0,$$

wird noch durch weitere Betrachtungen vereinfacht.

Die Wärmeentwickelung in der Zeit dt ist dann:

$$M \cdot \frac{Q^2}{w} \cdot dt.$$

Aus diesen Rechnungen und den angestellten Versuchen folgert der Verfasser schliesslich, dass auch die Drehung der Moleküle einen merklichen Antheil an der Wärmeentwickelung hat.

Ok.

Plarr. Note relative aux paragraphes 439, 440 du „Traité élémentaire des quaternions“ de M. Tait.
C. R. LXXXVI. 1454-1456.

Diese Mittheilung ist ohne directe Vergleichung mit dem angegebenen Lehrbuch nicht zu verstehen. Es handelt sich um eine Vervollständigung von Rechnungen, welche auf die Theorie der Tangentenbussole Bezug haben. Ok.

A. Wassmuth. Ueber ebene Stromcurven von demselben elektromagnetischen Potential. Grunert Arch. LXII. 374-390.

Bekanntlich ist der Werth des elektromagnetischen Potentials eines geschlossenen Stromes in Bezug auf einen Magnetpol dem körperlichen Winkel proportional, unter welchem der Strom von dem Pol aus erscheint. Zwei Ströme, welche unter demselben Winkel erscheinen, haben gleiche Potentiale. Daraus folgt aber keineswegs, dass auch die Kraftcomponenten des Stromes in Bezug auf den Pol dieselben sind. Es lässt sich aber annehmen, dass dieselben zu einander in gewissen Beziehungen stehen werden. Diese aufzusuchen ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung. Die elektromagnetischen Componenten eines geschlossenen Stromes in Bezug auf den als Anfangspunkt genommenen Pol sind:

$$X = \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \text{ etc.}$$

Sieht man die Stromcurve als Schnitt einer Kegelfläche und einer anderen Fläche an und schneidet den Kegel durch eine zweite der ersten ähnliche Fläche, deren Gleichung man erhält, wenn man x durch kx, y durch ky, z durch kz ersetzt, so verändern sich die Componenten im Verhältniss von $1 : \frac{1}{k}$.

Besonders einfach werden die Beziehungen, wenn die den Kegel schneidende Fläche eine Ebene ist. Es zeigt sich dann, dass es drei verschiedene Lagen dieser Ebene giebt, bei welcher die Resultanten senkrecht zu der Ebene stehen. Die Bestimmung derselben ist identisch mit der Berechnung der Maxima und Minima der Resultante. Man kann ferner um den Pol ein Ellipsoid construiren, dessen Radius vector ϱ in einer bestimmten Richtung die Resultante R durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{1}{R.q}$$

giebt, wo q das auf die Ebene gefällte Loth bedeutet, welches der Richtung nach mit ϱ zusammenfällt.

In dem letzten Abschnitt werden die elektromagnetischen

Kräfte von Strömen berechnet, deren Bahnen durch den Schnitt einer Ebene und einer Pyramide erhalten werden. Ok.

H. F. WEBER. Die Inductionsvorgänge im Telephon. Wolf Z. XXIII. 265-272.

H. HELMHOLTZ. Telephon und Klangfarbe. Berl. Monatsber. 1878. 488-500; Pogg. Ann. (2) V. 448-460.

Beide Abhandlungen geben die Erklärung der folgenden Versuche von L. Hermann in Zürich. Derselbe verband das erste Telephon mit einem Drahtkreis, welcher inducirend auf einen zweiten Drahtkreis wirken konnte, in welchem sich das zweite, empfangende Telephon befand. Bei dieser Anordnung waren die dem ersten Telephon zugeführten Worte oder Klänge ohne erhebliche Veränderung der Klangfarbe zu vernehmen. Erregt die schwingende Platte des ersten Telephons einen Strom, der auszudrücken ist durch

$$J = \Sigma A_n . \sin(2\pi n t),$$

so soll, nach einer Bemerkung von Du Bois-Reymond, die Schwingungsbewegung des zweiten Telephons sich wiedergeben lassen durch

$$\frac{\partial J}{dt} = \Sigma A_n 2\pi n . \cos(2\pi n t).$$

Da die Intensitäten der Partialtöne hierbei wesentlich verändert sind, so müsste man auch eine erheblich veränderte Klangfarbe erwarten.

In den beiden oben angeführten Abhandlungen ist die Lösung dieses Widerspruchs gleichzeitig und in derselben Weise gegeben. Die Theorie der Versuche von Hermann erfordert die Berücksichtigung aller auftretenden Inductionswirkungen. Dieselbe ist enthalten in dem System von Differentialgleichungen:

$$i_1 w_1 = \frac{dM}{dt} - Q_1 \frac{di_1}{dt} - P \frac{di_2}{dt},$$

$$i_2 w_2 = -Q_2 \frac{di_2}{dt} - P \frac{di_1}{dt}.$$

Hierin bedeuten i, w die Stromstärken und Widerstände der beiden

Stromkreise, Q die Potentiale der Kreise auf sich selbst, P das Potential der beiden Kreise aufeinander, M das elektromagnetische Potential der Eisenplatte des ersten Telephons auf die erste Spirale. Setzt man:

$$M = A_n . \sin(2\pi nt),$$

so ergiebt sich, dass i_1 und i_2 periodische Functionen von veränderter Phase sind, deren Amplituden zwar von n abhängen, jedoch in der Weise, dass sie für grössere Werthe von n davon nahezu unabhängig sind. Es kann also nur die Klangfarbe tieferer Töne etwas verändert werden.

In der zweiten ausführlicheren Abhandlung ist dann noch der Fall einer Uebertragung der Schwingungen durch Induction bei einer grösseren Zahl von Stromkreisen ausgeführt.

Ok.

G. Ferraris. Di una dimostrazione del principio di Helmholtz sulla tempera dei suoni. Atti di Torino XIII. 287-299.

G. Ferraris. Sulla intensità delle correnti elettriche e delle estracorrenti nel telefono. Atti di Torino XIII. 980-1027.

Die erste Abhandlung behandelt denselben Gegenstand wie die in dem vorigen Referat besprochenen Arbeiten. Der Verfasser theilt zunächst die auch von ihm beobachtete Thatsache mit, dass Töne ohne wesentliche Veränderung ihrer Klangfarbe wahrgenommen werden, auch wenn das erste Telephon in dem inducirenden, das zweite in dem Inductionskreise sich befindet. Da der Verfasser sich bei der Berechnung dieser Versuche mit der ersten, wie zuvor gezeigt, durchaus ungenügenden Annäherung begnügt, so ist zu verwundern, dass er seine Versuche als Bestätigung der Helmholtz'schen Theorie der Klangfarbe ausgiebt. Dieselben enthalten erst dann eine solche Bestätigung, wenn man die vollständige, in dem vorigen Referat entwickelte Theorie zu ihrer Erklärung heranzieht.

Auch die zweite Abhandlung enthält Versuche über die elektrischen Ströme im Telephon, wobei ähnliche Anordnungen wie

zuvor getroffen wurden. Die Berechnung der Stromstärke wird in dieser Abhandlung nach bekannten Regeln ausgeführt und können wir auf die einfachen Rechnungen ohne ausführliche Beschreibung der complicirten Versuchsanordnung nicht näher eingehen. Ok.

G. Basso. Sulle correnti elettriche d'induzione, generate per mezzo di moti oscillatorii. Atti di Torino XIII. 401-425.

Vor einem Magnet ist eine Eisenplatte so angebracht, dass sie Schwingungen in der Verlängerung des Magnets ausführen kann. In der Nähe seines der Platte zugekehrten Endes ist der Magnet mit einer Spirale umgeben, in welcher durch die Bewegung der Platte Ströme inducirt werden. Durch eine geeignete Vorrichtung werden von denselben nur die in der einen Richtung verlaufenden Ströme zu einem Galvanometer geleitet, so dass ihre Wirkung an demselben gemessen werden kann. Ausser den experimentellen Resultaten hat der Verfasser auch die einfache Berechnung dieser Ströme ausgeführt. Ok.

G. Basso. Sull' uso delle bussole reometriche per correnti elettriche di breve durata. Atti di Torino XIII. 615-626.

Der Verfasser behandelt die Frage, wie die Intensität elektrischer Ströme, welche sich mit der Zeit schnell verändern, durch Galvanometer gemessen werden kann. Dabei nimmt er an, dass ein unendlich langer Draht auf die Magnetnadel wirkt (statt eines Stromkreises), und findet durch sehr einfache Rechnungen, welche übrigens keineswegs die Frage erschöpfend behandeln, dass der Ausschlag doppelt so gross ist, als die Ablenkung bei einem gleichen constanten Strom sein würde. Im weiteren Verfolg wird auch noch die Torsion des Fadens mit berücksichtigt, an welchem die Nadel hängt. Ok.

KLEMENČIČ. Beitrag zur Kenntniss der inneren Reibung im Eisen. Wien. Anz. 1878. 203-205.

Um einen Eisenring sind zwei kreisförmige Drähte geschlungen. Durch den einen derselben fliesst ein elektrischer Strom. In dem andern Draht wird dann durch die Wirkung des magnetisch gewordenen Eisenrings ein Strom inducirt. Für die Stärke desselben wird hier ohne Ableitung eine Formel mitgetheilt, die der Verfasser nach seiner Angabe aus Kirchhoff's Theorie des Magnetismus entwickelt hat. Wn.

M. GLÖSENER. Études sur l'électrodynamique et l'électromagnétisme. Mém. de Liège (2) VI.

Princip der abwechselnden Umkehrung des elektrischen Stromes in Elektromagneten; und Folgerungen.

Mn. (O.)

MASCART et ANGOT. Recherches expérimentelles sur les machines magnéto-électriques. Almeida J. VII. 79-92, 363-373.

M. DE LÉPINAY. Du potentiel en électrodynamique et en électromagnétisme. Almeida J. VII. 414-420.

O. CHWOLSON. Ueber den Magnetismus, der in zwei Kugeln durch Kräfte inducirt wird, welche symmetrisch gegen die Centrallinie wirken. Berl. Monatsber. 1878. 269-276.

Die Poisson'sche Theorie der Induction von Magnetismus kann auf die eine Gleichung reducirt werden, welche für jeden Punkt der Oberfläche der Eisenmasse gelten muss:

$$3k\frac{dF}{dn_i}+(1+2k)\frac{dV}{dn_i}+(1-k)\frac{dV}{dn_a}=0,$$

wo F das Potential der magnetisirenden Kräfte, V dasjenige des magnetischen Eisenkörpers bedeutet.

Der Verfasser drückt F und V aus als Functionen zweier Veränderlichen, welche C. Neumann in seiner Schrift: „Allgemeine Lösung über den Temperaturzustand eines homogenen Körpers etc. Halle 1862“, eingeführt hat. Beide Grössen werden in Reihen entwickelt und die Constanten der einen Reihe durch diejenigen der andern nach der Fundamentalgleichung ausgedrückt. Auch die magnetischen Momente der Kugeln lassen sich leicht mit Hülfe des Potentials V berechnen. Ist die Kraft eine constante in der Richtung der Centrallinie, so reduciren sich die Reihen auf geschlossene Ausdrücke, und es wird unter speciellen Annahmen die Rechnung für diesen Fall vollständig durchgeführt; insbesondere auch die Aenderung bestimmt, welche das magnetische Moment jeder Kugel durch Anwesenheit der anderen erfährt.

Ok.

THÜRMER. Ueber die Einwirkung des Erdstromes auf ein um eine verticale Axe drehbares galvanisches Rechteck. Pr. Leisnig.

Der Verfasser untersucht die Einwirkung des Erdmagnetismus auf ein von Strömen durchflossenes Rechteck. Zu dem Zweck denkt er sich die Wirkung des Erdmagnetismus ersetzt durch einen unendlich langen elektrischen Strom, der von Ost nach West fliesst. Für die Einwirkung der Stromelemente desselben auf die Elemente des Rechtecks wird das Ampère'sche Elementargezetz zu Grunde gelegt. Die Rechnung führt zu complicirten Resultaten. Wahrscheinlich hätte sich dieselbe einfacher gestaltet, wenn der Verfasser das Rechteck als transversal magnetische Fläche in einem homogenen magnetischen Felde aufgefasst hätte.

Ok.

QUET. Sur les variations du magnétisme terrestre. C. R. LXXXVI. 660-662.

QUET. Action que le soleil exerce sur les fluides magnétiques et électriques de la terre. C. R. LXXXVI. 808-810.

QUET. Sur les périodes, qui, dans les phénomènes magnétiques, dépendent de la vitesse de rotation du soleil. C. R. LXXXVI. 1244-1246.

QUET. De la force électromotrice d'induction qui provient de la rotation du soleil; détermination de sa grandeur et de sa direction, quelle que soit la distance du corps induit. C. R. LXXXVII. 860-862.

Der Verfasser theilt in sehr kurzen Auszügen die Hypothesen mit, die er der Berechnung des Einflusses der Sonne auf den Erdmagnetismus zu Grunde gelegt hat, sowie die wichtigsten Endformeln und Resultate, zu denen er gelangt ist. Derselbe nimmt elektrische Ströme an der Sonnenoberfläche an, deren elektromagnetische Wirkung auf die Erde sich durch die Wirkung eines einzigen Stromes in einem grössten Kreise der Sonne ersetzen lässt. Die Axe dieses Stromes fällt nicht mit der Rotationsaxe der Sonne zusammen. Dieser Strom übt auf die magnetischen Massen der Erde Wirkungen aus und inducirt in den guten Leitern der Erde Ströme. Alle diese Wirkungen, welche natürlich periodisch sind, hat der Verfasser nach bekannten Regeln berechnet und giebt ohne jede Ableitung die entstehenden Formeln in den einzelnen Mittheilungen an. Ok.

L. SCHWENDLER. Allgemeine Theorie der Duplex-Telegraphie. Carl Rep. XIV. 205-231, 241-281, 369-389.

Capitel 4.

Wärmelehre.

J. C. MAXWELL. Theorie der Wärme. Uebersetzt von F. Neesen. Braunschweig. Vieweg.

Das vorliegende Werk giebt in klarer und anschaulicher Form die Hauptlehren der mechanischen Wärmetheorie ohne

jeden Aufwand mathematischer Entwicklungen; ferner Anwendungen auf eine grosse Zahl verschiedener Probleme, wobei manche neue und eigenartige Gedanken mitgetheilt werden, wie bei der Bedeutung des Verfassers nicht anders zu erwarten war.

Ok.

R. Clausius. Ueber die Beziehung der durch Diffusion geleisteten Arbeit zum zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie. Pogg. Ann. (2) IV. 341-343.

Man denke sich einen Hohlcylinder durch einen porösen, ohne Reibung verschiebbaren Stempel in zwei Theile getheilt. Ist der eine Theil mit Wasserstoff, der andere mit Sauerstoff gefüllt, so diffundirt ersterer schneller durch den porösen Cylinder als letzterer. Auf der Seite des Wasserstoffs entsteht also eine Druckverminderung; der Stempel bewegt sich dann nach dieser Seite und bringt durch Compression Erwärmung hervor, während auf der anderen Seite das Gas sich abkühlt. Es geht also Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Körper über. Dieser von Tolver Preston ersonnene Process soll dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie widersprechen. Clausius führt hiergegen an, dass der betreffende Satz auf diesen Process keine Anwendung finden kann, weil die benutzten Substanzen am Ende der Operation nicht wieder in ihren Anfangszustand zurückgekehrt sind, so dass gar kein Kreisprocess stattgefunden hat.

Ok.

L. Boltzmann. Weitere Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie. Wien. Ber. 1878. 115-117.

„Der erste Abschnitt derselben hat die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der zweite das Wärmegleichgewicht eines schweren Gases zum Gegenstande.“

Hieran knüpft der Verfasser noch einige Bemerkungen über

die von Tolver Preston versuchte Widerlegung des zweiten Hauptsatzes (s. das vorige Referat) durch den Vorgang der Diffusion zweier Gase in einander. Auch Herr Boltzmann ist der Ansicht, dass dieser Process nicht im Widerspruch mit dem fraglichen Satze steht; vielmehr zeigt derselbe, wie man leicht mit Hilfe seiner früheren Entwicklungen den Zuwachs an Entropie berechnen kann, welcher erfolgt, wenn die Gase zuerst getrennte Räume eingenommen haben und dann den ganzen Raum in gemischtem Zustand erfüllen. Ok.

Philipps. De la détermination des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant d'un corps quelconque et de celle de sa fonction caractéristique. C. R. LXXXVI. 1290-1296, 1351-1356.

M. Lévy. Remarque au sujet d'une note de M. Philipps sur la détermination des chaleurs spécifiques. C. R. LXXXVI. 1391-1392.

Bezeichnet man für irgend einen Körper mit p, v, T Druck, Volumen, absolute Temperatur, mit c und c_1 die specifischen Wärmen bei constantem Druck und constanter Temperatur, mit A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, nimmt man ferner p und v zu unabhängigen Variabeln und setzt die durch die Natur des Körpers gegebene Beziehung zwischen p, v, T in die Form:

$$T = F(p, v),$$

so liefern die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie die beiden Gleichungen:

$$(c-c_1)\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial v}+\frac{\partial c}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial c_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}=A,$$

$$(c-c_1)\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}=A.F.$$

Die vorliegenden Arbeiten bezwecken aus diesen partiellen Differentialgleichungen c und c_1 zu berechnen. Man erhält nach einigen Transformationen für die beiden specifischen Wärmen die Ausdrücke:

$$c = f(p, v) + \Phi(T),$$
$$c_1 = f_1(p, v) + \Phi_1(T),$$

wo

$$f(p, v) = AF \cdot \int \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2} \cdot dp,$$

$$f_1(p, v) = AF \cdot \int \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2} \cdot dv.$$

Man kann vermittelst dieser Gleichungen die Frage beantworten, wie die Zustandsgleichung für irgend einen Körper beschaffen sein muss, damit die eine oder die andere specifische Wärme oder auch beide nur Temperaturfunctionen sind (also nicht von p und v abhängen). In dem letzten Fall erhält man z. B. die Zustandsgleichung:

$$T = C.p.v + C'.p + C_1.v + C'_1,$$

welche das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz als besonderen Fall in sich schliesst. Der zweite Theil der Abhandlung enthält die Berechnung der von Massieu (Mémoires des savants étrangers XXII.) eingeführten, „characteristischen Function" H, welche durch die Gleichung:

$$H = T.Z - U,$$

definirt ist, in der Z die Entropie, U die innere Energie bedeuten. Ist diesmal die Zustandsgleichung in der Form gegeben:

$$v = f(t, p),$$

so erhält man die beiden Ausdrücke für H:

$$-A\int f.dp + \int dt \int \frac{\Phi(T)}{T} dt + Ct + C',$$

oder:

$$A\int f.dv + \int dt \int \frac{\Phi_1(T)}{T} dt + Ct + C',$$

wo Φ und Φ_1 die früher in den specifischen Wärmen auftretenden Temperaturfunctionen bedeuten. In der letzten Notiz reclamirt Herr Lévy die Priorität für die von dem Verfasser gegebenen Entwicklungen (F. d. M. IX. 757-758). Ok.

H. Pellat. Remarque sur les chaleurs spécifiques des vapeurs. Almeida J. VII. 117-123.

A. Ritter. Beitrag zur Lehre von den Aggregatzuständen. Pogg. Ann. (2) II. 273-291.

A. Ritter. Ueber die Temperaturfläche des Wasserdampfes. Pogg. Ann. (2) III. 447-460.

Ausgehend von dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze:

$$p.v = R.T,$$

wo p und v den Druck, T die von -273° an gezählte Temperatur bedeuten, denkt sich der Verfasser eine Fläche construirt, für welche p, v, T die rechtwinkligen Coordinaten repräsentiren. Insbesondere nimmt derselbe p und v zu Coordinaten einer Horizontalebene, T als Function derselben zur Höhe über der Ebene. Jede Zustandsänderung des Gases wird dann dargestellt durch eine Linie auf der Temperaturfläche. Für permanente Gase hat diese Fläche überall einen continuirlichen Verlauf. Wird dagegen für eine Substanz, welche in den drei Aggregatzuständen vorkommt, z. B. für Wasser, nach denselben Grundsätzen die Temperaturfläche construirt, so besteht dieselbe aus mehreren Flächentheilen, welche verschiedenen Gesetzen entsprechen und in einer Reihe von Kanten aneinander grenzen. Die Gestaltung der Fläche wird eingehend beschrieben, und hat der Verfasser ein Modell derselben für das Wasser construiren lassen. Für den Wasserdampf ist es bis jetzt noch nicht gelungen die Gleichung, nach welcher Temperatur, Druck und Volumen zusammenhängen, anzugeben. Nur soviel ist bekannt, dass das Verhalten desselben im überhitzten Zustand sich demjenigen der Gase nähert. Der Verfasser hat daher (in der zweiten Abhandlung) den Versuch gemacht einen Ausdruck aufzustellen, welcher diese Lücke ausfüllt. Er findet dafür als einen mit den bekannten Versuchen genügend übereinstimmenden Ausdruck für Wasserdampf:

$$T = \frac{pv}{R} + \frac{b}{p.v\sqrt{v}},$$

wo

$$R = \frac{1}{220}, \quad b = 28$$

zu setzen ist. Dieser Ausdruck wird weiter benutzt, um mit Hilfe von Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie die specifischen Wärmen des Dampfes, sowie die Gleichungen der Isothermen und Adiabaten desselben zu berechnen.

Für letztere ergiebt sich die Gleichung $p.v^k = \text{Const.}$, wo k eine Function des Druckes ist, wie die folgenden Werthe zeigen:

$p =$ 0,1	1	4	14
$k =$ 1,471	1,385	1,333	1,302.

Für erstere gilt die Gleichung $p.v^r = \text{Const.}$, wo r ebenfalls vom Druck abhängt:

$p =$ 0,1	1	4	14
$r =$ 0,99	0,98	0,97	0,95.

Ok.

E. Buchholtz. Construction der Expansionscurve und des Mittelwerthes der Dampfspannung. Z. dtsch. Ing. XXII. 33-36.

J. D. van der Waals. Over de specifieke warmte van den verzadigden damp. Versl. en Mededeel. XII. 169-183.

Die mechanische Wärmetheorie hat ergeben, dass, um gesättigten Wasserdampf zu erwärmen, dem Dampfe Wärme entzogen werden muss, wenn man nämlich zugleich das Volumen auf solche Weise verkleinert, dass der Dampf gesättigt bleibt. Später ist gefunden worden, dass nicht nur der Wasserdampf diese Eigenschaft hat, sondern auch andere gesättigte Dämpfe. Nur Aetherdampf macht eine Ausnahme, wenigstens unter den Dämpfen, welche man in dieser Hinsicht theoretisch und praktisch untersucht hat. Der Verfasser sucht jetzt auf theoretischem Wege zu zeigen, dass die meisten gewöhnlich vorkommenden Dämpfe sich wie Wasserdampf verhalten müssen, und dass das Verhalten des Aetherdampfes nicht eine Abweichung von dem wahren Gesetze ist; wahrscheinlich bilde auch der Aetherdampf nicht die alleinige

Ausnahme von dem, was bisher höchstens als Regel angenommen werden konnte.

Als Resultat seiner Untersuchung spricht der Verfasser folgende Sätze aus:

1) Die Erscheinung, dass gesättigte Dämpfe bei adiabatischem Druck theilweise condensirt werden, ist da vorhanden, wo $\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$ (das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem Druck und constantem Volumen) nur wenig von der Einheit abweicht.

2) Aus den Beobachtungen über die Spannung der gesättigten Dämpfe und der latenten Wärme, und aus der Kenntniss von c_p kann gefunden werden: der Dilatationscoefficient, der Spannungscoefficient und der Werth von c_v für diese Dämpfe in gesättigtem Zustande. G.

M. Lévy. Mémoire sur une loi universelle relative à la dilatation des corps. C. R. LXXXVII. 449-452.

M. Lévy. Sur l'attraction moléculaire dans ses rapports avec les températures des corps. C. R. LXXXVII. 488-491.

H. F. Weber. Deux remarques au sujet de la relation générale entre la pression et la température, déterminée par M. Lévy. C. R. LXXXVII. 517-519.

M. Lévy. Réponse à une communication de M. H. F. Weber sur la thermodynamique. C. R. LXXXVII. 554-557.

L. Boltzmann. Remarques sur une communication de M. Lévy. C. R. LXXXVII. 593.

M. Lévy. Réponse à une observation de M. Boltzmann. C. R. LXXXVII. 649.

M. Lévy. Sur une loi universelle relative à la dilatation des corps. C. R. LXXXVII. 676-679.

De Saint-Venant. Sur la dilatation des corps échauffés et sur les pressions, qu'ils exercent. C. R. LXXXVII. 713-718.

R. Clausius. Sur l'énergie d'un corps et sa chaleur spécifique. C. R. LXXXVII. 718-719.

Massieu. Observations concernant le mémoire de M. Lévy. C. R. LXXXVII. 731-733.

L. Boltzmann. Nouvelles remarques au sujet des communications de M. Lévy. C. R. LXXXVII. 773.

M. Lévy. Réponses à diverses communications. C. R. LXXXVII. 826-827.

Bekanntlich ist es bisher nur bei einer kleinen Zahl von Vorgängen möglich, die Fundamentalsätze der mechanischen Wärmetheorie mit Erfolg anzuwenden, weil die durch das Experiment zu liefernde Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur (entsprechend dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz bei den Gasen) noch fehlt. Herr Lévy sucht diese fehlende Gleichung durch die folgenden Betrachtungen auf eine verhältnismässig einfache Form zu bringen. Wählt man als unabhängige Variable v (Volumen) und T (absolute Temperatur) eines Körpers, so kann man die erste Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie auf die Form bringen:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial v} dv = dQ - Ap\,dv,$$

wo U die Function von v und T repräsentirt, welche gewöhnlich als innere Energie bezeichnet wird. Herr Lévy benutzt nun die Hypothese, von deren Rechtfertigung später die Rede sein wird, dass $\frac{\partial U}{\partial T}$ (die specifische Wärme bei constantem Volumen) nur von der Temperatur, $\frac{\partial U}{\partial v}$ nur von dem Volumen abhängt, so dass U durch die Summe einer Function von T allein und einer solchen von v allein dargestellt werden kann.

Setzt man gemäss dem zweiten Hauptsatz

$$d\mu = \frac{dQ}{T},$$

wo μ die von Clausius mit dem Namen Entropie bezeichnete Function von v und T ist, so lässt sich ein Gleiches auch für μ

nachweisen. Aus der Verbindung beider Beziehungen erhält man das Resultat, dass die oben erwähnte Gleichung zwischen p, v, T von der Form sein muss:

$$(p + R)\, V = T,$$

wo R und V Functionen von v allein sind. Hieraus würde folgen, dass ein Körper, dessen Volumen constant erhalten wird, einen Druck ausübt, welcher der absoluten Temperatur proportional ist.

Zur Rechtfertigung der oben angegebenen Hypothese weist Herr Lévy nach, dass $\frac{\partial U}{\partial v} \cdot dv$ die Arbeit repräsentirt, welche gegen die Molecularkräfte bei einer sehr kleinen Ausdehnung zu leisten ist. Bringt man dieselbe auf die Form:

$$\Sigma m m' f(r)\, dr = E \cdot \frac{\partial U}{\partial v} \cdot dv,$$

so ist dieser Ausdruck von T unabhängig, wenn das Wirkungsgesetz der Molecularkräfte sich mit der Temperatur nicht ändert. Daraus würde sich ergeben:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T . \partial v} = 0,$$

welches die Grundannahme des Herrn Lévy ist. Diese Ausführungen sind von den verschiedensten Seiten bestritten worden.

Stellen wir die Gegengründe sachlich zusammen, so zeigt sich zunächst aus Versuchen bei verschiedenen Substanzen, dass der Druck bei constantem Volumen nicht der absoluten Temperatur proportional ist. Insbesondere citirt H. F. Weber Versuche von Andrews an der Kohlensäure, Massieu solche von Regnault an der schwefligen Säure, während Boltzmann an das anomale Verhalten des Wassers bei niedriger Temperatur erinnert.

Eine andere Reihe von Gegengründen bezieht sich auf die Unabhängigkeit der Wechselwirkung der Molecüle von der Temperatur. Mit Recht hebt Boltzmann hervor, dass nach den neueren Anschauungen hierbei nicht die mittleren Entfernungen der in Bewegung befindlichen Molecüle, sondern ihre wirklichen veränderlichen Entfernungen in Betracht zu ziehen sind. Dass diese mit der Temperatur, d. h. mit der lebendigen Kraft der

Wärmebewegung, sich verändern, dürfte ausser Zweifel sein. Etwas weiter wird dieser Gedanke noch von St. Venant ausgeführt, welcher darauf hinweist, dass man bei den Wärmebewegungen der Molecüle, nicht, wie etwa bei der Erklärung der elastischen Kräfte, sich auf die Glieder erster Ordnung beschränken darf, da sich die Ausdehnung durch die Wärme nur aus der Mitberücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung erklären lässt.

Das Endresultat der Discussion dürfte darin bestehen, dass Lévy's „Universalgesetz" sich auf eine Formel reducirt, welche mit einiger Annäherung bei einer Reihe von Substanzen gilt, bei anderen aber ungültig ist, und dass hierüber nur durch ausgedehntere Versuche in jedem besonderen Fall entschieden werden kann. Ok.

J. C. MAXWELL. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Proc. of London XXXVII. 304-308.

Auszug aus einer Arbeit, die seitdem in den Phil. Trans. veröffentlicht ist. Der Verfasser zeigt mit der Methode, die er in seiner Arbeit: „On the dynamical theory of gases" (Phil. Trans. 1867) gegeben hatte, dass, wenn in einem Gase Temperaturungleichheiten stattfinden, der Druck in einem gegebenen Punkte nicht nach allen Richtungen derselbe ist, und dass die Differenz zwischen dem Maximal- und Minimaldrucke in einem Punkte von beträchtlicher Grösse sein kann, wenn die Dichtigkeit des Gases klein genug ist, und wenn die Temperaturunterschiede von kleinen festen Körpern mit höherer oder niederer Temperatur, als sie das das Gas enthaltende Gefäss hat, hervorgebracht werden. Cly. (O.)

J. MOUTIER. Sur une démonstration de la loi de Dulong et Petit. Soc. phil. Paris (7) II. 3-6.

J. MOUTIER. Sur la vapeur d'eau. Soc. phil. Paris (7) II. 7-9.

J. MOUTIER. Sur la chaleur d'évaporation. Soc. phil. Paris (7) II. 17-19.

J. MOUTIER. Sur les transformations non réversibles. Soc phil. Paris (7) II. 39-41.

J. MOUTIER. Sur les combinaisons chimiques, produites avec absorption de chaleur. Soc. phil. Paris (7) II. 96-97.

J. MOUTIER. Sur la formation des vapeurs. Sur un manomètre d'égale sensibilité. Soc. phil. Paris (7) II. 170-172.

Wir haben diese Reihe kurzer Notizen hier zusammengefasst, weil dieselben, wenn auch ihrem Inhalte nach verschieden, doch sämmtlich Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf die angeführten Probleme enthalten. In näherem Zusammenhang stehen die zweite bis vierte Abhandlung. Bei denselben wird stets ein Kreisprocess zu Grunde gelegt, welcher ausser Temperaturänderungen des betreffenden Körpers mehrere Zustandsänderungen (Veränderungen des Aggregatzustandes, Uebergänge in allotrope Modificationen) in sich schliesst. Auf Wasser angewandt, welches 1) aus dem flüssigen in den festen Zustand übergeht, 2) aus letzterem verdampft, 3) wieder in den flüssigen Zustand zurückkehrt, zieht der Verfasser den Schluss, dass die Spannkräfte des Dampfes über Wasser und Eis bei derselben Temperatur verschieden sein müssen.

In der folgenden Notiz wird der Satz bewiesen, dass die durch Verdunstung des Wassers verbrauchte Wärme nicht dieselbe ist, wie die bei der Verdampfung bei gleicher Temperatur, etc.

Einen etwas anderen Zweck verfolgt die letzte Notiz. Für geschlossene Luftmanometer zur Messung hohen Druckes benutzt man oft conisch verlaufende Röhren, um für hohen Druck möglichst dieselbe Empfindlichkeit zu haben, wie für niedrigen. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, diejenige Röhrenform (Rotationsfläche) zu berechnen, bei welcher die Empfindlichkeit stets dieselbe bleibt. Hierfür ergiebt sich die Rotationsfläche einer gleichseitigen Hyperbel. Ok.

E. Bernardi. Studi sopra i motori atmosferici a gaz. Atti Ist. Ven. (5) IV. 1123-1191.

Die Abhandlung ist vorwiegend von technischem Interesse. Der Verfasser hat einen neuen Gasmotor construirt, dessen Wirkungsweise er ausführlich beschreibt. Ueber den Nutzeffekt desselben hat er zahlreiche Versuche angestellt, zu deren Berechnung einige einfache Formeln entwickelt werden.

Ok.

A. Ritter. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper. Pogg. Ann. (2) V. 405-425, 543-558.

In seinem schönen Werke über die „Wirbelstürme" (Hannover 1872) hat Reye die Bedingungen entwickelt, unter welchen die Atmosphäre sich in stabilem, indifferentem oder labilem Gleichgewicht befindet. Hieran anknüpfend und den indifferenten Gleichgewichtszustand voraussetzend, findet der Verfasser eine Formel für die Höhe der Atmosphäre, indem er die Arbeit, welche erforderlich ist um 1 Kilogramm Luft bis an die Grenze derselben zu heben, gleichsetzt der in Arbeit verwandelten Wärmemenge, welche nöthig ist, um 1 Kilogramm Luft bei constantem Druck vom Nullpunkt der absoluten Temperatur auf die Temperatur an der Erdoberfläche zu erwärmen. Diese Gleichung, welche durch einfache Betrachtungen aus der mechanischen Wärmetheorie gerechtfertigt wird, würde eine Höhe von 27491 Meter ergeben. Nachdem ähnliche Betrachtungen für eine Atmosphäre von Wasserdampf angestellt worden sind, wird der Einfluss desselben mitberücksichtigt, ohne das Resultat erheblich zu ändern. Da dasselbe mit andern Beobachtungen (z. B. an Sternschnuppen) verglichen, viel zu klein ausfällt, so kommt der Verfasser zu dem Schluss, dass die Annahme des Gaszustandes der Luft für die höchsten Schichten der Atmosphäre unzulässig ist. Eine ähnliche Betrachtungsreihe wird für Gase im Innern der Erde angestellt.

In der zweiten Abtheilung untersucht der Verfasser das Ver-

halten gasförmiger Weltkörper, bei welchen die Materie sich nach dem Newton'schen Gesetz anzieht. Er findet das bemerkenswerthe Resultat, dass Wärmezufuhr infolge der Ausdehnung eine Temperaturerniedrigung, Wärmeabgabe eine Contraction und Temperaturerhöhung bewirken muss. Würde z. B. die Sonne als Gaskugel anzusehen sein, so müsste bei derselben in Folge der Ausstrahlung eine Contraction und Temperaturerhöhung stattfinden. Ok.

W. Gibbs. On the equilibrium of heterogeneous substances. Trans. of Conn. III. 108-248, 343-524; Amer. J. 411-458.

Aus dem dem Referenten vorliegenden, sehr kurzen Auszuge der umfangreichen Arbeit geht soviel hervor, dass der Verfasser aus Grundsätzen der mechanichen Wärmetheorie die Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Körpersysteme abzuleiten beabsichtigt. Bezeichnet man die innere Energie und Entropie mit resp. ε und η, so lassen sich nach dem Verfasser die Gleichgewichtsbedingungen eines isolirten Systems in eine der beiden Formeln zusammenfassen:

$$\delta\eta \overline{\overline{<}} 0, \quad \varepsilon \text{ constant};$$

$$\delta\varepsilon \geqq 0, \quad \eta \text{ constant}.$$

Nach diesen Principien werden die Gleichgewichtszustände der verschiedensten Körperklassen untersucht: Gase, Gasgemische, feste elastische Körper, Systeme von festen Körpern und Flüssigkeiten (Capillarität); endlich folgen Anwendungen auf elektrische Ströme. Ok.

P. Boileau. Notions concernant le travail intermoléculaire. C. R. LXXXVI. 378-381.

Die vorliegende Abhandlung bildet die Fortsetzung früherer Arbeiten (F. d. M. IX. 691). Unter dem Ausdruck „intermoleculare Arbeit" versteht der Verfasser die Arbeit, welche bei stationären Flüssigkeitsströmen durch Reibung der Flüssigkeitstheile

an einander und an rauhen Uferwänden verloren geht. Das äusserst complicirte Problem wird, wie es scheint, nach so willkürlichen Voraussetzungen behandelt, dass wir auf Wiedergabe der Resultate verzichten. Offenbar kommt es dem Verfasser nur darauf an, empirische Ausdrücke zu gewinnen, welche für Röhrenleitungen, Canäle etc. passen.

Ok.

E. Duclaux. Sur les forces élastiques des vapeurs émises par un mélange de deux liquides. C. R. LXXXVI. 592-595.

Bericht über die Resultate einer experimentellen Untersuchung über die Destillation von Flüssigkeitsgemischen. Dieselben werden durch eine Reihe empirischer Formeln dargestellt.

Ok.

C. Puschl. Grundzüge der aktinischen Wärmetheorie. Wien. Ber. LXXVII. 1-30.

Der Verfasser hebt einen nicht zu verkennenden Mangel der neueren Moleculartheorien hervor. Da dieselben die Wärme ausschliesslich als Bewegung der Molecüle ansehen, so geben sie keine Rechenschaft von der Wärmestrahlung, welche nach dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft als Bewegung des Aethers aufzufassen ist.

Um diesem Mangel abzuhelfen stellt der Verfasser die strahlende Wärme voran und sieht die Bewegung der Molecüle erst als eine Folge derselben an. Die Körperatome werden zunächst als vollkommen reflektirende Körper gedacht, zwischen denen die Wärmestrahlen hin und hergeworfen werden, und hieran einige einfache Betrachtungen und Rechnungen angeknüpft über die Strahlenwärme im Innern der Körper. Dann wird angenommen, dass die Wärmestrahlen nach Art von Zugkräften wirken, so dass ein allseitig gleich bestrahltes Atom ruht, ein ungleichmässig bestrahltes sich nach der Richtung der stärksten

Strahlung bewegt. Auf diese Weise kommen Molecularbewegungen zu Stande, wie sie auch von der gewöhnlichen Moleculartheorie der Gase vorausgesetzt werden. Diese Bemerkungen mögen hier genügen, da die Anschauungen des Verfassers vorläufig noch auf vielen unbewiesenen Hypothesen beruhen und noch nicht in eine mathematisch so präcisirte Form gebracht sind, dass man sie mit Erfolg discutiren könnte. Ok.

C. Wittwer. Ueber die Bedingungen der Aggregatzustandsveränderung. Schlömilch Z. XXIII. 286-307.

Der Verfasser geht von Annahmen über die Constitution der Materie aus, welche von den gewöhnlich gemachten wesentlich abweichen. Nach seiner Ansicht stossen sich die Molecüle ab; dagegen ist der Aether innerhalb des Körpers verdünnt, so dass die Molecüle desselben durch den Ueberdruck des äusseren Aethers zusammengehalten werden. Die Molecüle befinden sich in Schwingungsbewegung, welche durch Temperaturerhöhung vergrössert wird. Der Verfasser berechnet zunächst die Einwirkung der übrigen Molecüle auf ein besonderes, indem er sich dieselben über concentrische Kugeloberflächen gleichmässig vertheilt denkt, deren Mittelpunkt die Gleichgewichtslage des Molecüls ist. Es ergiebt sich dabei, dass die Einwirkung durch die Schwingungen vergrössert wird. Um nun hieraus die Veränderungen des Aggregatzustandes zu erklären, denkt sich der Verfasser für die Entfernung x zweier Molecüle eine Gleichung von der Form hergestellt:

$$mx^n + lx^{n-1} + \cdots + bx^2 + ax + \Delta\tau = 0,$$

wo $\Delta\tau$ die Temperaturerhöhung über einen beliebig gewählten Anfangspunkt bedeutet. Die Coefficienten der Gleichung können aus den Ausdehnungscoefficienten der Flüssigkeit bestimmt weren. Wird diese Gleichung in Bezug auf x gelöst, so kann man sich $\Delta\tau$ in vielen Fällen so gross gewählt denken, dass x imaginär wird. Der betreffende Werth von $\Delta\tau$ gestattet dann die Berechnung des Siedepunktes Anwendungen auf specielle

Beispiele zeigen zum Theil so grosse Abweichungen, dass man wohl sehr gerechtfertigte Bedenken gegen das ganze Verfahren daraus entnehmen kann. Ok.

E. Warburg. Ueber das Gleichgewicht eines Systems ausgedehnter Molecüle und die Theorie der elastischen Nachwirkung. Pogg. Ann. (2) IV. 232-249; Freib. Ber. VII. 2.

Schon W. Weber hat von der elastischen Nachwirkung eine Erklärung zu geben versucht, nach welcher dieselbe von einer Drehung der Molecüle um ihre Schwerpunkte herrühren soll. Diese Erklärung setzt voraus, dass die Molecüle eine von der Kugel abweichende Gestalt haben, führt also, wenn man zunächst von der Wärmebewegung der Molecüle absieht, auf das Problem, welches oben angegeben ist.

Unter der gewöhnlichen Annahme, dass die Dimensionen der Molecüle klein sind gegen ihre Entfernungen, wird zunächst das Potential eines Molecüls auf ein anderes, aus diesem weiter das Potential aller übrigen Molecüle auf ein bestimmtes berechnet. Letzteres giebt einen Ausdruck, welcher von der Deformation des Systems abhängt; derselbe ist anzusehen als Function dreier unabhängiger Veränderlicher, und jedes Werthsystem, welches diese Function zu einem Minimum macht, giebt eine stabile Gleichgewichtslage des Systems.

Es folgen dann Anwendungen auf Torsion und Dehnung eines cylindrischen Drahtes, sowie die Berechnung der Druckcomponenten bei einer Deformation.

Die elastische Nachwirkung lässt sich auf Grund der angestellten Betrachtungen nur erklären, wenn man Rücksicht nimmt auf die oben erwähnten Wärmebewegungen der Molecüle. Da der Verfasser hierfür eingehendere Rechnungen noch nicht mittheilt, so verweisen wir in dieser Beziehung auf seine Andeutungen in der Originalabhandlung. Siehe auch p. 671.

Ok.

R. Pictet et Cellérier. Sur un nouveau thermographe et sur une méthode générale d'intégration d'une fonction numérique quelconque. C. R. LXXXVII. 1033-1035.

Die Verfasser benutzen die Veränderung der Spannkraft von Dämpfen mit der Temperatur zur Messung der Temperatur. Sie geben an, ein sehr genaues Instrument dieser Art construirt zu haben, indem sie flüssige, schweflige Säure benutzen. Die Temperatur kann mit Hülfe desselben von —25° bis +40° C. gemessen werden, und es ist für meteorologische Zwecke ein Registrirapparat an dem Thermograph angebracht.

Das Bestreben, den aufgezeichneten Graden gleiche Grösse zu geben, hat die Verfasser veranlasst, an dem Apparat eine „Correctionscurve" anzubringen, und führte dieselben weiter auf das Studium der Bewegung zweier Curven, welche durch einen unausdehnbaren, an je einem Punkt der beiden Curven berührenden, Faden verbunden sind. Durch eingehende Discussion dieses Problems soll sich eine Methode ergeben, die Integrale beliebiger Functionen numerisch zu berechnen. Die Verfasser stellen sogar zum Schluss eine „Universalrechenmaschine" in Aussicht, welche im Stande ist, die numerischen Werthe von Functionen mehrerer Variabeln zu geben.

Die Kürze und Unvollständigkeit der Mittheilung macht ein Urtheil über die angedeuteten Fragen unmöglich. Ok.

Aymonnet. Détermination de la température d'un milieu insolé. C. R. LXXXVII. 23-26.

Der Verfasser bespricht Methoden, die Temperatur der Luft während der Einwirkung der Sonnenstrahlen zu bestimmen. Er benutzt hierzu zwei Thermometer. Die Temperaturen, welche dieselben zeigen, können dann stets der Summe zweier Glieder gleichgesetzt werden, von welchen das eine die gesuchte Temperatur der Luft ist, das andere dagegen von der Einwirkung der strahlenden Wärme abhängt. Beobachtet man gleichzeitig beide Thermometer, während die zugestrahlten Wärmen ver-

schiedene Intensitäten haben, (z. B. bei hellem Sonnenschein und bei Verdeckung der Sonne durch eine Wolke), so kann man aus den vier Beobachtungen zunächst eine Constante ableiten, welche das Verhältniss der Temperaturerhöhung bei beiden Thermometern unter gleicher Zustrahlung ergiebt, und hieraus würde man endlich die Lufttemperatur ableiten können. Diese Betrachtungen beruhen auf sehr einfachen Berechnungen, welche der Verfasser angiebt. Ok.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

G e o d ä s i e.

W. JORDAN. Handbuch der Vermessungskunde. Bd. II. Stuttgart. Metzler.

Siehe F. d. M. IX. p. 771. B.

H. BRUNS. Die Figur der Erde. Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung. Publication des geodätischen Institutes. Berlin. Stankiewicz.

Die bisherigen Versuche, die Figur der Erde zu ermitteln, beruhen darauf, dass das mathematische Bildungsgesetz dieser Figur hypothetisch als bekannt angenommen und die dabei auftretenden Constanten oder Parameter unter möglichst nahem Anschluss an die Beobachtungen bestimmt werden. Der Verfasser erörtert in der Einleitung die principielle Unvollkommenheit dieses Verfahrens, welche darin besteht, dass, wie die sogenannten Lothablenkungen lehren, die Beobachtungen nicht erschöpfend dargestellt werden, und stellt sich die Aufgabe, zu untersuchen, welche Messungsdata erforderlich sind, um die Erdfigur unabhängig von allen hypothetischen Annahmen zu ermitteln. Das Resultat lautet dahin, dass die zur Zeit verfügbaren Bestimmungs-

stücke, nämlich die astronomischen Polhöhen, Längen und Azimuthe, die Triangulationen, die trigonometrischen Höhenbestimmungen, die geometrischen Nivellements und die Schweremessungen hinreichend, aber auch, was ebenso wesentlich ist, in ihrer Gesammtheit zur Lösung der Aufgabe nothwendig sind.

Die mathematische Figur der Erde ist nach der üblichen Definition diejenige unter den Niveauflächen der Kräftefunction (W) der Erde, der die freie Oberfläche der Meere angehört. § 1 behandelt eine Reihe von Ursachen, aus denen die Meeresoberfläche nicht in aller Strenge eine Niveaufläche sein kann, und formulirt deshalb das Problem der wissenschaftlichen Geodäsie dahin, dass nicht eine bestimmte, sondern alle Niveauflächen oder Geoide ermittelt, oder was dasselbe ist, jene Kräftefunction selber gefunden werden solle. § 2 behandelt die allgemeinen Eigenschaften der Geoide, namentlich die Unstetigkeiten, welche die Krümmung dieser Flächen und der dazugehörigen Kraftlinien überall da besitzt, wo die Massendichtigkeit sich sprungweise ändert. § 3 führt den approximativen Ausdruck (U) für die Kräftefunction ein, welcher bei Untersuchungen dieser Art zweckmässig benutzt wird, um zu einer präcisen Definition der Lothstörungen zu gelangen. Hieran schliesst sich eine Herleitung des Clairaut'schen Theorems unter Zugrundelegung der hierfür einzig und allein nothwendigen Voraussetzung, dass der Fehler ($W-U$) jenes approximativen Ausdruckes vernachlässigt werden dürfe. Auf Grund der dann entwickelten Relationen zwischen $W-U$ und den Störungen der Schwere nach Richtung und Intensität wird mit Hülfe eines fingirten Beispiels der in Wirklichkeit vorkommende Betrag jener Störungen annähernd geschätzt. § 4 behandelt die möglichen Ergebnisse geodätischer Operationen und zeigt, dass man, je schärfer die Beobachtungen werden, desto mehr darauf verzichten müsse, die wahre Erdfigur durch analytische Ausdrücke darzustellen. Die nächsten drei Abschnitte beschäftigen sich mit den Resultaten, welche man aus den oben genannten Klassen von Messungsdaten herleiten kann, so lange keinerlei Hypothesen über die Erdfigur gemacht werden. Die astronomischen und trigonometrischen Messungen bestimmen

folgende Stücke: 1) die Form des Polyeders, dessen Ecken die Stationen eines gegebenen geodätischen Dreiecksnetzes sind, 2) die Orientirung dieses Polyeders in Bezug auf die Richtung der Erdaxe, jedoch nicht in Bezug auf deren Lage im Erdkörper, 3) das System von Geraden, welche die Richtung der wahren Lothlinie in den Dreieckspunkten angeben. Das geometrische Nivellement liefert ferner für diese Dreieckspunkte sowohl die Meereshöhenunterschiede, als auch die davon wohl zu unterscheidenden Niveaudifferenzen, welche durch die Werthdifferenzen der Kräftefunction W gemessen werden. Damit ist dann die relative Lage aller der Punkte bestimmt, in welchen irgend ein gegebenes Geoid von jenem Verticalensystem getroffen wird. Wesentlich ist hierbei, dass bei der Berechnung der geometrischen Nivellements die Aenderungen der Schwere längs der Nivellementslinie berücksichtigt werden, während der Einfluss der Lothablenkungen auf den Schlussfehler einer Schleife als praktisch unmerklich nachgewiesen wird. Endlich wird noch gezeigt, dass die beiden Erdabplattungen, welche aus Gradmessungen resp. aus Pendelbeobachtungen sich ergeben, zwei heterogene Grössen sind, deren Uebereinstimmung keineswegs gefordert werden darf. Der letzte Abschnitt behandelt die Form, die man auf Grund des Vorstehenden der strengen Lösung des Problems der wissenschaftlichen Geodäsie geben könnte, und formulirt die Anforderungen, welche dem entsprechend an das Beobachtungsprogramm der europäischen Gradmessung zu stellen sind. B.

A. R. Clarke. On the figure of the earth. Phil. Mag. 1878.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass nach den neuesten Messungen von verschiedenen Meridianbogen und namentlich nach denen in Indien die Gestalt der Erde am meisten in Uebereinstimmung sei mit einem Ellipsoid, dessen Halbaxen sind:

$$a = 20926629 \text{ engl. Fuss,}$$
$$b = 20925105 \quad " \quad " ,$$
$$c = 20854477 \quad " \quad " .$$

Die Länge der grösseren Axe des Aequators ist 8° 15′ westlich von Greenwich. Csy. (O.)

Helmert. Das Theorem von Clairaut. Z. f. Verm. VII. 121-145.

Die Begründung des genannten Theorems ist folgende: Die Kräftefunction der Erde V und die Schwere g_1 und g_2 für Aequator und Pol des Meeresniveaus werden nach Kugelfunctionen entwickelt. Bildet man dann den Ausdruck (w Schwungkraft im Aequator)

$$\frac{5}{2}w+g_1-g_2,$$

so erhält man dafür mit Rücksicht darauf, dass V im Aequator und im Pol denselben Werth besitzt, eine Reihe, deren Hauptglied die Gestalt: „Abplattung multiplicirt mit Aequatorschwere“ hat, während von den übrigen Gliedern durch eingehende Discussion gezeigt wird, dass sie von einer höheren Ordnung in Bezug auf die Abplattung sind, sobald man voraussetzt, dass die Schwere wesentlich dem Sinusquadrat der Breite proportional variirt. Hervorzuheben ist noch, dass der Verfasser überall bemüht gewesen ist, die Frage nach der Convergenz oder Divergenz der benutzten Reihenentwickelungen klarzustellen. B.

E. Adan. 1) Attractions locales. Corrections des éléments de l'ellipsoide osculateur. 2) Comparaison entre les coordonnées réelles et les coordonnées théoriques d'un lieu de la terre. Déviation ellipsoidale. 3) Mémoire sur l'ellipsoide unique. Mém. cour. de Belg. in 8°. XXIX.

J. C. Houzeau. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLVI. 6-11.

Der Verfasser betont namentlich folgenden Punkt: Die geodätischen Coordinaten sind von den astronomischen verschieden, nicht nur, weil sie von localen Ursachen beeinflusst sind, sondern

auch weil sie von dem osculirenden Ellipsoid abhängen, das in jedem Lande für die geodätischen Rechnungen angenommen ist. Der gemeinsame Zweck aller drei Arbeiten geht dahin, zu zeigen, wie man die Elemente des terrestrischen Ellipsoids corrigiren muss, um Uebereinstimmung zwischen den beiden Arten von Coordinaten hervorzubringen. Mn. (O.)

E. HILL. An elementary discussion of some points connected with the influence of geological change on the earth's axis of rotation. Proc. of Cambr. III. 161-165.

Elementare Erläuterungen einiger Resultate, die Herr G. H. Darwin in seiner Arbeit: On the influence of geological changes of the earth's axis of rotation. Phil. Trans. CLXVII. 271-312 veröffentlicht hat. Glr. (O.)

F. ZRZAVÝ. Einfache Formel zur Berechnung der Meridianconvergenz aus rechtwinkligen sphärischen Coordinaten mittelst einer Hilfstafel. Prag. Ber. 1877. 278-281.

Der Inhalt ist durch den Titel gegeben. B.

E. CZUBER. Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung durch zwei und mehrere Gerade. Prag. Techn. Blätter. 1878. 1-24.

Ausführliche Theorie der Fehlerellipse unter Zugrundelegung des Gauss'schen Fehlergesetzes und im Anschlusse an die hierhergehörigen Arbeiten von Andrä und Helmert. B.

HELMERT. Theorie der Libellenaxe. Z. f. Verm. VII. 185-192.

SCHREIBER. Ueber die Anordnung von Horizontalwinkelbeobachtungen auf der Station. Z. f. Verm. VII. 209-240.

Für die Triangulationen erster Ordnung des preussischen Generalstabes ist im Laufe des letzten Jahrzehnts ein Verfahren

zur Anwendung gelangt, welches unter Aufgebung der bisher allgemein üblichen Bessel'schen Satzmethode auf einer consequenten Ausbildung der Methode der reinen Winkelbeobachtungen beruht. Zweck dieser Aenderung waren die Erreichung vollkommener Symmetrie in der Vertheilung der Beobachtungen, möglichste Vereinfachung der Ausgleichungsrechnungen und möglichste Elimination der constanten Fehler. Der wesentliche Inhalt des vorliegenden Aufsatzes besteht in einer kurzen Darlegung der Vortheile der Winkelmethode, ferner in der Entwickelung der Vorschriften für die Anordnung und Ausgleichung der Stationsbeobachtungen, sowie für die Berechnung der mittleren Fehler, unter besonderer Berücksichtigung der verschiedenen Fehlerquellen und unter Ausführung eines der Wirklichkeit entnommenen Beispieles. B.

F. H. Reitz. Correctur des Amsler'schen Planimeters und Construction zweier neuer Varietäten desselben. Z. f. Verm. VII. 249-266.

Enthält im Wesentlichen eine theoretische Begründung für die Berichtigung des genannten Planimeters, sowie Vorschriften zur praktischen Ausführung dieser Berichtigung. Die beiden neuen Varietäten entsprechen folgenden Fällen. Wenn der Polarm des Instruments unendlich gross wird, so beschreibt das Gelenk zwischen Polarm und Fahrarm eine Gerade, d. h. man kann den Polarm einfach unterdrücken und dafür einem Punkte des Fahrarms eine geradlinige Führung geben. Andererseits kann man durch passende Wahl der Dimensionen des Instruments bewirken, dass die Constante, welche bei „Polstellung innerhalb der Figur“ zu der Rollenablesung hinzuzufügen ist, den Werth Null besitzt, so dass es gleichgültig bleibt, ob der Pol innerhalb oder ausserhalb der Figur liegt. B.

Lindemann. Einige Berechnungsarten für die Pothenot'sche Aufgabe und die Aufgabe der unzugänglichen Entfernung. Z. f. Verm. VII. 369-387.

BÖRSCH. Ausgleichungen von Präcisions-Nivellements.
Z. f. Verm. VII. 455-476, 495-514.

Der Aufsatz behandelt der Reihe nach die Ausgleichung eines Liniennivellements, ferner die eines Nivellementsnetzes, sei es nach vermittelnden, sei es nach bedingten Beobachtungen, endlich die combinirte Linien- und Netzausgleichung. Der letzte Fall, bei welchem die Ausgleichung aus einem Gusse geschieht, ist für die Rechnung der zeitraubendste; es wird deshalb durch Behandlung eines einfachen Beispieles gezeigt, wie sich die Rechnung in die den beiden ersten einfacheren Fällen entsprechenden Operationen zerlegen lässt. B.

A. NAGEL. Mittheilungen aus dem Gebiete der Geodäsie.
Civiling. XXIV. 285-302.

Nr. 1 enthält die Beschreibung eines von dem Verfasser construirten Apparates, des Longimeters, welcher zum Abtragen und Messen von Entfernungen auf dem Papier ohne Cirkel dient, nebst Begründung eines Prioritätsanspruches gegenüber dem 1877 im Württembergischen Gewerbeblatt Nr. 31 beschriebenen Wegmann'schen Schiebedreiecke. Nr. 2 enthält die Beschreibung eines anderen Apparates, des Alhidadentransporteurs zum Auftragen von Detailpunkten statt der aus den Theodolitmessungen berechneten Coordinaten. In Nr. 3 findet sich eine Besprechung des Messtisches von G. Heyde. Nr. 4 enthält eine Berichtigung von Bertram bezüglich des Bertram'schen Heliotropen, die sich auf die F. d. M. IX. p. 771 besprochene Notiz bezieht. Nr. 5 endlich „Lothungen und Lothungsapparate" giebt eine eingehende Auseinandersetzung der Methoden zur Feststellung der vertikalen Richtung mittelst Loth und Libelle. O.

W. TRZASKA. Beweis eines Satzes von Lamé.
Par. Denkschr. 1878. (Polnisch.).

In dem Werke „Examens des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie" hat G. Lamé eine

Formel gegeben, die zur Bestimmung der Neigung einer Grubenschicht dient, wenn man die Tiefen von drei Bohröffnungen und ihre gegenseitigen horizontalen Entfernungen kennt. Herr Trzaska giebt einen neuen, den Lamé'schen durch Symmetrie und Kürze übertreffenden Beweis dieser Formel. Dn.

Astronomie.

H. GYLDÉN. Die Grundlehren der Astronomie nach ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. Leipzig. Engelmann. 1877.

Das Buch, das uns in der deutschen, vom Verfasser besorgten Ausgabe vorliegt, verfolgt keinen wissenschaftlichen Zweck. Es will nur dem gebildeten Leser ein Bild der Entwickelung und des neuesten Standpunktes der Hauptlehren der Astronomie geben. Es ist das aber nicht so gemeint, dass es auf alle mathematischen Vorkenntnisse verzichtet; es beschränkt sich jedoch auf das Nothwendigste, was man eben heutzutage bei jedem gebildeten Leser sollte voraussetzen können. Nachdem in der Einleitung der Begriff dessen, was unter Astronomie zu verstehen sei, festgestellt worden ist, wird im ersten Capitel die Zeit vor Newton behandelt. Im ersten Paragraphen giebt der Verfasser zunächst eine Beschreibung der Hülfsmittel, die in den älteren Zeiten bei astronomischen Beobachtungen benutzt wurden. Er bespricht dann in den Paragraphen 2 und 3 die Astronomie bei den Chinesen, Chaldäern, und die ältere griechische Periode. In § 4 folgt dann eine Darstellung der Kenntnisse der älteren Zeiten über die das Sonnensystem bildenden Körper, dem auf p. 87-99 ein Abschnitt über die Haupteigenschaften der trigonometrischen Linien, sowie über die Darstellung von Curven durch Gleichungen eingefügt ist. In § 5 folgt die Besprechung der alexandrinischen Schule, namentlich bezüglich ihrer Erklärung der Ungleichheiten in den Bewegungen von Sonne, Mond und Planeten. Die Zeit von Ptolemäus bis Copernicus wird nur kurz charakterisirt,

und in § 6 wendet sich der Verfasser zu Copernicus und Kepler. Durch diese war die Bahn frei gemacht für die neuere Entwickelung, die mit Newton beginnt. Ihr ist das zweite Capitel gewidmet, dessen einzelne Paragraphen sich mit Galilei's mechanischen Entdeckungen (§ 8), Sätzen aus der Mechanik (§ 9), Newton's Entdeckung der allgemeinen Gravitationsgesetze (§ 10) und den Folgen derselben (§ 11) beschäftigen. Die beiden folgenden Capitel 3 und 4 sind einer Darstellung des jetzigen Standpunkts der Astronomie gewidmet, und zwar bespricht Capitel 3 die neuen Beobachtungsmittel, nämlich (§ 12) Coordinaten im Raume und auf der Sphäre, § 13 astronomische Beobachtungen und Instrumente, § 14 handelt von den wahren, scheinbaren und mittleren Oertern der Himmelskörper. Capitel 4 bespricht die neueren astronomischen Forschungen, und zwar § 15 die Bestimmung der Entfernungen der Himmelskörper, § 16 die kleinen Planeten, § 17 die Cometen, § 18 die Doppelsterne, § 19 die Helligkeit der Sterne, § 20 die scheinbare Vertheilung der Sterne, § 21 die Bewegungen der Sterne. Im Anhang ist ein Abschnitt hinzugefügt, welcher die Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie enthält, und eine Zusammenstellung der Elemente der Körper des Sonnensystems. O.

F. W. Bessel. Recensionen. Herausgegeben von R. Engelmann. Leipzig. W. Engelmann. 8°.

Die Sammlung enthält 39 Recensionen von Bessel über Werke der Astronomie, welche in der Jena'schen Allgemeinen Literaturzeitung, sowie in den Jahrbüchern für wissenschaftliche Kritik erschienen sind, und ist als eine wichtige Ergänzung der von demselben Herausgeber veranstalteten Sammlung der Werke Bessel's anzusehen, da die Mehrzahl der Recensionen auch heute noch von mehr als bloss historischem Werthe ist. B.

J. C. Houzeau. Répertoire des constantes de l'astronomie. Ann. de l'obs. r. de Brux. (2) I.

Systematische Gruppirung der Constanten, die sich auf einen und denselben Himmelskörper beziehen, mit genauen bibliographischen Nachweisen der Quellen, denen die Zahlen entnommen sind. I. Sphärische Astronomie. (Schiefe der Ekliptik, Präcession, Nutation, Aberration, Refraction etc.). II.—XIII. Sonnensystem (Sonne, Mond, Merkur etc.). XIV. Cometen. XV. Meteoriten. XVI. Das Sonnensystem als Ganzes. XVII.—XIX. Sterne. Zusätze. Das Zodiakallicht. Nachträge und Verbesserungen.

Der Verfasser wird nächstens eine vollständige astronomische Bibliographie publiciren, von der das vorliegende Werk nur ein Auszug ist. Mn. (O.)

E. Mathieu. Réponse à M. Allégret sur le problème des trois corps. Liouville J. (3) IV. 61-63.

Siehe F. d. M. IX. p. 787. B.

Th. von Oppolzer. Einige Bemerkungen über die Bahnbestimmung aus drei Orten. Astr. Nachr. XCII. 97-104.

Die Bahnbestimmung aus drei Orten wird nach der üblichen Darstellung undurchführbar, sobald dieselben in einem grössten Kreise liegen, und sobald dieser durch den mittleren Sonnenort geht. Der Aufsatz zeigt zunächst, dass beide Bedingungen im Allgemeinen gleichzeitig eintreten, dass also die erste allein schon genügt. Sodann ist der Fall näher besprochen, in welchem die bekannte bei der Bahnbestimmung auftretende Gleichung siebenten Grades zwei vorläufig zulässige Wurzeln besitzt. Unter Mittheilung eines Hülfstäfelchens werden die Grenzen discutirt, innerhalb deren dieser Fall eintreten kann. B.

E. Collignon. Note sur le mouvement des planètes. J. de l'Éc. Pol. XXVIII. 173-200.

Der Verfasser zeigt zunächst, wie man die Bewegung eines Planeten in einer Ellipse nach den Kepler'schen Gesetzen sowohl

strenge, als auch approximativ durch Räderwerke darstellen könne. Daran schliesst sich eine analoge Untersuchung für die Parabel, deren Resultate noch etwas verallgemeinert werden, indem anstatt der Parabel die Curve

$$r \cos^n \frac{\theta}{n} = 1$$

betrachtet wird. B.

E. Millosevich. Di alcune curiose relazioni numeriche tra i medi movimenti dei pianeti. Atti Ist. Ven. (2) XIII. 235. B.

F. Tissérand. Sur un point important de la théorie des perturbations planétaires. Ann. de l'Éc. N. (2) VII. 261-275, Mém. de Toul. (7) VII. 374-388.

Die vorliegende Abhandlung ist bereits 1875 in den Mém. de l'Ac. de Toulouse erschienen und enthält eine Vervollständigung der Doctoratsthese des Verfassers aus dem Jahr 1860, in welcher die von Delaunay bei seiner Mondtheorie benutzte Methode auf die gegenseitigen Störungen von Jupiter und Saturn angewendet worden war. Der wesentliche Inhalt beschränkt sich auf die Herleitung der Störungsgleichungen in der kanonischen Form. Der erste Planet wird auf die Sonne, der zweite auf den gemeinsamen Schwerpunkt der Sonne und des ersten Planeten bezogen. Eine geeignete Spaltung der Kräftefunction liefert als erste Approximation für beide Körper Ellipsen; als Winkelelemente werden mittlere Anomalie, Abstand des Perihels vom Knoten und Länge des Knotens gewählt, wodurch die noch übrigbleibenden Elemente völlig bestimmt sind. Durch diese Wahl wird u. A. eine Vereinfachung des Beweises für den Satz erreicht, dass die grossen Axen keine säculären Terme besitzen, so lange man nur die Störungen erster und zweiter Ordnung mitnimmt. (Vgl. F. d. M. VIII. 738). B.

Baillaud. Sur la méthode de Hansen pour la détermination des perturbations absolues des petites planètes. Darboux Bull. (2) II. 261-264.

Einfache Herleitung der Hansen'schen Störungsformeln.

B.

Baillaud. Sur une transformation trigonométrique employée par Hansen dans la théorie des perturbations. Darboux Bull. (2) II. 292-298.

B.

Th. von Oppolzer. Neue Methode zur Bestimmung der Bahnelemente gleicher Wahrscheinlichkeit für einen kleinen Planeten aus den Beobachtungen einer Erscheinung. Berl. Monatsber. 1878. 583-602.

Der Grundgedanke dieser Methode beruht darauf, dass die heliocentrischen Coordinaten x, y, z eines Planeten sich in der Form

$$x = ax_0 + b\xi_0, \quad y = ay_0 + b\eta_0, \quad z = az_0 + b\zeta_0$$

darstellen lassen, wo die a und b in allen drei Gleichungen dieselben Functionen der Zeit t, sowie der Coordinaten x_0, y_0, z_0 und der Geschwindigkeiten ξ_0, η_0, ζ_0 für die Anfangszeit t_0 sind. Die Entwickelung der a und b nach Potenzen von $t-t_0$ ergiebt sich ohne weiteres aus den Differentialgleichungen der Bewegung. Es werden dann die $x_0, y_0, z_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ statt der üblichen Bahnelemente als Unbekannte eingeführt und die dazugehörigen Rechnungsvorschriften in extenso entwickelt. Der Hauptvortheil dieser Wahl besteht darin, dass der lineare Zusammenhang zwischen den Verbesserungen der Unbekannten und der Beobachtungen, welcher für die Ausgleichungsrechnung Hauptbedingung ist, nach Ausweis des mitgetheilten numerischen Beispieles, in sehr weitem Umfange besteht. Damit ist dann zugleich eine einfache Lösung der in der Ueberschrift genannten, praktisch wichtigen Aufgabe gegeben. B.

H. Seeliger. Ueber die Gleichung, von deren Wurzeln die säcularen Veränderungen der Planetenbahnelemente abhängen. Astr. Nachr. XCIII. 353-364, Nr. 2231.

Wenn man die Entwickelung der Störungsfunction bei den Gliedern von der zweiten Dimension in Bezug auf Neigung und Excentricität abbricht und von den Säcularänderungen der grossen Axen absieht, so reducirt sich die Ermittelung der Säcularstörungen von Neigung und Excentricität bekanntlich auf die Behandlung eines Sytems linearer Differentialgleichungen. Die Integration desselben führt auf eine auch anderweitig auftretende algebraische Gleichung, deren Grad gleich der Anzahl der störenden und gestörten Planeten ist. Wenn die Säcularstörungen nur periodische Terme enthalten sollen, so müssen die Wurzeln dieser Gleichung reell und von einander verschieden sein. Der vorliegende Aufsatz zeigt nun für den Fall dreier Planeten mit den Massen m, m', m'', dass die eine der beiden Bedingungen für das Zusammenfallen zweier Wurzeln sich auf die Form

$$Am + Bm' + Cm'' = 0$$

bringen lässt, wo die A, B, C wesentlich positive und im Allgemeinen von Null verschiedene Grössen sind. Hiernach können gleiche Wurzeln nur auftreten, wenn die drei Massen nicht gleiches Zeichen besitzen. Der Beweis stützt sich auf die Laplace'schen Entwickelungen und auf gewisse Sätze aus der Theorie der hypergeometrischen Reihen. B.

H. Seeliger. Ueber das von Gauss herrührende Theorem die Säcularstörungen betreffend. Astr. Nachr. XCIV. 1-32, Nr. 2233-2234.

Der von den mittleren Anomalien unabhängige Theil in der Entwickelung der Störungsfunction zweier Planeten lässt sich als das gegenseitige Potential einer gewissen Massenbelegung beider Bahnellipsen darstellen. Bei der Berechnung dieses Gliedes führt die erste Integration auf elliptische Integrale, deren Reduction auf die Normalformen bekanntlich von Gauss für den

vorliegenden Fall erledigt worden ist, während die zweite Integration durch mechanische Quadratur zu bewerkstelligen ist. Der vorliegende Aufsatz knüpft in seinem ersten Theile an die Gauss'sche Arbeit an, und entwickelt vollständig in ganz analoger Weise direct die Differentialquotienten des in Rede stehenden Ausdruckes, genommen nach den Elementen des gestörten Planeten. Im zweiten Theile wird auf etwas umständliche Weise der Nachweis geführt, dass die bei der zweiten Integration erforderliche mechanische Quadratur für den Fall der alten Planeten rasch convergirt, ein Resultat, das sich auch ohne Rechnung unmittelbar aus der bekannten raschen Convergenz der nach den mittleren, wahren oder excentrischen Anomalien entwickelten Reihe für die Störungsfunction der alten Planeten ergiebt.

B.

E. Mathieu. Sur l'application du problème des trois corps à la détermination des perturbations de Jupiter et de Saturne. J. de l'Éc. Pol. XXVIII. 245-269.

Die Abhandlung ist die Fortsetzung einer früheren Arbeit (F. d. M. VIII. p. 738), in welcher der Verfasser die Bewegungsgleichungen unter Benutzung der Flächensätze auf ein kanonisches System achter Ordnung reducirt hatte. Für die correspondirende partielle Differentialgleichung wird nun zunächst eine vollständige Lösung gesucht unter der Voraussetzung, dass die Anziehung nur zwischen dem ersten uud zweiten, resp. ersten und dritten Körper stattfinde. Die Variation der Constanten, an den Bahnelementen dieser Lösung ausgeführt, liefert dann sofort die acht entsprechenden kanonischen Störungsgleichungen. Betreffs der Formelentwickelungen und der daran geknüpften Bemerkungen muss auf die Abhandlung selber verwiesen werden, die nur als eine Vorbereitung für die Bearbeitung der Jupiter- und Saturnstheorie anzusehen ist.

B.

E. Neison. On some terms of long period in the mean motion of Mars. Monthl. Not. XXXVIII. 457-460.

Der Verfasser hat kürzlich zwei neue Glieder von langer Periode in der mittleren Bewegung des Mars entdeckt, welche Coefficienten von merklichem Werthe haben, und deren Existenz zum Theil die Fehler in Leverrier's Marstafeln erläutern. Das erste derselben rührt von der vereinigten Wirkung von Erde und Saturn her, hat eine Periode von 220,9 Jahren und einen Werth von

$$\begin{aligned} &-0'',3388 \sin([2n'''-n''-2n^{V}]t+2\varepsilon'''-\varepsilon''-2\varepsilon^{V}+\varpi''') \\ &+0\ ,0250 \sin(\quad " \qquad\qquad " \quad +\varpi^{V}) \\ &+0\ ,0248 \sin(\quad " \qquad\qquad " \quad +\varpi''). \end{aligned}$$

Das zweite rührt her von der vereinigten Wirkung von Erde und Jupiter, hat eine Periode von 46,52 Jahren und den Werth:

$$\begin{aligned} &-6'',2934 \sin([6n'''-3n''-2n^{IV}]t+6\varepsilon'''-3\varepsilon''-2\varepsilon^{IV}-\varpi''') \\ &+0\ ,0530 \sin(\quad " \qquad\qquad " \quad -\varpi'') \\ &+0\ ,0025 \sin(\quad " \qquad\qquad " \quad +\varpi^{IV}-2\varpi'''). \end{aligned}$$

Der Verfasser giebt noch eine Reihe anderer Glieder mit langer Periode, deren Coefficienten kleiner sind, trotzdem aber bei feinen Beobachtungen des Mars bemerkbar werden.

Glr. (O.)

HENNEDY. Observations à propos d'une communication de M. Amigues, sur l'aplatissement de la planète Mars. C. R. LXXXVII. 590-593.

Prioritätsreclamation gegenüber einer Note des Herrn Amigues über die Marsabplattung. (C. R. LXXVIII. 1557; s. F. d. M. VI. 734.)

B.

O. CALLANDREAU. Détermination, par la méthode de M. Gyldén, du mouvement de la planète Héra (103). C. R. LXXXVII. 1071-1074.

B.

R. A. PROCTOR. On the determination of the axial position of Mars with respect to the Earth at any epoch. Monthl. Not. XXXVIII. 320-328.

Der Verfasser setzt eine im Vergleich mit anderen einfache Construction auseinander, durch welche man die Projection des Mars zu beliebiger Zeit erhalten kann, wenn die Declination und Rectascension des Planeten bekannt sind. Glr. (O.)

A. Hall. The centre of gravity of the apparent disk of a planet. Monthl. Not. XXXVIII. 122-123, Analyst V. 44-45.

In dem ebenen Dreieck zwischen Sonne, Erde und dem Planeten sei φ der Winkel an dem Planeten, a der Radius des halbkreisförmigen Theils der Scheibe, dann ist m, die Entfernung des Schwerpunkts der sichtbaren Scheibe von der Verbindungslinie der Spitzen, gleich

$$\frac{8a}{3\pi}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{8a}{3\pi}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

je nachdem der Planet ab- oder zunehmend ist. Dieser Ausdruck wird gefunden, wenn der Positionswinkel und die Distanz eines Satelliten des Planeten mit einem Fadenmikrometer beobachtet werden und die Fläche der sichtbaren Scheibe des Planeten durch den Faden halbirt wird, so dass er durch den Schwerpunkt geht. Die Correctionen, die nöthig, um diese Messungen auf den wahren Schwerpunkt des Planeten zu reduciren, sind dann

$$\Delta s = m\sin(p-\theta), \quad \Delta p = \frac{m}{s}\cos(p-\theta),$$

wo θ, s die beobachteten Positionswinkel und Distanz des Satelliten, θ der Positionswinkel der Spitzenlinie ist.

Glr. (O.)

R. H. M. Bosanguet. On the solution by trial of Lambert's theorem in Olbers' method for the computation of parabolic orbits. Monthl. Not. XXXVIII. 353-366.

In allen verschiedenen Formen der Olbers'schen Methode zur Berechnung parabolischer Bahnen giebt es einen gewissen Schritt, welcher im Princip auf der versuchsweisen Fin-

dung der heliocentrischen Radiivectores des Planeten beruht, welche den durch die Anwendung des Lambert'schen Satzes auf die beobachteten Zeiten gegebenen Bedingungen genügen. Die von dem Verfasser vorgeschlagene Methode ist folgende: Der zuerst angenommene Werth von u sei u_0; man habe nach der Berechnung von r, r'' (heliocentrischen Radiivectores) und k^2 (Quadrat der Sehne) u_1 erhalten. Der wahre Werth von u sei u und es sei

$$u_0 = u + \delta u_0, \quad u_1 = u + \delta u_1.$$

Wenn man dann eine Relation $\delta u_1 = -F\delta u_0$ zwischen δu_1 und δu_0 sucht, so giebt dies, combinirt mit $u_0 - u_1 = \delta u_0 - \delta u_1$,

$$u = u_1 + (u_0 - u_1)\frac{F}{F+1},$$

welches der Ausdruck für das gesuchte u ist. Der Ausdruck für F wird bestimmt und ein numerisches Beispiel ausgeführt.

Es ist dies dieselbe Methode, die der Verfasser in den Astr. Nachr. für 1872 vorgeschlagen hatte. Die Untersuchung ist im Wesentlichen unverändert, nur das Zahlenbeispiel ist revidirt.

Glr. (O.)

Th. von Oppolzer. Entwickelung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radiusvector nach der Excentricität in nahezu parabolischen Bahnen. Berl. Monatsber. 1878. 852-859.

Die entwickelten Formeln sind streng und sehr einfach, sobald vier gewisse Hülfsgrössen, die von dem Argument

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}v$$

abhängen, in Tafeln gebracht sind. Ein Auszug aus einer solchen Tafel, der für die meisten Fälle ausreicht, ist als Anhang gegeben.

B.

E. Mathieu. Sur la théorie des perturbations des comètes. Extrait par l'auteur. C. R. LXXXVII. 1029-1031.

Der Verfasser behandelt die Aufgabe, den Radiusvector, die Zeit und die wahre Anomalie durch eine Variable mittelst Reihen auszudrücken, welche grade für Werthe der Excentricität, die der Einheit nahekommen, rasch convergiren. B.

H. GYLDÉN. Recueil de tables contenant les développements numériques à employer dans le calcul des perturbations des comètes. Astronomiska Jaktagelser och undersökningar anstälda på Stockholms observatorium. I. Häftet 3. 1877.

Die Tafeln sind bestimmt, die Anwendung der Störungsmethode des Verfassers zu erleichtern. Nachdem in der Einleitung kurz die beiden Hauptaufgaben, um deren Lösung es sich hierbei handelt, besprochen sind, werden in der ersten Hälfte des Bandes die Formeln, auf denen die Tafeln beruhen, und ihre Anwendung auseinander gesetzt, während der zweite Theil die Tafeln selbst enthält. B.

G. W. HILL. Researches in the lunar theory. Am. J. I 5-27, 129-148, 245-251.

Da das Referat zweckmässig bis zum vollständigen Erscheinen der Abhandlung aufgeschoben wird, so sei hier nur erwähnt, dass der Verfasser sich die Aufgabe gestellt hat, folgende Ungleichungen der Mondbewegung zu untersuchen: erstens die, welche nur abhängen von dem Verhältniss der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond, ferner diejenigen, welche resp. der Mond- und Sonnenexcentricität, dem sinus der Mondbahnneigung und der Sonnenparallaxe proportional sind. B.

G. W. HILL. On the motion of the centre of gravity of the earth and moon. Analyst V. 33-38.

Man hat allgemein behauptet, dass die Bewegung des Schwerpunkts von Erde und Mond wesentlich dieselbe sei, wie wenn

die Massen der beiden Körper in diesem Punkt vereinigt wären. Wenn diese Behauptung wahr wäre, würde unter Beiseitlassung der Wirkung der Planeten folgen, dass man die ziemlich genaue mittlere Winkelbewegung des Schwerpunktes um die Sonne erhalten könnte dadurch, dass man zuerst die mittlere Entfernung a' aus dem elliptischen Werthe des Radiusvector

$$r' = a'(1 + \tfrac{1}{2}e'^2 + \text{period. Glieder})$$

ableitete und sodann n' aus der Gleichung $n' = \sqrt{\frac{M}{a'^3}}$, wo M die Summe der Massen von Sonne, Erde und Mond bezeichnet.

Der Verfasser untersucht, ob dies wirklich unter den gemachten Voraussetzungen genau sei, und findet als Resultat, dass

$$r' = a'\{1{,}0000000200 + 0{,}0000000003 \cos 2\tau\}$$
$$\lambda' = e' + n't - 0'',0001 \sin 2\tau,$$

wo λ' die Länge der Sonne und τ die mittlere Winkelentfernung des Mondes von der Sonne ist. Zu diesen Resultaten bemerkt er: „Die periodischen Glieder sind zu klein für die Betrachtung, aber das constante Glied $r' \div a'$ kann bemerkbar werden. Wenn man den Werth von a' aus gemessenen Werthen von r' unter der Annahme, dass der Werth des constanten Gliedes gleich der Einheit ist, erhalten hätte, würde a um den Theil 0,00000002 zu gross werden.“ Dieser Werth in die Gleichung $n' = \sqrt{\frac{M}{a'^3}}$ substituirt würde n' um den Theil 0,00000003 zu klein ergeben, oder n' würde um 0'',03895 zu klein werden. Der Fehler in der mittleren Länge der Sonne würde in einem Jahrhundert also nahezu 4'' sein, ein Werth, der bei dem gegenwärtigen Stande der Astronomie nicht vernachlässigt werden darf. Wie dem auch sei, die Astronomen verfolgen den umgekehrten Weg, d. h. sie beobachten n' und leiten daraus r' her. In diesem Fall ist das Glied 0,00000002 ohne Bedeutung, weil die Logarithmen der Radiivectores in den Ephemeriden gewöhnlich nur bis auf 7 Stellen gegeben werden. Glr. (O.)

G. W. Hill. The secular acceleration of the moon. Analyst V. 105-110.

In den Phil. Trans. von 1853 hat Herr J. C. Adams gezeigt, dass die Werthe der säcularen Beschleunigung der mittleren Mondbewegung, die Plana und Damoiseau erhalten hatten, falsch seien, weil diese Verfasser die Mondexcentricität während eines Theils der Untersuchung als constant betrachtet hatten.

In der vorliegenden Arbeit leitet Herr Hill den Coefficienten des Gliedes in der mittleren Mondbewegung, der das Quadrat der Sonnenexcentricität, diese als variabel vorausgesetzt, enthält, bis auf Grössen von der Ordnung der Quadrate der störenden Kraft der Sonne ab, unter Vernachlässigung der Mondexcentricität und Neigung der Bahn. Die angewandte Methode ist dieselbe, die Herr Donkins früher benutzt hatte; gegen Ende der Untersuchung gelingt es dem Verfasser jedoch, die explicite Entwickelung von R in eine periodische Reihe zu umgehen, wodurch die Untersuchung wesentlich abgekürzt wird.

Wenn ξ die mittlere Länge des Mondes, afficirt von dieser säculären Ungleichheit, bezeichnet und n_0 die mittlere Bewegung zu einer gegebenen Zeit ist, gezählt vom Anfang der Zeit, so wird gezeigt, dass in der Gleichung

$$\frac{d\xi}{dt} = n = n_0\{1+H(e_0'^2-e'^2)\}$$

der wahre Werth von H gleich $\frac{3}{2}\left(\frac{n'}{n_0}\right)^2 - \frac{3771}{64}\left(\frac{n'}{n_0}\right)^4$ ist.

Glr. (O.)

G. W. Hill. On Dr. Weiler's secular acceleration of the moon's mean motion. Astr. Nachr. XCI. 251. Nr. 2176.

Bereits in F. d. M. IX. p. 794 besprochen. B.

E. Neison. On Hansen's terms of long period in the lunar theory. Monthl. Not. XXXVIII. 268-279.

Hansen entdeckte, wie bekannt, die Existenz zweier Glieder von langer Periode in der Bewegung des Mondes, die von den Störungen der Venus herrühren, und welche die Argumente $(g - 18g'' + 16g')$ und $(8g'' - 13g')$ haben. Er versuchte die Coefficienten dieser Glieder auf 2 Weisen zu bestimmen. Die Resultate waren aber verschieden, und er brachte sie daher empirisch so in Uebereinstimmung, dass sie mit den Beobachtungen während des Zeitraums von 1750—1850 stimmten. Delaunay untersuchte die beiden Glieder und, während sich aus der Theorie der Werth, den Hansen empirisch auf $(g - 18g'' + 16g')$ bestimmt hatte, vergrösserte, fand er den theoretischen Werth des Gliedes $(8g'' - 13g')$ nur so klein, dass er als unmerklich betrachtet werden konnte. Hansen gab nachher die Ungenauigkeit seiner früheren Untersuchungen zu. Herr Neison ist nun immer der Ansicht gewesen, dass Hansen mit seiner Erklärung absichtlich gewartet habe, bis er seine dritte Untersuchung vollendet. Er hat daher, in dieser Ansicht durch einen Passus bei Hansen bestärkt, jetzt untersucht, ob irgend ein System von Gliedern, das von Delaunay vernachlässigt worden ist, den Coefficienten dieses Gliedes vergrössern könne. In der That hat sich dabei eine Klasse von Gliedern gefunden, auf welche Hansen's Bemerkungen angewandt werden können. Der dadurch hervorgerufene numerische Einfluss ist nicht angegeben. Glr. (O.)

E. Neison. On Newcomb's correction of Hansen's value of the secular acceleration. Monthl. Not. XXXIX. 72-73.

Prof. Newcomb hat neuerdings (Appendix II. 1878. Washington Observations) durch Vergleichung von Hansen's Mondtafeln mit den Finsternissbeobachtungen alexandrinischer und arabischer Astronomen und mit den Mondbeobachtungen zwischen 1600 und 1750 gezeigt, dass der Werth für die mittlere Bewegung und die mittlere Beschleunigung zu gross gegeben war, und dass die Tafeln die Beobachtungen zwischen 1600 und 1750 nicht darstellen. Er verringert die säculare Beschleunigung um 3",86, nachdem die Hauptdaten von ihm auf 13 Mondfinsternisse von

Ptolemäus und 20 Mond- und Sonnenfinsternisse der arabischen Astronomen zwischen 820 und 1004 angewandt waren. Herr Neison zeigt, dass wenn eine dieser Finsternisse ausgesondert wird, die säculare Beschleunigung um $4'',80$ reducirt werden kann und bei Aussonderung einer Gruppe von vieren um $4'',97$, wodurch die säculare Beschleunigung auf $7'',20$ reducirt würde, ein Werth, der nur um $1''$ grösser ist als der theoretische Werth $6'',18''$. Glr. (O.)

E. Neison. On a secular term in the mean motion of the moon. Monthl. Not. XXXVIII. 118.

Die Mondcoordinaten enthalten ein Glied von langer Periode, welches von der Wirkung des Mars herrührt und das Argument $\{[A - 15n'' + 28n''']t + E\}$ hat, wo At die mittlere Bewegung des Mondperigäums und $n't$ und $n'''t$ die mittleren Bewegungen der Erde und des Mars sind. Dies Glied hat eine Periode von 6000 Jahren und ist von der 14ten Ordnung der Excentricität von Mars und Erde. Die Excentricität von Mars ist übrigens so gross, dass der Coefficient dieses Gliedes verhältnissmässig beträchtlich ist trotz des hohen Grades. Dies Glied wird ein ähnliches Glied in die mittlere Bewegung des Mondes durch die Störungen der Sonne einführen und wird multiplicirt sein mit dem Quadrate der Mondstörung, die von der Sonne herrührt, dividirt durch den kleinen Coefficienten der Zeit. Da $[A - 15n'' + 28n'''] = 197'',715$, wird das Glied unbeschränkt wachsen und offenbar einen beträchtlichen Coefficienten haben. Die vorliegende Note bezieht sich auf das einzelne Glied $[A - 13n'' + 28n'''] - 9\varpi''' - 5\varpi''$, in dem der Coefficient von t auf Null reducirt ist durch die Bewegung der Perihelien von Mars und Erde. Es bildet daher ein säculäres Glied in der mittleren Bewegung des Mondes und dies ist, wie der Verfasser meint, das erste bestimmte Glied dieser Art, welches von der directen Wirkung der Planeten herrührt. Der Verfasser erwähnt, dass er noch zwei ähnliche Glieder kennt, die aber klein sind. Glr. (O.)

E. Neison. On a small term of long period in the mean motion of the moon. Monthl. Not. XXXVIII. 116-118.

Die mittlere Bewegung des Mondes enthält ein Glied von langer Periode mit einem Argument von der Form

$$\{[\alpha - 29n'' + 26n']t + \varepsilon - 29\varepsilon'' + 26\varepsilon' - E - A_0\},$$

wo $\alpha t + \varepsilon - A_0$ die mittlere Anomalie des Mondes und ε', n' und ε'', n'' Grössen bezeichnen, die sich resp. auf die Venus und die Erde beziehen. Dies Glied hat eine Periode von 130 Jahren, und da es wahrscheinlich ist, dass es bemerkbar werden wird, berechnete der Verfasser den Coefficienten desselben, welchen er nicht über $-0'',150$ fand. Es schien immerhin wünschenswerth, die Berechnung dieses Gliedes mit den genügenden Details bekannt zu machen für eine etwaige Wiederholung der Untersuchung, weshalb der Verfasser sie veröffentlicht hat. Glr. (O.)

J. C. Adams. Note on a remarkable property of the analytical expression for the constant term in the reciprocal of the moon's radius vector. Monthl. Not. XXXVIII. 460-472.

Wenn $\xi_1 = nt + \varepsilon - n't - \varepsilon'$ die mittlere Entfernung des Mondes von der Sonne, φ, φ' die mittleren Anomalien des Mondes und der Sonne, und η die mittlere Mondentfernung vom aufsteigenden Knoten ist, dann ist bekannt, dass, wenn r den Radiusvector des Mondes bezeichnet, und man die Glieder, die von der Sonnenparallaxe abhängen, fortlässt, der Werth von $\frac{a}{r}$ entwickelt werden kann in eine unendliche Reihe, welche die Cosinus von Winkeln enthält von der Form

$$2i\xi \pm j\varphi \pm j'\varphi' \pm 2k\eta$$

wo i, j, j', k irgend welche positive ganze Zahlen (0 einschliesslich) bezeichnen. Der Coefficient des Gliedes mit diesem Argument enthält $e^j e'^{j'} \gamma^{2k}$ als Factor, während der übrigbleibende Factor eine Function von m, e^2, e'^2 und γ^2 ist (γ ist der Sinus der halben mittleren Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik).

Im Besonderen giebt es ein constantes Glied in $\frac{a}{r}$, welches dem Fall entspricht, in dem i, j, j', k alle Null sind. Dies Glied hat die Form:

$$A + Be^2 + C\gamma^2 + Ee^4 + 2Fe^2\gamma^2 + G\gamma^4 + \cdots,$$

wo

$$\begin{aligned} A &= A_0 + A_1 e'^2 + A_2 e'^4 + \cdots \\ B &= B_0 + B_1 e'^2 + B_2 e'^4 + \cdots \\ C &= C_0 + C_1 e'^2 + C_2 e'^4 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und $A_0, A_1 \ldots, B_0, B_1 \ldots, C_0, C_1 \ldots$ alle Functionen von m sind.

Plana und nach ihm Lubbock, Pontécoulant und Delaunay haben die Functionen von m, welche in den Coefficienten einiger Glieder von $\frac{a}{r}$ und der anderen Coordinaten des Mondes vorkommen, nach steigenden Potenzen von m entwickelt. In Beziehung auf das constante Glied in $\frac{a}{r}$ zeigte Plana, dass die mit B_0 und C_0 bezeichneten Grössen beide verschwinden, wenn man Rücksicht nimmt auf Glieder, die m^2 und m^3 enthalten. Pontécoulant trieb die Entwickelung von B_0 und C_0 zwei Grade höher, d. h. bis auf Glieder, die m^5 enthalten, und fand, dass auch diese Glieder verschwinden.

Herr Adams zeigt nun in der vorliegenden Arbeit, dass dasselbe gilt für die allgemeineren Coefficienten B und C, so dass die Coefficienten von

$$\begin{array}{llll} e^2, & e^2e'^2, & e^2e'^4, & \ldots \\ \gamma^2, & \gamma^2e'^2, & \gamma^2e'^4, & \ldots \end{array}$$

in dem constanten Gliede von $\frac{a}{r}$ alle identisch gleich Null sind.

Herr Adams stellt auch zwei bemerkenswerthe Relationen zwischen den Coefficienten von e^4, $e^2\gamma^2$ und γ^4 in dem constanten Gliede von $\frac{a}{r}$ auf, die oben mit E, F und G bezeichnet waren. Die Relationen können so ausgedrückt werden:

Wenn die Glieder der Grösse c oder $\frac{d\varphi}{ndt}$, welche e^2 und

γ^2 enthalten, mit $He^2 + K\gamma^2$ bezeichnet werden und ähnlich die Glieder von g oder $\frac{d\eta}{ndt}$, welche e^2 und γ^2 enthalten, mit $Me^2 + N\gamma^2$, wo H, K, M, N Functionen von m und e'^2 sind, dann ist

$$\frac{E}{F} = \frac{H}{K} \text{ und } \frac{F}{G} = \frac{M}{N}.$$

Diese Relationen werden mit Hülfe desselben Princips bewiesen, welches bei dem Beweise, dass $B = 0$, $C = 0$, benutzt wurde.

Glr. (O.)

SOUILLART. Inégalités des rayons vecteurs et de longitudes des satellites de Jupiter, dépendantes du carré de la force perturbatrice. Astr. Nachr. XCIII. 81-96, Nr. 2214.

Der Verfasser bemerkt, dass in den Störungen zweiter Ordnung, welche in der „Mécanique céleste" für die drei inneren Jupitersatelliten entwickelt sind, merkliche Glieder fehlen und dass selbst noch die Glieder dritter Ordnung nicht durchgehends unmerklich sind. In dem vorliegenden Aufsatze werden die betreffenden Glieder zweiter Ordnung (welche von sehr kleinen Divisoren herrühren) für die Radienvectoren und die Längen entwickelt. Die Methode schliesst sich eng an Laplace an; die Resultate sind, wie der Verfasser mittheilt, in Uebereinstimmung mit denen, welche er in einer der Pariser Akademie vorgelegten Abhandlung durch Variation der Constanten erhalten hat.

B.

A. DORNA. Maniera di trovare le formole generali pel calcolo della parallasse nelle coordinate di un astro con alcune semplici relazioni di trigonometria piana. Atti di Torino XIII. 261-269.

Herleitung der Parallaxenformeln. B.

J. A. C. Oudemans. Over de jaarlyksche baan, die de vaste sterren ten gevolge van de aberratie van het licht schijnen te beschrijven. Versl. en Mededeel. XIII. 356-367.

Die hier untersuchte Aufgabe heisst: Welches würde die scheinbare Bahn der Fixsterne in Folge der Bewegungen des Lichtes und der Erde sein, wenn die Bahn der Erde eine grosse Excentricität hätte, und nicht, wie es wirklich der Fall ist, einem Kreise sehr nahe käme. Der Verfasser erhält folgende Resultate:

1) Welches auch die Excentricität e der Bahn der Erde ist, alle Sterne scheinen durch die Aberration einen Kreis zu beschreiben, welcher in einer Ebene liegt, parallel der Ekliptik. 2) Der Kreis ist excentrisch in Beziehung zu dem Ort, welchen der Stern einnehmen würde, wenn die Erde still stände oder die Geschwindigkeit des Lichtes unendlich wäre. 3) Die Excentricität des Punktes A in dem Kreise ist der der Erdbahn gleich. 4) Die Gerade, welche durch den Punkt A und den Mittelpunkt dieses Kreises geht, ist senkrecht zur grossen Axe der Erdbahn, so dass der genannte Mittelpunkt sich an der Seite befindet, nach der die Bewegung der Erde in ihrem Perihelium gerichtet ist. 5) Die Bewegung des Sternes in diesem Kreise ist ungleichförmig. In Beziehung auf den Punkt A ist sie so, dass ihre Verbindungsgerade mit diesem Punkte immer parallel ist der Tangente an die Erdbahn in dem Punkte, welchen die Erde einnimmt. 6) In Beziehung zum Mittelpunkte des Kreises jedoch folgt der Lichtstrahl demselben Gesetz wie die Erde, jedoch ist der Stern der Erde immer 90° in Länge voraus.

Die Lösung würde viel einfacher sein, wenn der Verfasser mit der Theorie des Hodographen bekannt wäre, und diese benützt hätte. Uebrigens erkennt er auch an, dass die erhaltenen Resultate gar nicht als neue betrachtet werden können. G.

V. Ventosa. Note sur les mouvements réels des étoiles dans l'espace. Monthl. Not. XXXVIII. 90-94.

Allgemeiner Bericht über des Verfasser's Untersuchungen über die Bewegungen der Sterne. Der Verfasser hat Formeln erhalten,

welche die Bewegung in der Gesichtslinie (line of sight) d. h. der radialen Bewegung und der Winkelbewegung, d. h. der eignen Bewegung, mit der wahren Bewegung im Raume verbinden. Glr. (O.)

W. DOBERCK. Binary stars. Observatory II. 110-116, 140-144, 169-174, 209-217.

Theil I und II enthalten ein Résumé über die Methoden, die zur Berechnung der Bahnen von Doppelsternen vorgeschlagen sind. Glr. (O.)

H. GYLDÉN. Ueber die Rotation eines festen Körpers, dessen Oberfläche mit einer Flüssigkeit bedeckt ist. Astr. Nachr. XCIII. 273-284, Nr. 2226.

Der Verfasser, welcher bei der genannten Aufgabe speciell den Fall der Erde im Auge hat, geht von den allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Rotation eines veränderlichen Systems aus und vereinfacht die Aufgabe zunächst durch folgende Hypothese. Es seien OX, OY, OZ die Hauptträgheitsaxen für den festen Kern, OX', OY', OZ' diejenigen für Kern plus Flüssigkeit, so wird angenommen, dass die augenblickliche Drehungsaxe OR mit OZ und OZ' in einer Ebene liege, und dass

$$\sin(OZ, OZ') = h \sin(OZ, OR)$$

sei, wo h einen constanten echten Bruch bedeutet und die höheren Potenzen des Winkels (OZ, OR) als Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden. Ferner wird von den äusseren Kräften nur die Reibung der Flüssigkeit gegen den Kern berücksichtigt. Betreffs der weiteren Vereinfachungen und Vernachlässigungen, welche der Verfasser vornimmt, um die Aufgabe der Rechnung zugänglicher zu machen, muss auf den Aufsatz selbst verwiesen werden, ebenso auch in Bezug auf die Betrachtungen, welche an die Endformeln geknüpft werden. B.

A. WEILER. Die Bewegung eines Punktes, welcher von einem abgeplatteten Sphäroid angezogen wird. Astr. Nachr. XCII. 289-300, 305-318, Nr. 2203-2205.

Der Verfasser nimmt eine früher von ihm unrichtig behandelte Aufgabe wieder auf (Vergl. F. d. M. IX. 794. 1877). Da die Entwicklung von vornherein gewisse Vernachlässigungen zur Vereinfachung der Rechnung einführt, und keine numerischen Werthe gegeben sind, so lässt sich bei der Complication der Formeln nicht ersehen, wieweit seine Untersuchung gegenüber den vollständigen Arbeiten Hansen's und Früherer über die Mondtheorie, auf die es dem Verfasser hauptsächlich ankommt, practische Bedeutung beanspruchen kann. B.

J. H. POYNTING. On a method of using the balance with great delicacy and on its employment to determine the mean density of the Earth. Proc. of London XXXVIII. 2-34.

Der Verfasser beschreibt seinen Apparat und seine Methode und bemerkt sodann, dass seine Resultate an sich keinen Werth haben, dass sie aber als Beispiel dienen können für die Anwendung des Hebels zu Untersuchungen, die feinere Mittel erfordern, als sie bisher zu ähnlichen Untersuchungen angewandt wurden. Die Resultate zeigen eine bemerkbare Gewichtszunahme bis zu 0,01 Mgr. oder $\frac{1}{4500000000}$ des ganzen Gewichts, verursacht durch die Anziehung der Masse eines Lothes vom Gewicht 154120,6 gr. In einer Reihe von 11 Bestimmungen ergaben sich für die mittlere Dichtigkeit der Erde Werthe zwischen 4,415 und 7,172 mit dem Mittel 5,69. Cly. (O.)

G. H. DARWIN. Note on Thomson's theory of the tides of an elastic sphere. Messenger (2) VIII. 23-26.

Herr Darwin bemerkt, dass die Resultate der Theorie von der elastischen Nachgiebigkeit der Erde noch mehr interessiren würden, wenn es möglich wäre, die Wirkungen des Mangels

der Homogenität in der Elasticität und Dichte des Erdinnern zu berücksichtigen. Dies könne nicht geschehen. Aber man könne eine mehr oder weniger wahrscheinliche Schätzung der Ausdehnung machen, in welcher eine gegebene Nachgiebigkeit der Oberfläche die Flutwelle des Oceans beeinflussen würde, wenn man die Erde als heterogen betrachtet, und da man das Steigen der Flutwelle im Innern der Erde nur beurtheilen könne durch Beobachtungen auf dem Ocean, könne diese Schätzung von Nutzen sein.

Die Hypothese, die Herr Darwin adoptirt, und die er als wahrscheinlicher wie andere betrachtet, geht dahin, dass, wenn die Erdoberfläche unter dem Einfluss eines körperlichen harmonischen Potentials zweiten Grades die Form $r = a + \sigma$ annimmt, wo σ eine Kugelfunction zweiten Grades ist, die Ellipticität einer inneren ellipsoidischen Schicht bezogen wird auf die der Oberfläche nach demselben Gesetz, wie wenn die Erde homogen, elastisch und incompressibel wäre und ihre Oberfläche in die Form $r = a + \sigma$ gekommen wäre durch ein erzeugendes Flutpotential zweiter Ordnung.

Das Potential der Erde auf einen äusseren Punkt ihrer Masse unterscheidet sich, wie gefunden wird, bei dieser Hypothese wenig von dem, das sich unter Voraussetzung der Homogenität ergeben hatte. Im einen Falle ist die Formel

$$g\frac{a^2}{r} + (0{,}972)\tfrac{3}{5}g\left(\frac{a}{r}\right)^2\sigma,$$

im anderen

$$g\frac{a^2}{r} + \tfrac{3}{5}g\left(\frac{a}{r}\right)^2\sigma.$$

Glr. (O.)

G. H. Darwin. On the bodily tides of viscous and semi-elastic spheroids and on the ocean tides on a yielding nucleus. Proc. of London XXXVII. 419-424.

Die Arbeit wird wahrscheinlich in den Phil. Trans. erscheinen. Der Verfasser resumirt sein hauptsächlichstes prak-

tisches Resultat in der Behauptung, es sei ziemlich sicher, dass die Erde eine sehr grosse wirkliche Starrheit besitze; die Hauptsache aber sei eine vorherige Untersuchung der Praecession zäher und unvollkommen elastischer Sphaeroide, eine Untersuchung, die er in kurzem zu vollenden hofft. Cly. (O.)

S. Haughton. Notes on physical geology. V. Mr. G. H. Darwin's comments on note III. Proc. of London XXXVII. 448-450.

Antwort auf Herrn Darwin's Arbeit. Es handelt sich um den Einfluss der allmäligen Erhebung eines Continents auf die Lage der Erdaxe. Cly. (O.)

S. Haughton. Note in correction of an error in his: notes on physical geology. Proc. of London XXXVIII. 154-155.

G. H. Darwin. On the precession of a viscous spheroid and on the remote history of the Earth. Abstract. Proc. of London XXXVIII. 184-194.

G. H. Darwin. Problems connected with the tides of a viscous spheroid. Abstract. Proc. of London XXXVIII. 194-199.

Die Arbeiten werden in den Phil. Trans. erscheinen, weshalb das Referat bis dahin verschoben wird. Cly. (O.)

G. H. Darwin. On Prof. Haughton's estimate of geological time. Proc. of London XXXVII. 179-183.

Enthält Betrachtungen über den Einfluss von geologischen Veränderungen auf die Lage der Rotationsaxe der Erde, etc. Cly. (O.)

Helmert. Notiz zur Berechnung der Lothablenkung durch den Mond. Astr. Nachr. XCI. 235-238. Nr. 2175.

C. A. F. Peters. Notiz zur Berechnung der Lothablenkung durch den Mond. Astr. Nachr. XCI. 235-238, Nr. 2175.

Berichtigung zu einem Aufsatze des Herrn von Sterneck über den genannten Gegenstand in den Wien. Ber. LXXIII. B.

W. Fabritius. Die astronomische Refraction bei Annahme einer constanten Temperaturabnahme. Astr. Nachr. XCIII. 17-28, Nr. 2210.

Der Verfasser bestimmt im Anschlusse an die Arbeiten von Gyldén die astronomische Refraction unter der Voraussetzung constanter Höhenstufen für die Lufttemperatur, also unter Fortlassung des von Gyldén benutzten quadratischen Gliedes und gelangt zu dem, nach den Arbeiten von v. Bauernfeind übrigens längst bekannten Resultate, dass sich hierbei die Refractionen in recht befriedigender Weise der Wirklichkeit anschliessen.

B.

Th. von Oppolzer. Eine Bemerkung über die Berechnung der Refraction. Astr. Nachr. XCII. 29-30. Nr. 2186.

Bemerkung, dass ein bisher gewöhnlich vernachlässigtes Glied in der Formel für die astronomische Refraction bei der Genauigkeit der heutigen Beobachtungen sehr wohl merklich werden kann. B.

J. Makarevitsch. Sur la réfraction astronomique. C. R. LXXXVI. 821-823.

R. Radau. Rectification. C. R. LXXXVI. 1011.

Herr Makarevitsch leitet die Refractionsformel

$$\text{Refr.} = \sin z \frac{\sqrt{a + b\cos^2 z} - \cos z}{c + d\cos^2 z},$$

wo a, b, c, d Constanten und z die scheinbare Zenithdistanz, auf einem Wege ab, der nach seiner Meinung von jeder besonderen

Annahme über die Vertheilung der Luftdichte unabhängig ist, so dass seine Formel alle bekannten als specielle Fälle in sich schlösse. Letzteres ist handgreiflich falsch, und es wird in der Radau'schen Berichtigung die Quelle des Fehlers angegeben.

B.

A. Cayley. Geometrical considerations on a solar eclipse. Quart. J. XV. 340-347.

Der Aufsatz behandelt mittelst rein geometrischer Betrachtungen den Verlauf der Durchschnittscurve des Halbschattenkegels bei einer Sonnenfinsterniss mit der Erdoberfläche, sowie den Verlauf der dabei auftretenden Orte ausgezeichneter Punkte, unter der Voraussetzung, dass die Erde als unbeweglich gedacht wird.

B.

Hatt. Sur l'emploi des méthodes graphiques pour la prédiction des occultations ou éclipses. C. R. LXXXVI. 303-304.

Prioritätsreclamation gegenüber einem Aufsatze von Baills (vgl. F. d. M. 1877. IX. 805) zu Gunsten eines älteren Werkes von Buch, Calcul des éclipses de Soleil par la méthode des projections (1860). B.

Beuf et Perrin. Considérations nouvelles sur l'observation et la réduction des distances lunaires en mer. C. R. LXXXVI. 758-761.

Mittheilung von Formeln für die Längenbestimmung zur See.

B.

Faye. Emploi de l'ascension droite de la lune, corrigée des erreurs tabulaires, pour déterminer la longitude en mer. C. R. LXXXVII. 346-350.

Abänderung der Borda'schen Formel für Monddistanzen, um

direct mit den Rectascensionen anstatt mit den Distanzen zu rechnen. B.

A. Bono. Nuovo metodo grafico per risolvere la navigazione ortodromica. Riv. mar. XI. 411-417.

Ormond Stone. On the determination of time by means of a portable transit-instrument out of meridian. Astr. Nachr. XCIII. 331-334. Nr. 2229.

Formeln für Zeitbestimmung ausserhalb des Meridians aus Durchgängen von Sternpaaren in kleinen Distanzen südlich und nördlich vom Zenith. B.

J. J. Åstrand. Ueber die Bestimmung des Collimationsfehlers eines Meridianinstruments, ohne Benutzung von Collimatoren und ohne Umlegung der horizontalen Axe. Astr. Nachr. XCII. 177-180. Nr. 2196.

Transformation eines von C. L. v. Littrow für die genannte Aufgabe vorgeschlagenen Verfahrens, welches auf der Benutzung eines Polsternes, eines Südsternes und eines Sternes dazwischen beruht. B.

Zenger. Ueber ein neues Sonnenocular. Prag. Ber. 1877. 133-140.

Das aus einem gewöhnlichen Ocular austretende Strahlenbündel erfährt vor dem Eintreten in das Auge eine Reflexion an einer Ebene, deren angrenzende Medien nahezu gleiche Brechungsexponenten besitzen. Die starke Lichtabschwächung wird an einem Beispiele numerisch erläutert. B.

J. C. Houzeau. Uranométrie générale avec une étude de la distribution des étoiles visibles à l'oeil nu. Ann. de l'obs. r. de Brux. (2) I.

Eine mit Karten erläuterte Beschreibung der mit blossem Auge sichtbaren Sterne, nach den Beobachtungen von Zeitgenossen für den nördlichen und vom Verfasser (in Jamaica) für den südlichen Himmel, unabhängig von früheren Arbeiten. Als Hauptresultat ergiebt sich, dass die mit blossem Auge sichtbaren Sterne, überhaupt die der drei ersten Grössen, in der Gegend der Milchstrasse zahlreicher sind als anderswo. Mn. (O.)

G. von Niessl. Ueber die tägliche Variation der Sternschnuppen. Astr. Nachr. XCIII. 209-238. Nr. 2222-2223.

Die Theorie der Sternschnuppen ergiebt unter den Voraussetzungen, welche man gegenwärtig macht, für die tägliche Variation der Häufigkeit der Meteore ein Maximum von 18^h, während dasselbe nach den Beobachtungen einige Stunden früher eintritt. Der Verfasser discutirt eine Reihe von Ursachen, welche zur Erklärung dieser Verfrühung herangezogen werden können. Betreffs der Resultate ist auf die Abhandlung, namentlich auf die am Schlusse derselben zusammengestellten Thesen zu verweisen. In mathematischer Beziehung ist nur der im ersten Abschnitte gegebene Nachweis zu erwähnen, dass der Einfluss der Tageslänge, resp. der Dämmerung zur Erklärung jener Verfrühung des Maximums unter den bisherigen Voraussetzungen unzureichend ist. B.

H. Geelmuyden. Om Zodiakallyset. Arch. f. Math. og Naturv. Christ. III. 258-292.

Im ersten Theil dieser Arbeit untersucht der Verfasser die Lage des Zodiakallichtes für einen gegebenen Horizont unter der Annahme, dass es sich längs der Ekliptik bis zu einer gegebenen Entfernung von der Sonne erstreckt. Das Resultat wird für das ganze Jahr und für die vier Breiten 0°, 23°27′, 45° und 60° graphisch dargestellt, indem die Tafel die Höhe des Punktes der Ekliptik giebt, der 70° von der Sonne entfernt ist, wenn diese sich 16° unter dem Horizont befindet. Der Glanz der Erscheinung

ist offenbar am grössten im Augenblicke des Endes der Dämmerung oder des Anfangs des Morgenrothes, was nach Schmidt in Athen bei einer Höhe der Sonne von $-16°$ stattfindet. Uebrigens zieht der Verfasser für nördliche Gegenden den aus älteren Beobachtungen gefolgerten Werth von 18° vor.

Im zweiten Theil vertheidigt der Verfasser diese Art, das Zodiakallicht als mit der Sonne verbunden zu betrachten, gegen eine Theorie von Herrn Serpieri in Urbino, die in den „Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani" veröffentlicht ist und sich auf eine Discussion der Beobachtungen stützt, die Jones 1853 bis 1855 in den tropischen Meeren gemacht hat. Nach dieser Theorie ist das Zodiakallicht mit der Erde verbunden. Der Verfasser zeigt, dass die Schlüsse des Herrn Serpieri in mehreren Punkten schlecht begründet sind. Zum Beispiel hat er die Dauer der astronomischen Dämmerung auf eine Viertelstunde ausgewerthet, während sie niemals weniger als eine Stunde 4 Minuten dauert. Gegen diese Theorie stellt der Verfasser die ältere Ansicht auf, (aber nur in Form einer Conjectur) dass das Zodiakallicht von den durch die Sonne erleuchteten Meteoriten herrührt. Er zeigt, dass die berühmte Entdeckung Schiaparelli's, die vollständige Uebereinstimmung der Bahnen der Meteoriten mit denen der Kometen, Alles giebt, was für die Lösung des Problems nöthig ist. Die zodiakale Natur der Erscheinung legt den Gedanken an die Kometen nahe, deren Bahnen geringe Neigung zur Ekliptik haben, d. h. den Kometen mit kurzen Perioden. Von 1850 bis 1877 hat es 124 bekannte Kometenerscheinungen gegeben, von denen 47 von 9 Kometen mit Perioden von weniger als 8 Jahren herrühren. Der Verfasser schliesst daraus, dass die Häufigkeit der Kometen, von der Sonne gesehen, in einer Zone von 20° Breite auf beiden Seiten der Ekliptik 10 bis 11 Mal grösser gewesen ist als am ganzen anderen Himmel. Nichts ist daher natürlicher, als dasselbe für die Meteoriten anzunehmen. Um das von einer solchen Menge ausgesandte Licht zu berechnen, muss man die Dichtigkeit für verschiedene Entfernungen von der Sonne kennen. Dazu benutzt der Verfasser die bemerkenswerthe Uebereinstimmung der Apheliumsentfernungen der Kometen mit

kurzen Perioden (die wahrscheinliche Folge davon, dass die actuellen Perioden eine Wirkung des Jupiter sind). Unter der Voraussetzung, dass die Perihele gleichmässig von der Oberfläche der Sonne bis zu Entfernungen vertheilt sind, wo sie aufhören Perihele zu sein, findet er den Ausdruck der relativen Dichtigkeit der Meteoriten in den 2 äussersten Fällen 1) wenn sie alle eine gemeinsame Apheliumsentfernung (Q) haben, was annähernd für die Kometen mit kurzen Perioden gilt, 2) wenn die Apheliumsentfernungen gleichmässig zwischen einem gewissen Werth Q_0 und dem Unendlichen vertheilt sind; nämlich:

$$(1) \quad D = \frac{K}{r\sqrt{Q^2 - r^2}} \log \text{nat} \left(\sqrt{\frac{r}{Q}} + \sqrt{1 + \frac{r}{Q}} \right),$$

$$(2) \quad D' = \frac{K'}{\sqrt{Q_0 r}} \left\{ 1 - \alpha \frac{r}{Q_0} + \beta \left(\frac{r}{Q_0} \right)^2 - \gamma \left(\frac{r}{Q_0} \right)^3 + \cdots \right\},$$

wo r die Entfernung von der Sonne, K und K' Constante sind. Die Coefficienten haben folgende Werthe $\alpha = 0{,}056$, $\beta = 0{,}115$, $\gamma = 0{,}018$, $\delta = 0{,}049$ etc.

Die numerische Berechnung, bei der der Verfasser die Werthe $Q = 5{,}8$ (Mittel der Apheliumsentfernungen der Kometen mit kurzen Perioden) und $Q_0 = 5$, die Entfernung der Erde zur Einheit genommen, zeigt, dass die Werthe von D und D' fast identisch sind bis zu der Entfernung 2 oder 2,5 und sehr wenig verschieden bis zu der Entfernung 4. Dann ist in Folge des Ueberwiegens des ersten Gliedes die Dichtigkeit des Haufens der Meteoriten beinahe umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Entfernung von der Sonne, wenigstens bis zur Entfernung 3 oder 4.

Dann kommt die Berechnung der Lichtmenge, welche von einem Kegel oder einer Pyramide dieses Haufens, die ihren Scheitel in der Erde und die Oberflächeneinheit auf dem Himmel zur Basis hat, ausgesandt wird. Unter Anwendung der oben ausgesprochenen approximativen Dichtigkeitsgesetze und der Lambert'schen Formel für den Schein eines Planeten findet man, da die sphärische Form als Mittel für alle unregelmässigen Formen der Meteoriten angenommen werden kann, für die gesuchte Lichtmenge

$$J = \frac{C}{\sin e \sqrt{\sin e}} \int_e^{\alpha_0} (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\sqrt{\sin\alpha}\, d\alpha,$$

wo C eine Constante, e der Winkel an der Erde, α der (äussere) Winkel am Meteoriten in dem Dreieck ist, welches von Sonne, Erde und Meteoriten gebildet wird; α_0 ist der wenig von 180° verschiedene Werth von α, welcher der Grenzentfernung (R) des Dichtigkeitsgesetzes entspricht. Die Ausführung der Integration giebt, wenn $e < 90°$,

$$J = \tfrac{10}{9} C \left\{ \tfrac{3}{5}\left(e - \frac{\alpha_0}{R^{\frac{3}{2}}}\right) + \operatorname{cotg} e + \frac{2K - u}{\sin^{\frac{3}{2}} e} - \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}} \left[\operatorname{cotg} \frac{\alpha_0}{2} + \tfrac{1}{2} \frac{\sin\alpha_0}{5} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\sin^3\alpha_0}{9} + \cdots \right] \right\},$$

wo K das vollständige elliptische Integral mit dem Modul $\sqrt{-1}$ und u dasselbe Integral mit der oberen Grenze $\sqrt{\sin e}$ ist. Wenn $e \overline{\gtrless} 90°$, findet man denselben Ausdruck, nur mit u an Stelle von $2K - u$.

Für die numerische Berechnung setzt der Verfasser in Folge des vorher Bemerkten $R = 4$, also $\sin\alpha_0 = \frac{1}{4}\sin e$. Er bemerkt, dass die Substitutionen von $R = \infty$ und $\alpha = 180°$ nur wenig am Resultat verändern würden. Die relative Erleuchtung des Himmels längs des Zodiakus wird nach dieser Berechnung in eine Tafel zusammengestellt. Der grosse Glanz bei der Sonne kann nur während totaler Finsterniss eintreten. Er erscheint dann als Corona, die nach den Beobachtungen immer eine Verlängerung auf der Ekliptik hat.

Am Ende erwähnt der Verfasser des Gegenscheins, der keine Folge der vorhergehenden Theorie ist, aber unter gewissen Bedingungen als kosmische Erscheinung auseinandergesetzt werden kann. Die Beobachtungen dieses schwachen Lichtes sind wenig zahlreich. Es ist bemerkenswerth, dass Jones desselben niemals erwähnt, trotzdem er das Zodiakallicht mehrere Male gesehen hat. Nach Schiaparelli kann man es nicht sowohl sehen, wenn die Luft sehr rein ist, als wenn es „un non so che di brumoso" giebt, was es wahrscheinlich macht, dass es sich dabei um eine atmosphärische Reflexion handelt. L. (O.)

J. C. Houzeau. Sur certains phénomènes énigmatiques de l'astronomie. Bull. de Belg. (2) XLVI. 951-966.

Nicht gelöste Fragen: 1) Warum erscheinen Sonne und Mond am Horizont grösser? 2) Woher kommt es, dass der Pseudosatellit der Venus, der von 1645 bis 1764 7 Mal, dann 12 Tage nacheinander von verdienstvollen Astronomen gesehen worden ist, seitdem nicht wieder gesehen ist? 3) Wie hat W. Herschel während beinahe zweier Monate den Saturn unter quasi-rechtwinkliger Form sehen können? 4) Wie kann man den Formwechsel des Biela'schen Kometen 1846 und sein Nichtwiedererscheinen in den Jahren 1859, 1866, 1872 erklären? 5) Welches ist die Ursache der trocknen Nebel von 1783, 1821, 1822? 6) Was ist das Zodiakallicht, dieser mysteriöse Gürtel, der nicht die Sonne, sondern die Erde begleitet. Mn. (O.)

Anhang.

V. Schlegel. Lehrbuch der elementaren Mathematik. Erster Theil. Arithmetik und Combinatorik. Wolfenbüttel. J. Zwissler. 8°.

Das vorliegende Lehrbuch zeichnet sich vor den meisten bekannten Lehrbüchern der Elementarmathematik besonders dadurch vortheilhaft aus, dass es nach einem Principe ausgearbeitet ist, welches den neueren strengeren Anforderungen an die Wissenschaftlichkeit gerecht wird. In den meisten gebräuchlichen „Leitfäden“ ist allzusehr das Streben nach möglichster Kürze bemerkbar; nur das Allernothwendigste wird übersichtlich zusammengestellt; es geht das Ziel der Verfasser fast ausschliesslich dahin, eine gewisse Virtuosität in der Handhabung der Rechnungsarten betreffs Lösung von Aufgaben zu erreichen; die systematische Herleitung der Gesetze tritt in den Hintergrund. Ein solcher „Leitfaden“ lässt sich meist durch eine Aufgabensammlung ersetzen, in der die betreffenden Regeln jedem Capitel in blosser Aufzählung vorangehen. Das Bedürfniss nach einer wissenschaftlichen Begründung der Elemente, das sich allerdings bei der Behandlung der elementaren Geometrie früher regte, als in der Arithmetik, wird nicht befriedigt. Dieser Mangel veranlasste den Verfasser zur Ausarbeitung seines Lehrbuchs. Es soll dem Lehrenden und dem Lernenden Gelegenheit bieten, die Elemente der Arithmetik und der Combinatorik von einer wissenschaftlicheren Seite kennen zu lernen, als dieses die bisherige Leitfaden-Literatur ermöglicht. Dieser Zweck kann nur durch

ein ausführlicheres Lehrbuch erreicht werden. Der Verfasser bindet sich nicht ängstlich an Pensa, sondern überlässt dem Lehrer die Auswahl des Stoffes, wie er dieselbe für die Entfaltung der Individualität des Schülers passend erachtet. Dass das Buch den neuesten Forschungen auf dem Gebiete der Zahlenlehre Rechnung trägt, das zeigt der Einfluss, den das Studium der Arbeiten Hankel's, Schröder's, J. G. Grassmann's, H. Grassmann's u. a. auf die Darstellung einzelner Gegenstände ausgeübt hat. In der „Einleitung in die Mathematik" theilt der Verfasser, nach H. Grassmann's Vorgange, die Mathematik in vier Zweige; es behandelt 1) die Zahlenlehre die arithmetischen discreten Formen, 2) die Combinationslehre die combinatorischen discreten Formen, 3) die Functionslehre die arithmetischen stetigen Formen, 4) die Raumlehre die combinatorischen stetigen Formen. Es wird ferner die reine und angewandte Arithmetik, die reine und angewandte Combinatorik unterschieden. In die reine Arithmetik gehört 1) die Theorie der einfachen Zahlen, a) der absoluten, b) der relativen Zahlen, 2) die Theorie der zusammengesetzten Zahlen, und zwar a) die Polynome, b) die Proportionen, c) die Gleichungen, d) die Reihen, e) die Kettenbrüche. In der angewandten Arithmetik folgt eine vollständige Theorie der Decimalrechnung und die Zinsrechnung. Die reine Combinatorik umfasst die Gesetze für das Permutiren, Combiniren und Variiren; als Anwendung folgt die Binomialreihe und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. M.

F. Dintzl. Die Elemente der allgemeinen Arithmetik. Pr. Krems.

Eine klare Darstellung der Elemente der allgemeinen Arithmetik nach den neueren Anschauungen, wie sie seit den Arbeiten von Grassmann, Weierstrass und Hankel über die Theorie der complexen Zahlen für die Entwickelung der allgemeinen Zahlenlehre massgebend geworden sind. Nach dem Princip der Wiederholung und dem der Umkehrung werden die Grundoperationen aufgebaut und durch Hankel's Princip der Permanenz der formalen

Gesetze fruchtbar gemacht. Es wird gezeigt, wie der Zahlbegriff sich durch die Rechnungsoperationen allmählig erweitert. Der Verfasser betont, dass, wie bestimmte Gesetze für die einzelnen Operationen charakteristisch sind, so auch umgekehrt jede Operation durch das Gelten gewisser Gesetze definirt werden kann. Im Ganzen stimmt der Inhalt der Schrift mit dem Programm von Kossak vom Jahre 1872 überein. M.

F. J. Studnička. Lehrbuch der Algebra für die oberen Klassen der Mittelschule. (Deutsch und Böhmisch.).

Unterscheidet sich von ähnlichen Lehrbüchern sowohl durch Anordnung des Stoffes, als auch durch vielfach neue Ableitungen und Aufnahme der Elemente der Determinantentheorie. Std.

H. Franzky. Supplemente zu Kambly's Arithmetik und Algebra. Pr. Spandau.

Diese Supplemente, zur Ergänzung des Kambly'schen Buches auf Schulen bestimmt, enthalten: 1) die trigonometrische Behandlung der gemischt-quadratischen Gleichungen, 2) den binomischen Lehrsatz, 3) arithmetische und geometrische Reihen höherer Ordnung, 4) complexe Ausdrücke, 5) cubische Gleichungen, 6) reciproke Gleichungen, 7) Kettenbrüche, 8) diophantische Gleichungen 1ten und 2ten Grades. Der Inhalt der einzelnen Paragraphen enthält die gewöhnlichen Methoden. O.

J. W. L. Glaisher. Arithmetical note. Messenger (2) VII. 190-191.

Eigenschaft der Perioden der periodischen Decimalbrüche, die den Brüchen

$$\tfrac{1}{19},\ \tfrac{1}{199},\ \tfrac{1}{1999},\ \dots \text{ und } \tfrac{1}{49},\ \tfrac{1}{499},\ \tfrac{1}{4999},\ \dots$$

entsprechen. Glr. (O.)

Birger Hansted. Nogle Sätninger om rent periodiske Decimalbröker. Zeuthen Tidsskr. (4) II. 180-183.

Handelt von den partiellen Divisionsresten, welche bei der Entwickelung von $\frac{M}{N}$ in einen Decimalbruch vorkommen, und von solchen Zahlen, welche sich bei einfacher Kreisverschiebung multipliciren lassen. Gm.

J. W. L. Glaisher. Note on calculating decimals. Rep. Brit. Ass. 1878.

Csy.

M. Szysztowski und M. Martynowski. Graphischer Calcül in der Ebene. I. Theil. Par. Denkschr. 1877.

Eine elementare, ausführliche und klare Darstellung der wichtigsten Sätze dieses Calcüls. Bcki.

Fr. Šanda. Beitrag zum graphischen Potenziren. Casopis VII. 235-243. (Böhmisch).

Std.

J. Filcík. Graphische Bestimmung von Logarithmen. Casopis VII. 243-245 (Böhmisch.).

Std.

F. J. Studnička. Taschenlogarithmentafeln mit 5 Decimalstellen. III. Aufl. mit vielen praktischen Tafeln. (Böhmisch.). Std.

A. Gernerth. Logarithmentafel. Wien. Beck.

J. W. L. Glaisher. On multiplication by a table of single entry. Phil. Mag. 1878.

Die Arbeit enthält die Erläuterung einer Multiplicationsmethode, genannt „Prostasphaeresis“, welche vor der Entdeckung der Logarithmen in Gebrauch war. Herr Sylvester hat in einem Artikel im Phil. Mag. darauf aufmerksam gemacht. Die Methode ist theoretisch und historisch interessant.

Csy. (O.)

A. Kurz. Aus der Schulmappe. Bayr. Bl. XVIII. 21-27, 191-196, 433-438.

Fortsetzung der bereits aus früheren Jahrgängen bekannten didaktischen Miscellen des Verfassers. — 47. Zum Beweise der beiden Kirchhoff'schen Gesetze. Nachweis, dass aus diesen Gesetzen durch geeignete Specialisirung das Ohm'sche Gesetz abgeleitet werden kann. — 48. Messung des galvanischen Batteriewiderstandes r. Elementare Darstellung der Siemens'schen Methode, welche im Jubelbande der Poggendorf'schen „Annalen“ zuerst angegeben ward. — 49. Die positive und negative Linse (resp. Spiegel). Eine an die Formel

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\pm\frac{1}{p}$$

sich anschliessende Tabelle, aus welcher für $a=\infty$, $\gtreqless 2p$, $\gtreqless p$, $\geqq -p$, $\gtreqless -2p$ sofort der zugehörige Werth von a' entnommen werden kann. — 50. Ueber Pendelbewegung. Zusammenstellung der Gesetze der Pendelbewegung mit jenen Gleichungen, welche ersteren gegenüber als Analoga für den Fall gleichförmig beschleunigter Bewegung gelten können. — 51. Zwei windschiefe Kräfte. Aus dem Specialfall zweier gleicher und senkrecht auf einander stehender sich kreuzender Kräfte wird die Reduction zweier beliebiger windschiefer Kräfte auf eine Resultante und ein Kräftepaar erschlossen. — 52. Ueber den Begriff des Trägheitsmoments. Eine Vervollkommnung der bereits in Miscelle 5 gegebenen Entwickelung im elementaren Sinne. — 53. Der zwölfte Theil des Physik-Pensums. Kurze Zusammenstellung der Hauptmomente aus der Mechanik starrer Körper. — 54. Der

Grassmann'sche Hahn. Es wird ein sehr einfacher Riss dieser sinnreichen Vorrichtung verzeichnet; durch Ausschneiden und geeignetes Zusammensetzen kann sich der Schüler selbst ein instruktives Modell herstellen. — 55. Der schädliche Raum bei der Luftpumpe. Für den vorhin erwähnten Hahn ergiebt sich als Verdünnungsgrenze

$$2d\frac{\varrho^2}{c^2},$$

wo d die Dichte der äusseren Luft, ϱ die Grösse des schädlichen Raumes, c den Cylinderraum bedeutet. — 56. Die Trägheitsfläche. Da Poinsot's Centralellipsoid dem Anfänger Schwierigkeiten bereitet, so untersucht der Verfasser, unter welchen Umständen die Trägheitsfläche besonders einfach ausfällt. Dies ist der Fall für eine Strecke, durch deren Mittelpunkt die Drehungsaxen gehen, denn hier ist diese Fläche eine gewöhnliche Cylinderfläche. — 57. Barometer-Reduction und der Flächenausdehnungscoefficient. Dem linearen und cubischen Ausdehnungscoefficienten wird der gemeiniglich vernachlässigte quadratische zur Seite gestellt und dessen Verwendbarkeit nachgewiesen. — 58. Der II. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Durch eine graphische Darstellung des Mariotte'schen Satzes kann man zu der bekannten Relation $Q_1 : Q_2 = T_1 : T_2$ gelangen. — 59. Die elektromotorische Kraft. Herr Kurz polemisirt gegen diesen, die mechanischen Begriffe des Lernenden verwirrenden, Terminus technicus. — 60. Nochmal die beiden Kirchhoff'schen Gesetze. Der theilweise umgekehrte Entwickelungsgang von dem in Miscelle 47 eingeschlagenen. — 61. Das elektrothermische Gesetz. Das von Riess aufgestellte Gesetz wird mit Hülfe der bekannten, die Schlagweite des Funkens regelnden Formel als Unterfall des Aequivalenzprincips erkannt. — 62. Die Grenzwinkel und die prismatische Ablenkung. Experimentelle und graphische Belege für die Thatsache, dass der Strahl des Ablenkungs-Minimums in allen Prismen in der Mitte aller durchgangsfähigen Strahlen liegt. — 63. Die Interferenz. Angabe eines praktischen Beispiels. — 64. Ableitung der Gleichung stehender aus derjenigen fortschreitender Wellen nebst Hinweis auf akustische Vorkommnisse.

Wie schon früher bemerkt, ist der Styl des Verfassers ein so äusserst conciser, dass etwas mehr Ausführlichkeit häufig unumgänglich erforderlich erscheinen muss. Gr.

J. F. BLAKE. On the measurement of the curves formed by Cephalopods and other mollusks. Phil. Mag. 1878.

Die Arbeit giebt die Gleichungen und einige der geometrischen Eigenschaften der Oberflächen, welche von den Schalen einiger Mollusken gebildet werden. Es ist bemerkenswerth, dass man bei den niedrigsten Thieren Flächen findet, welche auch die mathematische Analyse zu behandeln gestattet.

Csy. (O.)

Namenregister.





